

第1部 : 『魔方陣の基礎的研究』 : 摂田 寛二
 第2章 : 魔方陣の代数的研究
 第1節 : 三次の魔方陣の基礎を知る

1. 先ずは, 一般的な三次の「準」魔方陣を作ろう。

* 「準」三方陣の定義 *

[基本図]			* 行列の定和 *		
n1	n2	n3	$n1+n2+n3=C \dots (1)$		
			$n4+n5+n6=C \dots (2)$		
n4	n5	n6	$n7+n8+n9=C \dots (3)$		
			$n1+n4+n7=C \dots (4)$		
n7	n8	n9	$n2+n5+n8=C \dots (5)$		
			$n3+n6+n9=C \dots (6)$		
			$n1+n5+n9=C \dots (d1); n3+n5+n7=C \dots (d2)$		

普通「魔方陣」と言う時, 行列の定和のみならず主対角線2本の定和まで要請する。その方が希少性・神秘性が高まるからであるが, いったい行列の定和だけが成り立つ三次の「準魔方陣」は幾つあるのか。主対角線の定和(d1, d2)には条件を付けないとする。成り立っていても良い, 成り立たなくても構わないとすると, 全部で何個あるのだろうか。

試みに, 上図の条件だけでコンピュータに計数させてみた。下表がその結果である。

1/	2/	3/	4/	5/	6/	7/	8/
2 9 4	2 6 7	3 8 4	3 5 7	4 9 2	4 8 3	7 6 2	7 5 3
6 1 8	9 1 5	5 1 9	8 1 6	8 1 6	9 1 5	5 1 9	6 1 8
7 5 3	4 8 3	7 6 2	4 9 2	3 5 7	2 6 7	3 8 4	2 9 4
9/	10/	11/	12/	13/	14/	15/	16/
1 9 5	1 6 8	3 7 5	3 4 8	5 9 1	5 7 3	8 6 1	8 4 3
6 2 7	9 2 4	4 2 9	7 2 6	7 2 6	9 2 4	4 2 9	6 2 7
8 4 3	5 7 3	8 6 1	5 9 1	3 4 8	1 6 8	3 7 5	1 9 5
17/	18/	19/	20/	21/	22/	23/	24/
1 8 6	1 5 9	2 7 6	2 4 9	6 8 1	6 7 2	9 5 1	9 4 2
5 3 7	8 3 4	4 3 8	7 3 5	7 3 5	8 3 4	4 3 8	5 3 7
9 4 2	6 7 2	9 5 1	6 8 1	2 4 9	1 5 9	2 7 6	1 8 6
25/	26/	27/	28/	29/	30/	31/	32/
1 9 5	1 8 6	5 9 1	5 3 7	6 8 1	6 2 7	7 3 5	7 2 6
8 4 3	9 4 2	3 4 8	9 4 2	2 4 9	8 4 3	2 4 9	3 4 8
6 2 7	5 3 7	7 2 6	1 8 6	7 3 5	1 9 5	6 8 1	5 9 1
33/	34/	35/	36/	37/	38/	39/	40/
2 9 4	2 7 6	4 9 2	4 3 8	6 7 2	6 1 8	8 3 4	8 1 6
7 5 3	9 5 1	3 5 7	9 5 1	1 5 9	7 5 3	1 5 9	3 5 7
6 1 8	4 3 8	8 1 6	2 7 6	8 3 4	2 9 4	6 7 2	4 9 2
41/	42/	43/	44/	45/	46/	47/	48/
3 8 4	3 7 5	4 8 3	4 2 9	5 7 3	5 1 9	9 2 4	9 1 5
7 6 2	8 6 1	2 6 7	8 6 1	1 6 8	7 6 2	1 6 8	2 6 7
5 1 9	4 2 9	9 1 5	3 7 5	9 2 4	3 8 4	5 7 3	4 8 3
49/	50/	51/	52/	53/	54/	55/	56/
1 6 8	1 5 9	4 3 8	4 2 9	8 6 1	8 3 4	9 5 1	9 2 4
5 7 3	6 7 2	2 7 6	3 7 5	3 7 5	6 7 2	2 7 6	5 7 3
9 2 4	8 3 4	9 5 1	8 6 1	4 2 9	1 5 9	4 3 8	1 6 8
57/	58/	59/	60/	61/	62/	63/	64/
2 6 7	2 4 9	5 3 7	5 1 9	7 6 2	7 3 5	9 4 2	9 1 5
4 8 3	6 8 1	1 8 6	3 8 4	3 8 4	6 8 1	1 8 6	4 8 3
9 1 5	7 3 5	9 4 2	7 6 2	5 1 9	2 4 9	5 3 7	2 6 7

65/ 3 5 7 4 9 2 8 1 6	66/ 3 4 8 5 9 1 7 2 6	67/ 6 2 7 1 9 5 8 4 3	68/ 6 1 8 2 9 4 7 5 3	69/ 7 5 3 2 9 4 6 1 8	70/ 7 2 6 5 9 1 3 4 8	71/ 8 4 3 1 9 5 6 2 7	72/ 8 1 6 4 9 2 3 5 7
--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------	--------------------------------

[Count = 72] OK!

解が 72個もあると、あまり希少性は感じられない。「魔方陣」の有難味は少ない。

2. やはり、「魔方陣」を作りたい。主対角線 2 本まで等しくしたい。

魔方陣の昔からの要請を定式化すると、次のようになるかと思う。

自然数列 1, 2, 3, ..., 8, 9 を用いて、下図の連立方程式を解く。9 個の変数 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_8, n_9$ に 9 個の自然数のすべてを欠落無く重複無く入れる。

* 標準型魔方陣の定義 *

* 定義式 *

[基本図]

n_1	n_2	n_3
n_4	n_5	n_6
n_7	n_8	n_9

$$\begin{aligned} n_1+n_2+n_3 &= C \quad \dots (1) \\ n_4+n_5+n_6 &= C \quad \dots (2) \\ n_7+n_8+n_9 &= C \quad \dots (3) \\ n_1+n_4+n_7 &= C \quad \dots (4) \\ n_2+n_5+n_8 &= C \quad \dots (5) \\ n_3+n_6+n_9 &= C \quad \dots (6) \\ n_1+n_5+n_9 &= C \quad \dots (7) \\ n_3+n_5+n_7 &= C \quad \dots (8) \end{aligned}$$

この条件から、何を言い得るであろうか。少し代数計算をしてみよう。

まずは、定数 C の値を計算で求める。

(1) ~ (3) 式の辺々を加える。

$$n_1+n_2+n_3+\dots+n_8+n_9=3*C$$

左辺には 1, 2, 3, ..., 8, 9 が全部入るのだから、

$$1+2+3+\dots+8+9=3*C$$

$$45=3*C$$

$$\therefore C=15 \quad \dots (9)$$

この値を (2), (5), (7), (8) の各式に戻すと、

$$n_4+n_5+n_6=15 \quad \dots (2)$$

$$n_2+n_5+n_8=15 \quad \dots (5)$$

$$n_1+n_5+n_9=15 \quad \dots (7)$$

$$n_3+n_5+n_7=15 \quad \dots (8)$$

この 4 式の辺々を足すと、

$$3*n_5+(n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7+n_8+n_9)=4*15$$

$$3*n_5+45=60$$

$$\therefore n_5=5 \quad \dots (10)$$

方陣中央には 5 が来なければならないことがわかる。

$n_5=5$ を (2), (5), (7), (8) の各式に戻すと、

$$n_4+n_6=10 \quad \dots (2)$$

$$n_2+n_8=10 \quad \dots (5)$$

$$n_1+n_9=10 \quad \dots (7)$$

$$n_3+n_7=10 \quad \dots (8)$$

中央の $n_5=5$ をはさむ縦・横・斜めの 4 ペアの 2 数は、「10 の補数を成す」。

つまり、三次の一般型魔方陣は、すべて対称型の補数定和構造を持つ。

3. $\{n_1, n_9\}, \{n_2, n_8\}, \{n_3, n_7\}, \{n_4, n_6\}$ には、 $\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}$ という 4 ペアの「10 の補数」のいずれかが入ることがわかった (順不同)。

では、場所と数値の間にどういう組み合わせが可能か。

奇数/偶数の取り合わせで考えてみると、 n_5 は 5 で奇数であるから、次図の 2 つの配置が可能である。

(A)

偶	奇	偶
奇	奇	奇
偶	奇	偶

(B)

奇	偶	奇
偶	奇	偶
奇	偶	奇

だが、(B) は不可能である。

横の第2行と縦の第2列以外の行列では、3数の和が各々偶数になり、15になり得ない。縦横斜の和がすべて15という奇数になり得るのは、(A)の場合だけである。

したがって、{1, 3, 7, 9} は、四隅には来ない。

よって、次のパターンから次の推理をスタートすることができる。

	1	
3	5	7
	9	

四隅にどんな偶数の組み合わせを入れたらよいだろうか。5の向こう側には、足して10になる数が入ることを忘れてはならない。どんどん当てずっぽうに入れて調べる。最終的に行和・列和が15になる配置を選ぶのである。

(1)

2	1	4
3	5	7
6	9	8

(2)

2	1	6
3	5	7
4	9	8

(3)

4	1	2
3	5	7
8	9	6

(4)

4	1	8
3	5	7
2	9	6

(5)

6	1	2
3	5	7
8	9	4

(6)

6	1	8
3	5	7
2	9	4

(7)

8	1	4
3	5	7
6	9	2

(8)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

と最大7回失敗すれば、少なくとも8回目には正解に達する。

正解は1つしかない。回転したり裏返したりした形を同一と考えれば、である。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4. 三次の魔方陣の異形は8個ある。これらは、本来1つの解と見なすべきである。

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	7	2
1	5	9
8	3	4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

8	3	4
1	5	9
6	7	2

8	1	6
3	5	7
4	9	2

(May 26, 2000(初稿), March 2, 2006(改訂稿) : 撰田 寛二(Kanji Setsuda))

第2節 : 四次の魔方陣の代数的研究

0. 先ず「普通」の標準型四方陣の定義式を下図に示す。

左の基本ポジションを仮定し、16個の各変数に自然数列1, 2, 3, 4, ..., 14, 15, 16の各数を欠落無く重複無く入れるものとする。

[基本ポジション]				$n1+n2+n3+n4=C$ (1)
				$n5+n6+n7+n8=C$ (2)
n1	n2	n3	n4	$n9+n10+n11+n12=C$ (3)
				$n13+n14+n15+n16=C$ (4)
n5	n6	n7	n8	$n1+n5+n9+n13=C$ (5)
				$n2+n6+n10+n14=C$ (6)
n9	10	11	12	$n3+n7+n11+n15=C$ (7)
				$n4+n8+n12+n16=C$ (8)
13	14	15	16	$n1+n6+n11+n16=C$ (9)
				$n4+n7+n10+n13=C$ (10)

定数Cの具体的な値を求めておこう。

(1)+(2)+(3)+(4)

$$n1+n2+n3+n4+n5+...+n14+n15+n16 = 4*C$$

$$1+2+3+4+5+...+14+15+16 = 4*C$$

$$(16+1) \times 16 \div 2 = 4*C$$

$$\therefore C = 34 \quad \dots (11)$$

1. その標準解のリストを示そう。

$n1 < n4; n1 < n13; n1 < n16; n2 > n5$; で整理してある。各解にチェックサム・モニターを付けておいた。行列と汎対角線の和を一々計算して、丁寧に検査している。

解番号# | 行和 | 列和 \ 汎対角線-1の和 / 汎対角線-2の和 |

1# Rw CI\P1/P2				2# Rw CI\P1/P2				3# Rw CI\P1/P2															
1	16	2	15	34	34	34	26	1	16	3	14	34	34	34	29	1	16	3	14	34	34	34	25
12	9	7	6	34	34	34	42	13	7	10	4	34	34	39	40	13	11	6	4	34	34	43	48
13	4	14	3	34	34	26	34	12	2	15	5	34	34	28	33	8	2	15	9	34	34	20	29
8	5	11	10	34	34	42	34	8	9	6	11	34	34	35	34	12	5	10	7	34	34	39	34
4# Rw CI\P1/P2				5# Rw CI\P1/P2				6# Rw CI\P1/P2															
1	16	3	14	34	34	34	30	1	16	3	14	34	34	34	30	1	16	4	13	34	34	34	32
12	7	10	5	34	34	38	38	8	11	6	9	34	34	38	38	11	6	10	7	34	34	36	34
13	2	15	4	34	34	30	34	13	2	15	4	34	34	30	34	14	3	15	2	34	34	34	36
8	9	6	11	34	34	34	34	12	5	10	7	34	34	34	34	8	9	5	12	34	34	32	34

7#				Rw	CI\P1/P2	8#				Rw	CI\P1/P2	9#				Rw	CI\P1/P2
1	16	4	13	34	34\34/30	1	16	4	13	34	34\34/32	1	16	4	13	34	34\34/30
10	7	11	6	34	34\38/34	7	10	6	11	34	34\36/34	6	11	7	10	34	34\38/34
15	2	14	3	34	34\34/38	14	3	15	2	34	34\34/36	15	2	14	3	34	34\34/38
8	9	5	12	34	34\30/34	12	5	9	8	34	34\32/34	12	5	9	8	34	34\30/34

10#				Rw	CI\P1/P2	11#				Rw	CI\P1/P2	12#				Rw	CI\P1/P2
1	16	5	12	34	34\34/26	1	16	5	12	34	34\34/31	1	16	5	12	34	34\34/24
15	6	11	2	34	34\42/42	10	6	11	7	34	34\37/32	10	13	4	7	34	34\44/46
10	3	14	7	34	34\26/34	15	3	14	2	34	34\36/39	8	3	14	9	34	34\22/32
8	9	4	13	34	34\34/34	8	9	4	13	34	34\29/34	15	2	11	6	34	34\36/34

13#				Rw	CI\P1/P2	14#				Rw	CI\P1/P2	15#				Rw	CI\P1/P2
1	16	5	12	34	34\34/26	1	16	6	11	34	34\34/32	1	16	6	11	34	34\34/26
8	13	4	9	34	34\42/42	13	4	10	7	34	34\36/34	10	7	13	4	34	34\42/34
10	3	14	7	34	34\26/34	12	5	15	2	34	34\34/36	15	2	12	5	34	34\34/42
15	2	11	6	34	34\34/34	8	9	3	14	34	34\32/34	8	9	3	14	34	34\26/34

16#				Rw	CI\P1/P2	17#				Rw	CI\P1/P2	18#				Rw	CI\P1/P2
1	16	6	11	34	34\34/32	1	16	6	11	34	34\34/26	1	16	7	10	34	34\34/26
7	10	4	13	34	34\36/34	4	13	7	10	34	34\42/34	14	5	12	3	34	34\42/38
12	5	15	2	34	34\34/36	15	2	12	5	34	34\34/42	11	4	13	6	34	34\30/38
14	3	9	8	34	34\32/34	14	3	9	8	34	34\26/34	8	9	2	15	34	34\30/34

19#				Rw	CI\P1/P2	20#				Rw	CI\P1/P2	21#				Rw	CI\P1/P2
1	16	7	10	34	34\34/30	1	16	7	10	34	34\34/29	1	16	7	10	34	34\34/26
13	4	11	6	34	34\38/34	11	5	12	6	34	34\39/32	11	6	13	4	34	34\42/34
12	5	14	3	34	34\34/38	14	4	13	3	34	34\36/41	14	3	12	5	34	34\34/42
8	9	2	15	34	34\30/34	8	9	2	15	34	34\27/34	8	9	2	15	34	34\26/34

22#				Rw	CI\P1/P2	23#				Rw	CI\P1/P2	24#				Rw	CI\P1/P2
1	16	7	10	34	34\34/30	1	16	7	10	34	34\34/26	1	16	9	8	34	34\34/18
6	11	4	13	34	34\38/34	4	13	6	11	34	34\42/34	15	10	7	2	34	34\50/50
12	5	14	3	34	34\34/38	14	3	12	5	34	34\34/42	4	5	12	13	34	34\18/34
15	2	9	8	34	34\30/34	15	2	9	8	34	34\26/34	14	3	6	11	34	34\34/34

25#				Rw	CI\P1/P2	26#				Rw	CI\P1/P2	27#				Rw	CI\P1/P2
1	16	9	8	34	34\34/30	1	16	9	8	34	34\34/18	1	16	9	8	34	34\34/29
14	5	4	11	34	34\34/38	14	11	6	3	34	34\50/50	4	10	7	13	34	34\39/28
7	10	15	2	34	34\30/34	4	5	12	13	34	34\18/34	15	5	12	2	34	34\40/45
12	3	6	13	34	34\38/34	15	2	7	10	34	34\34/34	14	3	6	11	34	34\23/34

28#				Rw	CI\P1/P2	29#				Rw	CI\P1/P2	30#				Rw	CI\P1/P2
1	16	9	8	34	34\34/28	1	16	10	7	34	34\34/32	1	16	10	7	34	34\34/32
4	11	6	13	34	34\40/30	13	4	6	11	34	34\36/34	11	6	4	13	34	34\36/34
14	5	12	3	34	34\38/44	8	9	15	2	34	34\34/36	8	9	15	2	34	34\34/36
15	2	7	10	34	34\24/34	12	5	3	14	34	34\32/34	14	3	5	12	34	34\32/34

31#				Rw	CI\P1/P2	32#				Rw	CI\P1/P2	33#				Rw	CI\P1/P2
1	16	10	7	34	34\34/18	1	16	10	7	34	34\34/18	1	16	11	6	34	34\34/30
6	11	13	4	34	34\50/34	4	13	11	6	34	34\50/34	13	4	7	10	34	34\38/34
15	2	8	9	34	34\34/50	15	2	8	9	34	34\34/50	8	9	14	3	34	34\34/38
12	5	3	14	34	34\18/34	14	3	5	12	34	34\18/34	12	5	2	15	34	34\30/34

34#				Rw	CI\P1/P2	35#				Rw	CI\P1/P2	36#				Rw	CI\P1/P2
1	16	11	6	34	34\34/30	1	16	11	6	34	34\34/18	1	16	11	6	34	34\34/18
10	7	4	13	34	34\38/34	7	10	13	4	34	34\50/34	4	13	10	7	34	34\50/34
8	9	14	3	34	34\34/38	14	3	8	9	34	34\34/50	14	3	8	9	34	34\34/50
15	2	5	12	34	34\30/34	12	5	2	15	34	34\18/34	15	2	5	12	34	34\18/34

37#				Rw	CI	P1	P2
1	16	13	4	34	34	34	18
12	9	8	5	34	34	50	42
6	7	10	11	34	34	26	42
15	2	3	14	34	34	26	34

38#				Rw	CI	P1	P2
1	16	13	4	34	34	34	26
11	6	7	10	34	34	42	34
8	9	12	5	34	34	34	42
14	3	2	15	34	34	26	34

39#				Rw	CI	P1	P2
1	16	13	4	34	34	34	26
10	7	6	11	34	34	42	34
8	9	12	5	34	34	34	42
15	2	3	14	34	34	26	34

40#				Rw	CI	P1	P2
1	16	13	4	34	34	34	18
7	10	11	6	34	34	50	34
12	5	8	9	34	34	34	50
14	3	2	15	34	34	18	34

41#				Rw	CI	P1	P2
1	16	13	4	34	34	34	24
6	9	8	11	34	34	44	30
12	7	10	5	34	34	38	48
15	2	3	14	34	34	20	34

42#				Rw	CI	P1	P2
1	16	13	4	34	34	34	18
6	11	10	7	34	34	50	34
12	5	8	9	34	34	34	50
15	2	3	14	34	34	18	34

43#				Rw	CI	P1	P2
1	15	2	16	34	34	34	25
13	10	7	4	34	34	35	44
12	3	14	5	34	34	24	33
8	6	11	9	34	34	43	34

44#				Rw	CI	P1	P2
1	15	2	16	34	34	34	26
12	10	7	5	34	34	34	42
13	3	14	4	34	34	26	34
8	6	11	9	34	34	42	34

[PD] 45#				Rw	CI	P1	P2
1	15	4	14	34	34	34	34
12	6	9	7	34	34	34	34
13	3	16	2	34	34	34	34
8	10	5	11	34	34	34	34

46#				Rw	CI	P1	P2
1	15	4	14	34	34	34	28
10	8	11	5	34	34	36	34
16	2	13	3	34	34	34	40
7	9	6	12	34	34	32	34

47#				Rw	CI	P1	P2
1	15	4	14	34	34	34	19
9	12	7	6	34	34	33	40
16	5	10	3	34	34	28	43
8	2	13	11	34	34	41	34

[PD] 48#				Rw	CI	P1	P2
1	15	4	14	34	34	34	34
8	10	5	11	34	34	34	34
13	3	16	2	34	34	34	34
12	6	9	7	34	34	34	34

49#				Rw	CI	P1	P2
1	15	4	14	34	34	34	28
6	12	7	9	34	34	36	34
16	2	13	3	34	34	34	40
11	5	10	8	34	34	32	34

[PD] 50#				Rw	CI	P1	P2
1	15	6	12	34	34	34	34
14	4	9	7	34	34	34	34
11	5	16	2	34	34	34	34
8	10	3	13	34	34	34	34

51#				Rw	CI	P1	P2
1	15	6	12	34	34	34	24
10	8	13	3	34	34	40	34
16	2	11	5	34	34	34	44
7	9	4	14	34	34	28	34

[PD] 52#				Rw	CI	P1	P2
1	15	6	12	34	34	34	34
8	10	3	13	34	34	34	34
11	5	16	2	34	34	34	34
14	4	9	7	34	34	34	34

53#				Rw	CI	P1	P2
1	15	6	12	34	34	34	24
4	14	7	9	34	34	40	34
16	2	11	5	34	34	34	44
13	3	10	8	34	34	28	34

[SC] 54#				Rw	CI	P1	P2
1	15	8	10	34	34	34	28
14	4	11	5	34	34	36	34
12	6	13	3	34	34	34	40
7	9	2	16	34	34	32	34

55#				Rw	CI	P1	P2
1	15	8	10	34	34	34	23
13	12	3	6	34	34	45	48
4	5	14	11	34	34	20	31
16	2	9	7	34	34	37	34

[SC] 56#				Rw	CI	P1	P2
1	15	8	10	34	34	34	24
12	6	13	3	34	34	40	34
14	4	11	5	34	34	34	44
7	9	2	16	34	34	28	34

57#				Rw	CI	P1	P2
1	15	8	10	34	34	34	19
11	14	5	4	34	34	49	48
6	3	12	13	34	34	20	35
16	2	9	7	34	34	33	34

58#				Rw	CI	P1	P2
1	15	8	10	34	34	34	30
6	12	3	13	34	34	38	34
11	5	14	4	34	34	34	38
16	2	9	7	34	34	30	34

59#				Rw	CI	P1	P2
1	15	8	10	34	34	34	26
4	14	5	11	34	34	42	34
13	3	12	6	34	34	34	42
16	2	9	7	34	34	26	34

[PD] 60#				Rw	CI	P1	P2
1	15	10	8	34	34	34	34
14	4	5	11	34	34	34	34
7	9	16	2	34	34	34	34
12	6	3	13	34	34	34	34

61#				Rw	CI	P1	P2
1	15	10	8	34	34	34	21
14	11	4	5	34	34	47	48
3	6	13	12	34	34	20	33
16	2	7	9	34	34	35	34

[PD] 62#				Rw	CI	P1	P2
1	15	10	8	34	34	34	34
12	6	3	13	34	34	34	34
7	9	16	2	34	34	34	34
14	4	5	11	34	34	34	34

63#				Rw	CI	P1	P2
1	15	10	8	34	34	34	17
12	13	6	3	34	34	51	48
5	4	11	14	34	34	20	37
16	2	7	9	34	34	31	34

64#				Rw	CI	P1	P2
1	15	10	8	34	34	34	16
6	12	13	3	34	34	48	34
16	2	7	9	34	34	34	52
11	5	4	14	34	34	20	34

65#				Rw	CI	P1	P2
1	15	10	8	34	34	34	30
5	11	4	14	34	34	38	30
12	6	13	3	34	34	38	42
16	2	7	9	34	34	26	34

66#				Rw	CI	P1	P2
1	15	10	8	34	34	34	13
5	14	11	4	34	34	47	36
16	3	6	9	34	34	32	53
12	2	7	13	34	34	23	34

67#	Rw	CI\P1/P2	68#	Rw	CI\P1/P2	[SC]	69#	Rw	CI\P1/P2
1 15 10 8	34	34\34/16	1 15 10 8	34	34\34/26		1 15 12 6	34	34\34/28
4 14 11 5	34	34\48/34	3 13 6 12	34	34\42/30		14 4 7 9	34	34\36/34
16 2 7 9	34	34\34/52	14 4 11 5	34	34\38/46		8 10 13 3	34	34\34/40
13 3 6 12	34	34\20/34	16 2 7 9	34	34\22/34		11 5 2 16	34	34\32/34

70#	Rw	CI\P1/P2	71#	Rw	CI\P1/P2		72#	Rw	CI\P1/P2
1 15 12 6	34	34\34/23	1 15 12 6	34	34\34/27		1 15 12 6	34	34\34/30
14 9 4 7	34	34\45/44	13 8 3 10	34	34\41/40		10 8 3 13	34	34\38/34
3 8 13 10	34	34\24/35	4 9 14 7	34	34\28/35		7 9 14 4	34	34\34/38
16 2 5 11	34	34\33/34	16 2 5 11	34	34\33/34		16 2 5 11	34	34\30/34

73#	Rw	CI\P1/P2	[SC]	74#	Rw	CI\P1/P2		75#	Rw	CI\P1/P2
1 15 12 6	34	34\34/15	1 15 12 6	34	34\34/16		1 15 12 6	34	34\34/30	
10 13 8 3	34	34\53/44	8 10 13 3	34	34\48/34		7 9 4 14	34	34\38/30	
7 4 9 14	34	34\24/43	14 4 7 9	34	34\34/52		10 8 13 3	34	34\38/42	
16 2 5 11	34	34\25/34	11 5 2 16	34	34\20/34		16 2 5 11	34	34\26/34	

76#	Rw	CI\P1/P2	77#	Rw	CI\P1/P2		78#	Rw	CI\P1/P2
1 15 12 6	34	34\34/15	1 15 12 6	34	34\34/18		1 15 12 6	34	34\34/22
7 14 9 4	34	34\53/40	4 14 9 7	34	34\50/34		3 13 8 10	34	34\46/30
10 3 8 13	34	34\28/47	13 3 8 10	34	34\34/50		14 4 9 7	34	34\38/50
16 2 5 11	34	34\21/34	16 2 5 11	34	34\18/34		16 2 5 11	34	34\18/34

[SC]	79#	Rw	CI\P1/P2	80#	Rw	CI\P1/P2		81#	Rw	CI\P1/P2
	1 15 14 4	34	34\34/24	1 15 14 4	34	34\34/21		1 15 14 4	34	34\34/25
	12 6 7 9	34	34\40/34	12 9 6 7	34	34\47/40		11 8 5 10	34	34\43/36
	8 10 11 5	34	34\34/44	5 8 11 10	34	34\28/41		6 9 12 7	34	34\32/41
	13 3 2 16	34	34\28/34	16 2 3 13	34	34\27/34		16 2 3 13	34	34\27/34

82#	Rw	CI\P1/P2	83#	Rw	CI\P1/P2	[SC]	84#	Rw	CI\P1/P2
1 15 14 4	34	34\34/26	1 15 14 4	34	34\34/17		1 15 14 4	34	34\34/16
10 8 5 11	34	34\42/34	10 11 8 5	34	34\51/40		8 10 11 5	34	34\48/34
7 9 12 6	34	34\34/42	7 6 9 12	34	34\28/45		12 6 7 9	34	34\34/52
16 2 3 13	34	34\26/34	16 2 3 13	34	34\23/34		13 3 2 16	34	34\20/34

85#	Rw	CI\P1/P2	86#	Rw	CI\P1/P2		87#	Rw	CI\P1/P2
1 15 14 4	34	34\34/26	1 15 14 4	34	34\34/17		1 15 14 4	34	34\34/18
7 9 6 12	34	34\42/30	7 12 9 6	34	34\51/36		6 12 9 7	34	34\50/34
10 8 11 5	34	34\38/46	10 5 8 11	34	34\32/49		11 5 8 10	34	34\34/50
16 2 3 13	34	34\22/34	16 2 3 13	34	34\19/34		16 2 3 13	34	34\18/34

88#	Rw	CI\P1/P2	89#	Rw	CI\P1/P2		90#	Rw	CI\P1/P2
1 15 14 4	34	34\34/22	1 14 3 16	34	34\34/26		1 14 3 16	34	34\34/26
5 11 8 10	34	34\46/30	12 9 8 5	34	34\30/38		10 11 6 7	34	34\30/38
12 6 9 7	34	34\38/50	15 4 13 2	34	34\30/38		15 4 13 2	34	34\30/38
16 2 3 13	34	34\18/34	6 7 10 11	34	34\42/34		8 5 12 9	34	34\42/34

[PD]	91#	Rw	CI\P1/P2	92#	Rw	CI\P1/P2		93#	Rw	CI\P1/P2
	1 14 4 15	34	34\34/34	1 14 4 15	34	34\34/28		1 14 4 15	34	34\34/22
	12 7 9 6	34	34\34/34	11 8 10 5	34	34\32/34		9 12 6 7	34	34\30/38
	13 2 16 3	34	34\34/34	16 3 13 2	34	34\34/40		16 5 11 2	34	34\30/42
	8 11 5 10	34	34\34/34	6 9 7 12	34	34\36/34		8 3 13 10	34	34\42/34

[PD]	94#	Rw	CI\P1/P2	95#	Rw	CI\P1/P2		96#	Rw	CI\P1/P2
	1 14 4 15	34	34\34/34	1 14 4 15	34	34\34/28		1 14 7 12	34	34\34/22
	8 11 5 10	34	34\34/34	7 12 6 9	34	34\32/34		11 8 13 2	34	34\38/34
	13 2 16 3	34	34\34/34	16 3 13 2	34	34\34/40		16 3 10 5	34	34\34/46
	12 7 9 6	34	34\34/34	10 5 11 8	34	34\36/34		6 9 4 15	34	34\30/34

97#				Rw	CI\P1/P2	98#				Rw	CI\P1/P2	[PD]	99#				Rw	CI\P1/P2
1	14	7	12	34	34\34/27	1	14	7	12	34	34\34/23	1	14	7	12	34	34\34/34	
11	13	2	8	34	34\41/44	9	15	4	6	34	34\45/44	8	11	2	13	34	34\34/34	
6	4	15	9	34	34\24/31	8	2	13	11	34	34\24/35	10	5	16	3	34	34\34/34	
16	3	10	5	34	34\37/34	16	3	10	5	34	34\33/34	15	4	9	6	34	34\34/34	

100#				Rw	CI\P1/P2	101#				Rw	CI\P1/P2	102#				Rw	CI\P1/P2
1	14	7	12	34	34\34/30	1	14	7	12	34	34\34/26	1	14	7	12	34	34\34/22
8	13	2	11	34	34\38/38	6	15	4	9	34	34\42/38	4	15	6	9	34	34\38/34
9	4	15	6	34	34\30/34	11	2	13	8	34	34\30/38	16	3	10	5	34	34\34/46
16	3	10	5	34	34\34/34	16	3	10	5	34	34\30/34	13	2	11	8	34	34\30/34

103#				Rw	CI\P1/P2	[SC]	104#				Rw	CI\P1/P2	105#				Rw	CI\P1/P2
1	14	8	11	34	34\34/26	1	14	8	11	34	34\34/22	1	14	8	11	34	34\34/20	
13	12	2	7	34	34\42/46	12	7	13	2	34	34\38/34	10	15	5	4	34	34\48/46	
4	5	15	10	34	34\22/30	15	4	10	5	34	34\34/46	7	2	12	13	34	34\22/36	
16	3	9	6	34	34\38/34	6	9	3	16	34	34\30/34	16	3	9	6	34	34\32/34	

106#				Rw	CI\P1/P2	107#				Rw	CI\P1/P2	[PD]	108#				Rw	CI\P1/P2
1	14	8	11	34	34\34/32	1	14	8	11	34	34\34/26	1	14	11	8	34	34\34/34	
7	12	2	13	34	34\36/34	4	15	5	10	34	34\42/34	12	7	2	13	34	34\34/34	
10	5	15	4	34	34\34/36	13	2	12	7	34	34\34/42	6	9	16	3	34	34\34/34	
16	3	9	6	34	34\32/34	16	3	9	6	34	34\26/34	15	4	5	10	34	34\34/34	

109#				Rw	CI\P1/P2	110#				Rw	CI\P1/P2	111#				Rw	CI\P1/P2
1	14	11	8	34	34\34/14	1	14	11	8	34	34\34/11	1	14	11	8	34	34\34/14
7	12	13	2	34	34\46/34	7	13	12	2	34	34\45/36	4	15	10	5	34	34\46/34
16	3	6	9	34	34\34/54	16	4	5	9	34	34\32/55	16	3	6	9	34	34\34/54
10	5	4	15	34	34\22/34	10	3	6	15	34	34\25/34	13	2	7	12	34	34\22/34

112#				Rw	CI\P1/P2	113#				Rw	CI\P1/P2	[SC]	114#				Rw	CI\P1/P2
1	14	12	7	34	34\34/30	1	14	12	7	34	34\34/32	1	14	12	7	34	34\34/14	
13	8	2	11	34	34\38/38	11	8	2	13	34	34\36/34	8	11	13	2	34	34\46/34	
4	9	15	6	34	34\30/34	6	9	15	4	34	34\34/36	15	4	6	9	34	34\34/54	
16	3	5	10	34	34\34/34	16	3	5	10	34	34\32/34	10	5	3	16	34	34\22/34	

115#				Rw	CI\P1/P2	116#				Rw	CI\P1/P2	[SC]	117#				Rw	CI\P1/P2
1	14	12	7	34	34\34/16	1	14	12	7	34	34\34/18	1	14	15	4	34	34\34/22	
6	15	9	4	34	34\52/38	4	15	9	6	34	34\50/34	12	7	6	9	34	34\38/34	
11	2	8	13	34	34\30/48	13	2	8	11	34	34\34/50	8	11	10	5	34	34\34/46	
16	3	5	10	34	34\20/34	16	3	5	10	34	34\18/34	13	2	3	16	34	34\30/34	

118#				Rw	CI\P1/P2	119#				Rw	CI\P1/P2	120#				Rw	CI\P1/P2
1	14	15	4	34	34\34/22	1	14	15	4	34	34\34/26	1	14	15	4	34	34\34/27
12	9	6	7	34	34\46/38	11	8	5	10	34	34\42/34	10	8	5	11	34	34\41/32
5	8	11	10	34	34\30/42	6	9	12	7	34	34\34/42	7	9	12	6	34	34\36/43
16	3	2	13	34	34\26/34	16	3	2	13	34	34\26/34	16	3	2	13	34	34\25/34

121#				Rw	CI\P1/P2	[SC]	122#				Rw	CI\P1/P2	123#				Rw	CI\P1/P2
1	14	15	4	34	34\34/18	1	14	15	4	34	34\34/14	1	14	15	4	34	34\34/27	
10	11	8	5	34	34\50/38	8	11	10	5	34	34\46/34	7	9	6	12	34	34\41/28	
7	6	9	12	34	34\30/46	12	7	6	9	34	34\34/54	10	8	11	5	34	34\40/47	
16	3	2	13	34	34\22/34	13	2	3	16	34	34\22/34	16	3	2	13	34	34\21/34	

124#				Rw	CI\P1/P2	125#				Rw	CI\P1/P2	126#				Rw	CI\P1/P2
1	14	15	4	34	34\34/18	1	14	15	4	34	34\34/19	1	14	15	4	34	34\34/23
7	12	9	6	34	34\50/34	6	12	9	7	34	34\49/32	5	11	8	10	34	34\45/28
10	5	8	11	34	34\34/50	11	5	8	10	34	34\36/51	12	6	9	7	34	34\40/51
16	3	2	13	34	34\18/34	16	3	2	13	34	34\17/34	16	3	2	13	34	34\17/34

127#				Rw	CI\P1/P2	128#				Rw	CI\P1/P2	129#				Rw	CI\P1/P2
1	13	4	16	34	34\34/32	1	13	4	16	34	34\34/30	1	13	4	16	34	34\34/32
12	8	9	5	34	34\32/34	12	8	9	5	34	34\30/34	8	12	5	9	34	34\32/34
14	2	15	3	34	34\34/36	15	3	14	2	34	34\34/38	14	2	15	3	34	34\34/36
7	11	6	10	34	34\36/34	6	10	7	11	34	34\38/34	11	7	10	6	34	34\36/34

130#				Rw	CI\P1/P2	131#				Rw	CI\P1/P2	132#				Rw	CI\P1/P2
1	13	4	16	34	34\34/30	1	13	8	12	34	34\34/24	1	13	8	12	34	34\34/22
8	12	5	9	34	34\30/34	4	16	5	9	34	34\40/34	4	16	5	9	34	34\38/34
15	3	14	2	34	34\34/38	14	2	11	7	34	34\34/44	15	3	10	6	34	34\34/46
10	6	11	7	34	34\38/34	15	3	10	6	34	34\28/34	14	2	11	7	34	34\30/34

133#				Rw	CI\P1/P2	134#				Rw	CI\P1/P2	135#				Rw	CI\P1/P2
1	13	8	12	34	34\34/26	1	13	12	8	34	34\34/17	1	13	12	8	34	34\34/34
3	15	6	10	34	34\38/30	11	14	7	2	34	34\51/44	6	10	3	15	34	34\34/26
16	2	11	5	34	34\38/46	6	3	10	15	34	34\24/41	11	7	14	2	34	34\42/42
14	4	9	7	34	34\26/34	16	4	5	9	34	34\27/34	16	4	5	9	34	34\26/34

136#				Rw	CI\P1/P2	137#				Rw	CI\P1/P2	138#				Rw	CI\P1/P2
1	13	12	8	34	34\34/16	1	13	12	8	34	34\34/14	1	13	12	8	34	34\34/18
4	16	9	5	34	34\48/34	4	16	9	5	34	34\46/34	3	15	10	6	34	34\46/30
14	2	7	11	34	34\34/52	15	3	6	10	34	34\34/54	16	2	7	9	34	34\38/54
15	3	6	10	34	34\20/34	14	2	7	11	34	34\22/34	14	4	5	11	34	34\18/34

139#				Rw	CI\P1/P2	140#				Rw	CI\P1/P2	141#				Rw	CI\P1/P2
1	13	12	8	34	34\34/26	1	13	12	8	34	34\34/24	1	13	16	4	34	34\34/24
2	14	7	11	34	34\42/26	2	14	7	11	34	34\40/26	12	8	5	9	34	34\40/34
15	3	10	6	34	34\42/50	16	4	9	5	34	34\42/52	6	10	11	7	34	34\34/44
16	4	5	9	34	34\18/34	15	3	6	10	34	34\20/34	15	3	2	14	34	34\28/34

142#				Rw	CI\P1/P2	143#				Rw	CI\P1/P2	144#				Rw	CI\P1/P2
1	13	16	4	34	34\34/22	1	13	16	4	34	34\34/18	1	13	16	4	34	34\34/16
12	8	5	9	34	34\38/34	12	10	7	5	34	34\46/38	8	12	9	5	34	34\48/34
7	11	10	6	34	34\34/46	6	8	9	11	34	34\30/46	10	6	7	11	34	34\34/52
14	2	3	15	34	34\30/34	15	3	2	14	34	34\26/34	15	3	2	14	34	34\20/34

145#				Rw	CI\P1/P2	146#				Rw	CI\P1/P2	147#				Rw	CI\P1/P2
1	13	16	4	34	34\34/14	1	13	16	4	34	34\34/24	1	12	5	16	34	34\34/22
8	12	9	5	34	34\46/34	6	10	7	11	34	34\40/26	10	13	4	7	34	34\26/38
11	7	6	10	34	34\34/54	12	8	9	5	34	34\42/52	15	6	11	2	34	34\30/42
14	2	3	15	34	34\22/34	15	3	2	14	34	34\20/34	8	3	14	9	34	34\46/34

[PD]	148#				Rw	CI\P1/P2	149#				Rw	CI\P1/P2	[PD]	150#				Rw	CI\P1/P2
	1	12	6	15	34	34\34/34	1	12	6	15	34	34\34/24		1	12	7	14	34	34\34/34
	8	13	3	10	34	34\34/34	7	14	4	9	34	34\28/34		8	13	2	11	34	34\34/34
	11	2	16	5	34	34\34/34	16	5	11	2	34	34\34/44		10	3	16	5	34	34\34/34
	14	7	9	4	34	34\34/34	10	3	13	8	34	34\40/34		15	6	9	4	34	34\34/34

151#				Rw	CI\P1/P2	152#				Rw	CI\P1/P2	153#				Rw	CI\P1/P2
1	12	7	14	34	34\34/22	1	12	8	13	34	34\34/28	1	12	8	13	34	34\34/26
6	15	4	9	34	34\30/34	11	14	2	7	34	34\40/42	10	15	3	6	34	34\42/42
16	5	10	3	34	34\34/46	6	3	15	10	34	34\26/32	7	2	14	11	34	34\26/34
11	2	13	8	34	34\38/34	16	5	9	4	34	34\36/34	16	5	9	4	34	34\34/34

154#				Rw	CI\P1/P2	155#				Rw	CI\P1/P2	156#				Rw	CI\P1/P2
1	12	8	13	34	34\34/32	1	12	8	13	34	34\34/30	1	12	13	8	34	34\34/18
7	14	2	11	34	34\36/34	6	15	3	10	34	34\38/34	11	14	7	2	34	34\50/42
10	3	15	6	34	34\34/36	11	2	14	7	34	34\34/38	6	3	10	15	34	34\26/42
16	5	9	4	34	34\32/34	16	5	9	4	34	34\30/34	16	5	4	9	34	34\26/34

157#					158#					159#															
Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2												
1	12	13	8	34	34	34	34	10		1	12	13	8	34	34	34	34	10							
7	14	11	2	34	34	42	34		6	10	3	15	34	34	33	24		6	15	10	3	34	34	42	34
16	5	4	9	34	34	34	58		11	7	14	2	34	34	44	43		16	5	4	9	34	34	34	58
10	3	6	15	34	34	26	34		16	5	4	9	34	34	25	34		11	2	7	14	34	34	26	34

160#					161#					162#															
Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2												
1	12	13	8	34	34	34	19		1	12	13	8	34	34	34	27		1	12	14	7	34	34	34	34
3	15	10	6	34	34	45	28		2	14	7	11	34	34	41	24		11	8	2	13	34	34	34	30
16	2	7	9	34	34	40	55		15	3	10	6	34	34	44	51		6	9	15	4	34	34	38	38
14	5	4	11	34	34	17	34		16	5	4	9	34	34	17	34		16	5	3	10	34	34	30	34

[SC] 163#					164#					165#															
Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2												
1	12	14	7	34	34	34	10		1	12	14	7	34	34	34	18		1	12	14	7	34	34	34	20
8	13	11	2	34	34	42	34		6	15	9	4	34	34	50	34		4	15	9	6	34	34	48	30
15	6	4	9	34	34	34	58		11	2	8	13	34	34	34	50		13	2	8	11	34	34	38	52
10	3	5	16	34	34	26	34		16	5	3	10	34	34	18	34		16	5	3	10	34	34	16	34

166#					167#					[SC] 168#															
Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2												
1	12	15	6	34	34	34	33		1	12	15	6	34	34	34	18		1	12	15	6	34	34	34	10
10	8	3	13	34	34	35	28		10	13	8	3	34	34	50	38		8	13	10	3	34	34	42	34
7	9	14	4	34	34	40	41		7	4	9	14	34	34	30	46		14	7	4	9	34	34	34	58
16	5	2	11	34	34	27	34		16	5	2	11	34	34	22	34		11	2	5	16	34	34	26	34

169#					170#					171#															
Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2												
1	12	15	6	34	34	34	33		1	12	15	6	34	34	34	18		1	12	15	6	34	34	34	21
7	9	4	14	34	34	35	24		7	14	9	4	34	34	50	34		4	14	9	7	34	34	47	28
10	8	13	3	34	34	44	45		10	3	8	13	34	34	34	50		13	3	8	10	34	34	40	53
16	5	2	11	34	34	23	34		16	5	2	11	34	34	18	34		16	5	2	11	34	34	15	34

172#					173#					174#															
Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2												
1	12	15	6	34	34	34	25		1	11	6	16	34	34	34	32		1	11	6	16	34	34	34	26
3	13	8	10	34	34	43	24		8	14	3	9	34	34	32	34		8	14	3	9	34	34	26	34
14	4	9	7	34	34	44	53		12	2	15	5	34	34	34	36		15	5	12	2	34	34	34	42
16	5	2	11	34	34	15	34		13	7	10	4	34	34	36	34		10	4	13	7	34	34	42	34

175#					176#					177#															
Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2												
1	11	6	16	34	34	34	34		1	11	8	14	34	34	34	28		1	11	8	14	34	34	34	22
7	13	4	10	34	34	30	30		6	16	3	9	34	34	36	34		6	16	3	9	34	34	30	34
14	2	15	3	34	34	38	38		12	2	13	7	34	34	34	40		15	5	10	4	34	34	34	46
12	8	9	5	34	34	34	34		15	5	10	4	34	34	32	34		12	2	13	7	34	34	38	34

178#					179#					180#															
Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2												
1	11	14	8	34	34	34	14		1	11	14	8	34	34	34	16		1	11	14	8	34	34	34	10
7	13	12	2	34	34	42	30		6	16	9	3	34	34	48	34		6	16	9	3	34	34	42	34
16	4	5	9	34	34	38	58		12	2	7	13	34	34	34	52		15	5	4	10	34	34	34	58
10	6	3	15	34	34	22	34		15	5	4	10	34	34	20	34		12	2	7	13	34	34	26	34

181#					182#					183#															
Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2												
1	11	16	6	34	34	34	16		1	11	16	6	34	34	34	10		1	10	7	16	34	34	34	30
8	14	9	3	34	34	48	34		8	14	9	3	34	34	42	34		8	15	2	9	34	34	30	34
10	4	7	13	34	34	34	52		13	7	4	10	34	34	34	58		12	3	14	5	34	34	34	38
15	5	2	12	34	34	20	34		12	2	5	15	34	34	26	34		13	6	11	4	34	34	38	34

184#					185#					186#															
Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2		Rw	CI	P1	P2												
1	10	7	16	34	34	34	26		1	10	8	15	34	34	34	28		1	10	8	15	34	34	34	24
8	15	2	9	34	34	26	34		7	16	2	9	34	34	32	34		7	16	2	9	34	34	28	34
14	5	12	3	34	34	34	42		12	3	13	6	34	34	34	40		14	5	11	4	34	34	34	44
11	4	13	6	34	34	42	34		14	5	11	4	34	34	36	34		12	3	13	6	34	34	40	34

187#					Rw	CI	P1	P2	188#					Rw	CI	P1	P2	189#					Rw	CI	P1	P2
1	10	8	15	34	34	34	34	32	1	10	15	8	34	34	34	14	1	10	15	8	34	34	34	10		
5	14	4	11	34	34	28	26		7	16	9	2	34	34	46	34	7	16	9	2	34	34	42	34		
16	3	13	2	34	34	42	44		12	3	6	13	34	34	34	54	14	5	4	11	34	34	34	58		
12	7	9	6	34	34	32	34		14	5	4	11	34	34	22	34	12	3	6	13	34	34	26	34		

190#					Rw	CI	P1	P2	191#					Rw	CI	P1	P2	192#					Rw	CI	P1	P2
1	10	15	8	34	34	34	35		1	10	15	8	34	34	34	18	1	10	15	8	34	34	34	31		
5	11	4	14	34	34	33	20		5	14	11	4	34	34	42	26	3	13	6	12	34	34	37	20		
12	6	13	3	34	34	48	47		16	3	6	9	34	34	42	58	14	4	11	5	34	34	48	51		
16	7	2	9	34	34	21	34		12	7	2	13	34	34	18	34	16	7	2	9	34	34	17	34		

193#					Rw	CI	P1	P2	194#					Rw	CI	P1	P2	195#					Rw	CI	P1	P2
1	10	16	7	34	34	34	14		1	10	16	7	34	34	34	10	1	9	8	16	34	34	34	30		
8	15	9	2	34	34	46	34		8	15	9	2	34	34	42	34	7	15	2	10	34	34	26	30		
11	4	6	13	34	34	34	54		13	6	4	11	34	34	34	58	14	4	13	3	34	34	38	42		
14	5	3	12	34	34	22	34		12	3	5	14	34	34	26	34	12	6	11	5	34	34	38	34		

196#					Rw	CI	P1	P2	197#					Rw	CI	P1	P2	198#					Rw	CI	P1	P2
1	9	16	8	34	34	34	14		1	9	16	8	34	34	34	32	1	9	16	8	34	34	34	30		
7	15	10	2	34	34	42	30		4	12	5	13	34	34	32	18	4	12	5	13	34	34	30	18		
14	4	5	11	34	34	38	58		14	6	11	3	34	34	50	52	15	7	10	2	34	34	50	54		
12	6	3	13	34	34	22	34		15	7	2	10	34	34	20	34	14	6	3	11	34	34	22	34		

199#					Rw	CI	P1	P2	200#					Rw	CI	P1	P2	201#					Rw	CI	P1	P2
1	8	9	16	34	34	34	37		1	8	10	15	34	34	34	34	1	8	12	13	34	34	34	36		
7	13	4	10	34	34	27	24		5	14	4	11	34	34	26	22	7	14	2	11	34	34	32	26		
14	2	15	3	34	34	44	41		16	3	13	2	34	34	46	46	10	3	15	6	34	34	42	40		
12	11	6	5	34	34	31	34		12	9	7	6	34	34	30	34	16	9	5	4	34	34	28	34		

202#					Rw	CI	P1	P2	203#					Rw	CI	P1	P2	204#					Rw	CI	P1	P2
1	8	12	13	34	34	34	34		1	8	13	12	34	34	34	31	1	8	14	11	34	34	34	38		
6	15	3	10	34	34	34	26		3	15	6	10	34	34	33	20	7	12	2	13	34	34	30	22		
11	2	14	7	34	34	42	42		16	2	11	5	34	34	48	51	10	5	15	4	34	34	46	42		
16	9	5	4	34	34	26	34		14	9	4	7	34	34	21	34	16	9	3	6	34	34	26	34		

205#					Rw	CI	P1	P2	206#					Rw	CI	P1	P2	207#					Rw	CI	P1	P2
1	8	14	11	34	34	34	32		1	8	15	10	34	34	34	37	1	8	15	10	34	34	34	33		
4	15	5	10	34	34	36	22		6	12	3	13	34	34	31	20	4	14	5	11	34	34	35	20		
13	2	12	7	34	34	46	48		11	5	14	4	34	34	48	45	13	3	12	6	34	34	48	49		
16	9	3	6	34	34	20	34		16	9	2	7	34	34	23	34	16	9	2	7	34	34	19	34		

208#					Rw	CI	P1	P2	209#					Rw	CI	P1	P2	253#					Rw	CI	P1	P2
1	7	14	12	34	34	34	33		2	16	1	15	34	34	34	23	2	15	1	16	34	34	34	26		
6	15	4	9	34	34	35	24		14	9	8	3	34	34	37	48	11	10	8	5	34	34	34	42		
11	2	13	8	34	34	44	45		11	4	13	6	34	34	20	31	14	3	13	4	34	34	26	34		
16	10	3	5	34	34	23	34		7	5	12	10	34	34	45	34	7	6	12	9	34	34	42	34		

291#					Rw	CI	P1	P2	318#					Rw	CI	P1	P2	347#					Rw	CI	P1	P2
2	14	3	15	34	34	34	34		2	13	3	16	34	34	34	32	2	12	5	15	34	34	34	39		
13	7	10	4	34	34	38	38		12	7	9	6	34	34	28	34	11	6	9	8	34	34	29	28		
11	1	16	6	34	34	30	30		15	4	14	1	34	34	34	36	14	3	16	1	34	34	40	35		
8	12	5	9	34	34	34	34		5	10	8	11	34	34	40	34	7	13	4	10	34	34	33	34		

360#					Rw	CI	P1	P2	382#					Rw	CI	P1	P2	386#					Rw	CI	P1	P2
2	11	5	16	34	34	34	28		2	10	7	15	34	34	34	26	2	9	7	16	34	34	34	32		
8	13	3	10	34	34	24	34		8	16	1	9	34	34	30	38	8	15	1	10	34	34	28	34		
15	6	12	1	34	34	34	40		11	5	12	6	34	34	30	38	11	4	14	5	34	34	34	36		
9	4	14	7	34	34	44	34		13	3	14	4	34	34	42	34	13	6	12	3	34	34	40	34		

397# Rw CI\P1/P2	403# Rw CI\P1/P2	408# Rw CI\P1/P2
2 8 9 15 34 34\34/43	2 7 9 16 34 34\34/38	2 5 16 11 34 34\34/33
7 10 5 12 34 34\25/20	6 13 3 12 34 34\22/22	4 14 7 9 34 34\31/16
14 3 16 1 34 34\48/39	15 4 14 1 34 34\46/42	15 3 10 6 34 34\52/53
11 13 4 6 34 34\29/34	11 10 8 5 34 34\34/34	13 12 1 8 34 34\19/34

409# Rw CI\P1/P2	447# Rw CI\P1/P2	472# Rw CI\P1/P2
3 16 1 14 34 34\34/34	3 15 2 14 34 34\34/37	3 14 1 16 34 34\34/33
12 5 10 7 34 34\34/38	13 4 9 8 34 34\31/36	13 7 10 4 34 34\35/40
13 4 15 2 34 34\30/30	12 5 16 1 34 34\32/29	12 2 15 5 34 34\28/29
6 9 8 11 34 34\38/34	6 10 7 11 34 34\39/34	6 11 8 9 34 34\39/34

498# Rw CI\P1/P2	525# Rw CI\P1/P2	539# Rw CI\P1/P2
3 13 2 16 34 34\34/36	3 12 5 14 34 34\34/41	3 11 14 6 34 34\34/38
12 6 9 7 34 34\28/34	10 6 11 7 34 34\35/28	2 10 7 15 34 34\38/18
14 4 15 1 34 34\34/32	13 1 16 4 34 34\40/33	13 5 12 4 34 34\50/46
5 11 8 10 34 34\40/34	8 15 2 9 34 34\27/34	16 8 1 9 34 34\14/34

541# Rw CI\P1/P2	556# Rw CI\P1/P2	563# Rw CI\P1/P2
3 10 5 16 34 34\34/30	3 9 6 16 34 34\34/30	3 8 9 14 34 34\34/45
8 13 2 11 34 34\22/34	8 14 1 11 34 34\22/34	6 10 7 11 34 34\31/20
14 7 12 1 34 34\34/38	13 7 12 2 34 34\34/38	13 1 16 4 34 34\48/37
9 4 15 6 34 34\46/34	10 4 15 5 34 34\46/34	12 15 2 5 34 34\23/34

568# Rw CI\P1/P2	569# Rw CI\P1/P2	575# Rw CI\P1/P2
3 7 14 10 34 34\34/38	3 6 13 12 34 34\34/33	4 16 1 13 34 34\34/30
2 12 5 15 34 34\26/14	2 16 7 9 34 34\35/20	15 5 12 2 34 34\42/46
16 6 11 1 34 34\54/50	15 1 10 8 34 34\48/49	9 3 14 8 34 34\22/26
13 9 4 8 34 34\22/34	14 11 4 5 34 34\19/34	6 10 7 11 34 34\38/34

606# Rw CI\P1/P2	646# Rw CI\P1/P2	678# Rw CI\P1/P2
4 15 1 14 34 34\34/18	4 14 1 15 34 34\34/18	4 13 1 16 34 34\34/38
13 10 8 3 34 34\34/50	13 11 8 2 34 34\34/50	11 6 10 7 34 34\30/34
12 7 9 6 34 34\18/34	12 6 9 7 34 34\18/34	14 3 15 2 34 34\34/30
5 2 16 11 34 34\50/34	5 3 16 10 34 34\50/34	5 12 8 9 34 34\38/34

701# Rw CI\P1/P2	704# Rw CI\P1/P2	716# Rw CI\P1/P2
4 12 5 13 34 34\34/45	4 11 5 14 34 34\34/28	4 10 5 15 34 34\34/30
7 6 11 10 34 34\35/24	6 13 3 12 34 34\24/34	7 13 2 12 34 34\22/34
14 1 16 3 34 34\44/33	15 8 10 1 34 34\34/40	14 8 11 1 34 34\34/38
9 15 2 8 34 34\23/34	9 2 16 7 34 34\44/34	9 3 16 6 34 34\46/34

728# Rw CI\P1/P2	739# Rw CI\P1/P2	740# Rw CI\P1/P2
4 9 6 15 34 34\34/30	4 8 13 9 34 34\34/42	4 7 10 13 34 34\34/47
7 14 1 12 34 34\22/34	1 11 6 16 34 34\30/14	5 9 8 12 34 34\29/16
13 8 11 2 34 34\34/38	15 5 12 2 34 34\54/46	14 2 15 3 34 34\52/39
10 3 16 5 34 34\46/34	14 10 3 7 34 34\18/34	11 16 1 6 34 34\21/34

744# Rw CI\P1/P2	748# Rw CI\P1/P2	753# Rw CI\P1/P2
4 6 11 13 34 34\34/46	4 5 14 11 34 34\34/31	5 16 1 12 34 34\34/34
5 9 8 12 34 34\26/14	2 16 9 7 34 34\37/20	8 9 4 13 34 34\34/42
15 3 14 2 34 34\54/42	15 1 8 10 34 34\48/51	10 7 14 3 34 34\26/26
10 16 1 7 34 34\22/34	13 12 3 6 34 34\17/34	11 2 15 6 34 34\42/34

773# Rw CI\P1/P2	783# Rw CI\P1/P2	791# Rw CI\P1/P2
5 15 2 12 34 34\34/26	5 14 3 12 34 34\34/42	5 13 4 12 34 34\34/16
14 10 3 7 34 34\38/54	11 4 13 6 34 34\42/34	8 16 9 1 34 34\48/50
4 8 13 9 34 34\14/22	10 1 16 7 34 34\34/26	10 2 7 15 34 34\18/36
11 1 16 6 34 34\50/34	8 15 2 9 34 34\26/34	11 3 14 6 34 34\36/34

793# Rw CI\P1/P2	795# Rw CI\P1/P2	800# Rw CI\P1/P2
5 12 9 8 34 34\34/18	5 11 6 12 34 34\34/30	5 10 8 11 34 34\34/50
3 14 15 2 34 34\50/34	3 13 4 14 34 34\26/30	4 7 9 14 34 34\34/18
16 1 4 13 34 34\34/50	16 8 9 1 34 34\38/42	13 2 16 3 34 34\50/34
10 7 6 11 34 34\18/34	10 2 15 7 34 34\38/34	12 15 1 6 34 34\18/34

805# Rw CI\P1/P2	807# Rw CI\P1/P2	810# Rw CI\P1/P2
5 9 12 8 34 34\34/16	5 8 10 11 34 34\34/26	5 6 11 12 34 34\34/47
4 16 13 1 34 34\48/34	3 16 2 13 34 34\26/30	3 9 8 14 34 34\25/12
14 2 3 15 34 34\34/52	14 9 7 4 34 34\38/46	16 4 13 1 34 34\56/43
11 7 6 10 34 34\20/34	12 1 15 6 34 34\38/34	10 15 2 7 34 34\21/34

811# Rw CI\P1/P2	816# Rw CI\P1/P2	817# Rw CI\P1/P2
5 4 13 12 34 34\34/34	5 3 16 10 34 34\34/39	6 16 1 11 34 34\34/24
3 14 11 6 34 34\34/18	2 13 8 11 34 34\29/12	15 9 8 2 34 34\48/58
16 1 8 9 34 34\50/50	15 4 9 6 34 34\56/51	3 5 12 14 34 34\10/20
10 15 2 7 34 34\18/34	12 14 1 7 34 34\17/34	10 4 13 7 34 34\44/34

825# Rw CI\P1/P2	838# Rw CI\P1/P2	841# Rw CI\P1/P2
6 15 1 12 34 34\34/44	6 14 3 11 34 34\34/42	6 13 3 12 34 34\34/42
10 3 13 8 34 34\40/34	12 4 13 5 34 34\46/38	11 4 14 5 34 34\42/34
11 2 16 5 34 34\34/24	7 1 16 10 34 34\30/22	10 1 15 8 34 34\34/26
7 14 4 9 34 34\28/34	9 15 2 8 34 34\26/34	7 16 2 9 34 34\26/34

846# Rw CI\P1/P2	852# Rw CI\P1/P2	854# Rw CI\P1/P2
6 12 7 9 34 34\34/50	6 11 10 7 34 34\34/18	6 10 11 7 34 34\34/20
3 5 10 16 34 34\34/18	4 13 16 1 34 34\50/34	3 15 14 2 34 34\52/34
14 4 15 1 34 34\50/34	15 2 3 14 34 34\34/50	13 1 4 16 34 34\34/48
11 13 2 8 34 34\18/34	9 8 5 12 34 34\18/34	12 8 5 9 34 34\16/34

856# Rw CI\P1/P2	859# Rw CI\P1/P2	862# Rw CI\P1/P2
6 9 12 7 34 34\34/18	6 7 12 9 34 34\34/22	6 4 13 11 34 34\34/48
4 15 14 1 34 34\50/34	3 16 13 2 34 34\46/30	3 9 8 14 34 34\24/10
13 2 3 16 34 34\34/50	14 1 4 15 34 34\38/50	15 5 12 2 34 34\58/44
11 8 5 10 34 34\18/34	11 10 5 8 34 34\18/34	10 16 1 7 34 34\20/34

864# Rw CI\P1/P2	865# Rw CI\P1/P2	869# Rw CI\P1/P2
6 3 15 10 34 34\34/42	7 16 1 10 34 34\34/36	7 15 2 10 34 34\34/32
1 12 8 13 34 34\26/10	12 5 4 13 34 34\32/46	14 6 3 11 34 34\32/50
16 5 9 4 34 34\58/50	6 11 14 3 34 34\22/20	4 12 13 5 34 34\18/20
11 14 2 7 34 34\18/34	9 2 15 8 34 34\48/34	9 1 16 8 34 34\52/34

871# Rw CI\P1/P2	874# Rw CI\P1/P2	876# Rw CI\P1/P2
7 14 4 9 34 34\34/44	7 12 5 10 34 34\34/20	7 11 6 10 34 34\34/16
12 3 13 6 34 34\48/38	2 15 14 3 34 34\48/38	4 16 13 1 34 34\48/42
5 2 16 11 34 34\30/20	16 1 4 13 34 34\30/44	14 2 3 15 34 34\26/44
10 15 1 8 34 34\24/34	9 6 11 8 34 34\24/34	9 5 12 8 34 34\28/34

877# Rw CI\P1/P2	879# Rw CI\P1/P2	880# Rw CI\P1/P2
7 6 11 10 34 34\34/26	7 5 12 10 34 34\34/22	7 4 14 9 34 34\34/34
2 15 14 3 34 34\42/26	4 16 13 1 34 34\42/30	2 13 3 16 34 34\18/18
16 1 4 13 34 34\42/50	14 2 3 15 34 34\38/50	15 12 6 1 34 34\50/50
9 12 5 8 34 34\18/34	9 11 6 8 34 34\22/34	10 5 11 8 34 34\34/34

(記号の意味 : [SC]:補数対称型; [PD]:汎対角線型)
 [解の総数 = 880; 各タイプの総数: 48/SC, 48/PD, 880/ST]

** Calculated and Listed by Kanji Setsuda
 on Aug. 15, 2013 with MacOSX 10.8.4 & Xcode 4.6.3 **

こんなに解が多いと、珍しさは減少する。方陣愛好者は、もう少し珍しい「補数対称型」や「汎対角線型」の四方陣を作りたくなる。

2. 補数対称型四方陣では、さらに次の各式もまた同時に成り立たなければならない。

$$\begin{aligned} n_1+n_{16}=n_2+n_{15}=n_3+n_{14}=n_4+n_{13} &= \\ n_5+n_{12}=n_6+n_{11}=n_7+n_{10}=n_8+n_9 &= CC \quad \dots (12) \\ (9), (12) \text{ から } (n_1+n_{16}) + (n_6+n_{11}) &= C \\ CC + CC &= C = 34 \\ \therefore CC &= 17 \quad \dots (13) \end{aligned}$$

(12)式に含まれる8組のペアのことを、「17の補数」と言う。

これだけの準備をしておいて、さらに何が言い得るかを検討しよう。

(12)の各式は、組み合わせ方によって、様々な等式を生む。例えば、

$$\begin{aligned} n_1+n_{16}=n_2+n_{15}=17 \text{ から, } n_1+n_2+n_{15}+n_{16} &= 34 \\ \text{これを(1)式と比較すれば, } n_3+n_4=n_{15}+n_{16} &\dots (14) \\ (4) \text{式と比較すれば, } n_1+n_2=n_{13}+n_{14} &\dots (15) \\ n_1+n_{16}=n_5+n_{12}=17 \text{ から, } n_1+n_5+n_{12}+n_{16} &= 34 \\ \text{これを(5)式と比較すれば, } n_9+n_{13}=n_{12}+n_{16} &\dots (16) \\ (8) \text{式と比較すれば, } n_1+n_5=n_4+n_8 &\dots (17) \\ n_1+n_{16}=n_4+n_{13}=17 \text{ から, } n_1+n_4+n_{13}+n_{16} &= 34 \\ \text{これを(1)式と比較すれば, } n_2+n_3=n_{13}+n_{16} &\dots (18) \\ (4) \text{式と比較すれば, } n_1+n_4=n_{14}+n_{15} &\dots (19) \\ (5) \text{式と比較すれば, } n_5+n_9=n_4+n_{16} &\dots (20) \\ (8) \text{式と比較すれば, } n_1+n_{13}=n_8+n_{12} &\dots (21) \\ n_6+n_{11}=n_7+n_{10}=17 \text{ から, } n_6+n_7+n_{10}+n_{11} &= 34 \\ \text{これを(2)式と比較すれば, } n_5+n_8=n_{10}+n_{11} &\dots (22) \\ (3) \text{式と比較すれば, } n_6+n_7=n_9+n_{12} &\dots (23) \\ (6) \text{式と比較すれば, } n_2+n_{14}=n_7+n_{11} &\dots (24) \\ (7) \text{式と比較すれば, } n_3+n_{15}=n_6+n_{10} &\dots (25) \\ \dots \end{aligned}$$

また(1)+(2)+(5)+(6)

$$\begin{aligned} n_1+n_2+n_3+n_4 &= 34 \quad \dots (1) \\ n_5+n_6+n_7+n_8 &= 34 \quad \dots (2) \\ n_1+n_5+n_9+n_{13} &= 34 \quad \dots (5) \\ +) n_2+n_6+n_{10}+n_{14} &= 34 \quad \dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 * \{n_1+n_2+n_5+n_6\} + \{n_3+n_{14}\} + \{n_4+n_{13}\} + \{n_7+n_{10}\} + \{n_8+n_9\} &= 136 \\ 2 * \{n_1+n_2+n_5+n_6\} + 17 + 17 + 17 + 17 &= 136 \end{aligned}$$

ゆえに $n_1+n_2+n_5+n_6=34 \quad \dots (26)$

同様に(1)+(2)+(7)+(8)

$$\begin{aligned} n_1+n_2+n_3+n_4 &= 34 \quad \dots (1) \\ n_5+n_6+n_7+n_8 &= 34 \quad \dots (2) \\ n_3+n_7+n_{11}+n_{15} &= 34 \quad \dots (7) \\ +) n_4+n_8+n_{12}+n_{16} &= 34 \quad \dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 * \{n_3+n_4+n_7+n_8\} + \{n_1+n_{16}\} + \{n_2+n_{15}\} + \{n_5+n_{12}\} + \{n_6+n_{11}\} &= 136 \\ \text{ゆえに } n_3+n_4+n_7+n_8 &= 34 \quad \dots (27) \end{aligned}$$

同様に $n_9+n_{10}+n_{13}+n_{14}=34 \quad \dots (28)$

$n_{11}+n_{12}+n_{15}+n_{16}=34 \quad \dots (29)$

かくして下図の4つの2×2の正方形ブロック内の4数の定和がわかった。

これらと(1)～(4)式とを比較すると、

(1)と(26)から, $n_3+n_4=n_5+n_6 \quad \dots (30)$

(3)と(28)から, $n_9+n_{10}=n_{15}+n_{16} \quad \dots (31) \downarrow$

n1	n2	n3	n4	$n1+n2+n5+n6=34$... (26)
n5	n6	n7	n8	$n3+n4+n7+n8=34$... (27)
n9	10	11	12	$n9+n10+n13+n14=34$... (28)
13	14	15	16	$n11+n12+n15+n16=34$... (29)

↓ (14)から, $n3+n4=n5+n6=n9+n10=n15+n16$... (32)

(1)と(27)から, $n1+n2=n7+n8$... (33)

(3)と(29)から, $n11+n12=n13+n14$... (34)

(15)から, $n1+n2=n7+n8=n11+n12=n13+n14$... (35)

同様にして

$n1+n5=n10+n14=n11+n15=n4+n8$... (36)

$n9+n13=n2+n6=n3+n7=n12+n16$... (37)

など, 面白い関係がわかってくる。

なお, これらの性質は, 補数対称四方陣に内在するものであって, 外から新たに加えられた特別な条件ではない。だから, 基本条件を仮定した上で, あらためてこれらを条件に加えて対称四方陣の解を求めてみても, 解が少なくなるわけでは決してない。出て来る解は, 普通の対称四方陣のみ。解の総数も同じである。

ただし, これ(特に(26)式など)を知っていて使うと, 解が速く求まる。無駄な探索をしないで済む。時間短縮に役立つのである。

次は, 方陣内部のどの行列が交換可能かを調べよう。

対称四方陣では, 縦横とも内側の2列/2行は交換可能である。

00/ → 01/

1	2	3	4	1	3	2	4
5	6	7	8	5	7	6	8
9	10	11	12	9	11	10	12
13	14	15	16	13	15	14	16

↓ * *

10/ → 11/

1	2	3	4	1	3	2	4
9	10	11	12	9	11	10	12
5	6	7	8	5	7	6	8
13	14	15	16	13	15	14	16

* *

交換すると, 別の方陣にはなるが, 対称四方陣であることには変わりがない。そういう場所は他にどこにあるであろうか。

外側どうしの交換も可能である。交換すると, 別の方陣にはなるが, 対称四方陣であることには変わりがない。

00/		01/					
1	2	3	4	4	2	3	1
5	6	7	8	8	6	7	5
9	10	11	12	12	10	11	9
13	14	15	16	16	14	15	13

↓ ↓

10/		11/						
13	14	15	16	→	16	14	15	13
5	6	7	8		8	6	7	5
9	10	11	12		12	10	11	9
1	2	3	4		4	2	3	1

ただし、出来る方陣の内容は、内側の時と変わらない。ただ反転したり回転しているだけで、全然別の対称四方陣を作るわけではない。だから、内側か外側のどちらかを交換するだけで良い。両方採用する意味は無い。

内を外へ、外を内へ2行/2列をそっくり交換することもできる。

00/	→	02/																																
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>10</td><td>9</td><td>12</td><td>11</td></tr> <tr><td>14</td><td>13</td><td>16</td><td>15</td></tr> </table>	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15
1	2	3	4																															
5	6	7	8																															
9	10	11	12																															
13	14	15	16																															
2	1	4	3																															
6	5	8	7																															
10	9	12	11																															
14	13	16	15																															
↓	→	↓																																
20/		22/																																
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> </table>	5	6	7	8	1	2	3	4	13	14	15	16	9	10	11	12		<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>6</td><td>5</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>14</td><td>13</td><td>16</td><td>15</td></tr> <tr><td>10</td><td>9</td><td>12</td><td>11</td></tr> </table>	6	5	8	7	2	1	4	3	14	13	16	15	10	9	12	11
5	6	7	8																															
1	2	3	4																															
13	14	15	16																															
9	10	11	12																															
6	5	8	7																															
2	1	4	3																															
14	13	16	15																															
10	9	12	11																															

以上の2種類の交換を混合・連続して実行してもよい。列についても行についても交換できるから、自分自身を残す「無変換」の場合も加えて、下図のごとく4×4通りの場合が可能となる。いずれの場合でも、対称四方陣の条件を完全に満たしている。

00/	01/	02/	03/																																																																
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>7</td><td>6</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>11</td><td>10</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>15</td><td>14</td><td>16</td></tr> </table>	1	3	2	4	5	7	6	8	9	11	10	12	13	15	14	16	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>10</td><td>9</td><td>12</td><td>11</td></tr> <tr><td>14</td><td>13</td><td>16</td><td>15</td></tr> </table>	2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>8</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>10</td><td>12</td><td>9</td><td>11</td></tr> <tr><td>14</td><td>16</td><td>13</td><td>15</td></tr> </table>	2	4	1	3	6	8	5	7	10	12	9	11	14	16	13	15
1	2	3	4																																																																
5	6	7	8																																																																
9	10	11	12																																																																
13	14	15	16																																																																
1	3	2	4																																																																
5	7	6	8																																																																
9	11	10	12																																																																
13	15	14	16																																																																
2	1	4	3																																																																
6	5	8	7																																																																
10	9	12	11																																																																
14	13	16	15																																																																
2	4	1	3																																																																
6	8	5	7																																																																
10	12	9	11																																																																
14	16	13	15																																																																
10/	11/	12/	13/																																																																
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr> </table>	1	2	3	4	9	10	11	12	5	6	7	8	13	14	15	16	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>9</td><td>11</td><td>10</td><td>12</td></tr> <tr><td>5</td><td>7</td><td>6</td><td>8</td></tr> <tr><td>13</td><td>15</td><td>14</td><td>16</td></tr> </table>	1	3	2	4	9	11	10	12	5	7	6	8	13	15	14	16	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>4</td><td>3</td></tr> <tr><td>10</td><td>9</td><td>12</td><td>11</td></tr> <tr><td>6</td><td>5</td><td>8</td><td>7</td></tr> <tr><td>14</td><td>13</td><td>16</td><td>15</td></tr> </table>	2	1	4	3	10	9	12	11	6	5	8	7	14	13	16	15	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>2</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td></tr> <tr><td>10</td><td>12</td><td>9</td><td>11</td></tr> <tr><td>6</td><td>8</td><td>5</td><td>7</td></tr> <tr><td>14</td><td>16</td><td>13</td><td>15</td></tr> </table>	2	4	1	3	10	12	9	11	6	8	5	7	14	16	13	15
1	2	3	4																																																																
9	10	11	12																																																																
5	6	7	8																																																																
13	14	15	16																																																																
1	3	2	4																																																																
9	11	10	12																																																																
5	7	6	8																																																																
13	15	14	16																																																																
2	1	4	3																																																																
10	9	12	11																																																																
6	5	8	7																																																																
14	13	16	15																																																																
2	4	1	3																																																																
10	12	9	11																																																																
6	8	5	7																																																																
14	16	13	15																																																																

20/ 5 6 7 8 1 2 3 4 13 14 15 16 9 10 11 12	21/ 5 7 6 8 1 3 2 4 13 15 14 16 9 11 10 12	22/ 6 5 8 7 2 1 4 3 14 13 16 15 10 9 12 11	23/ 6 8 5 7 2 4 1 3 14 16 13 15 10 12 9 11
30/ 5 6 7 8 13 14 15 16 1 2 3 4 9 10 11 12	31/ 5 7 6 8 13 15 14 16 1 3 2 4 9 11 10 12	32/ 6 5 8 7 14 13 16 15 2 1 4 3 10 9 12 11	33/ 6 8 5 7 14 16 13 15 2 4 1 3 10 12 9 11

(以上の図の数値は、ポジションを表わす。)

交換によって形は変わるが、n1に注目すれば、縦横の4数 {n1, n2, n3, n4}, {n1, n5, n9, n13} のメンバーは、座る順番が変わっているとはいえ、顔ぶれは変わっていない。これらは本来、1つの解の異なった表現と見ることができる。

1個の原形から出来る派生形は全部で15通りあり、原形も加えると16個になる。さらに単純な反転や回転によっても形が変わる。その変わり方は、1個についてそれぞれ8通り（自分自身を含む）ある。全部で $16 \times 8 = 128$ 通りの変化がある。

* 反転と回転による変形（8通り）*

00/ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16	→	01/ 13 9 5 1 14 10 6 2 15 11 7 3 16 12 8 4	→	02/ 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	→	03/ 4 8 12 16 3 7 11 15 2 6 10 14 1 5 9 13
↓						
10/ 1 5 9 13 2 6 10 14 3 7 11 15 4 8 12 16	→	11/ 4 3 2 1 8 7 6 5 12 11 10 9 16 15 14 13	→	12/ 16 12 8 4 15 11 7 3 14 10 6 2 13 9 5 1	→	13/ 13 14 15 16 9 10 11 12 5 6 7 8 1 2 3 4

3. では、補数対称四方陣にはお互いに内容の異なった解が何通りあるであろうか。

前節で考察した変換移動をいろいろ組み合わせると、n1をどのポジションにも持って来ることができることがわかる。また数値1がどこにあっても、いつでもホームポジションのn1に戻すことができる。ということは、代表として n1=1 の場合だけを調べればよいということの意味する。n1=1 の場合を調べれば、全てを調べたのと同じ結果を得る。

当然補数の関係から、 $n16=17-n1=16$ である。

そこで先ず {n1, n2, n3, n4} の候補を調べ、次に {n1, n5, n9, n13} の候補を調べる。仮に $n1 < n4 < n13$; $n2 < n3$; $n5 < n9$; としておく（条件は任意である）。同型のものを重複して数えない工夫だ。補数の関係から、{n16, n15, n14, n13}, {n16, n12, n8, n4} も決まる。

n6 は、 $n1+n2+n5+n6=34$ によって決まる。

あとは縦横の和やたくさんある補数の関係を用いて、ほとんど自動的に決めることができ

る。特に (12)~(37) 式のような等式がたくさんあることは、調べる「場合の数」を劇的に減らす。

解の基本型と目されるものとして、次の3つが得られた。

ついでに整理選別の不等式を $n1=1; n2>n5; n2>n3; n5>n9;$ としたリストも添える。

この3つの基本解の1つ1つについて、それぞれ128通りの変形が可能である。だから、皆が目にする原始解の形は、全部で $3 \times 128 = 384$ 個あることになる。

$n1 < n16; n1 < n4 < n13;$ の不等式で選別すると、48個の標準解のリストが得られる。

$n1 < n16; n1 < n4; n1 < n13; n2 > n5;$ で選別する標準解のリストも、小生の好みである。

* 補数対称四方陣の3つの基本解 (その1) : *

1/	2/	3/																																																
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">14</td><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">15</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">8</td><td style="border-right: 1px solid black;">11</td><td style="border-right: 1px solid black;">10</td><td>5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">12</td><td style="border-right: 1px solid black;">7</td><td style="border-right: 1px solid black;">6</td><td>9</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">13</td><td style="border-right: 1px solid black;">2</td><td style="border-right: 1px solid black;">3</td><td>16</td></tr> </table>	1	14	15	4	8	11	10	5	12	7	6	9	13	2	3	16	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">12</td><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">15</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">8</td><td style="border-right: 1px solid black;">13</td><td style="border-right: 1px solid black;">10</td><td>3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">14</td><td style="border-right: 1px solid black;">7</td><td style="border-right: 1px solid black;">4</td><td>9</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">11</td><td style="border-right: 1px solid black;">2</td><td style="border-right: 1px solid black;">5</td><td>16</td></tr> </table>	1	12	15	6	8	13	10	3	14	7	4	9	11	2	5	16	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">12</td><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">14</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">7</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">8</td><td style="border-right: 1px solid black;">13</td><td style="border-right: 1px solid black;">11</td><td>2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">15</td><td style="border-right: 1px solid black;">6</td><td style="border-right: 1px solid black;">4</td><td>9</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">10</td><td style="border-right: 1px solid black;">3</td><td style="border-right: 1px solid black;">5</td><td>16</td></tr> </table>	1	12	14	7	8	13	11	2	15	6	4	9	10	3	5	16
1	14	15	4																																															
8	11	10	5																																															
12	7	6	9																																															
13	2	3	16																																															
1	12	15	6																																															
8	13	10	3																																															
14	7	4	9																																															
11	2	5	16																																															
1	12	14	7																																															
8	13	11	2																																															
15	6	4	9																																															
10	3	5	16																																															

* 補数対称四方陣の3つの基本解 (その2) : *

1/	2/	3/																																																
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">15</td><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">12</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">6</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">14</td><td style="border-right: 1px solid black;">4</td><td style="border-right: 1px solid black;">7</td><td>9</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">8</td><td style="border-right: 1px solid black;">10</td><td style="border-right: 1px solid black;">13</td><td>3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">11</td><td style="border-right: 1px solid black;">5</td><td style="border-right: 1px solid black;">2</td><td>16</td></tr> </table>	1	15	12	6	14	4	7	9	8	10	13	3	11	5	2	16	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">15</td><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">8</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">10</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">14</td><td style="border-right: 1px solid black;">4</td><td style="border-right: 1px solid black;">11</td><td>5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">12</td><td style="border-right: 1px solid black;">6</td><td style="border-right: 1px solid black;">13</td><td>3</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">7</td><td style="border-right: 1px solid black;">9</td><td style="border-right: 1px solid black;">2</td><td>16</td></tr> </table>	1	15	8	10	14	4	11	5	12	6	13	3	7	9	2	16	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">15</td><td style="border-right: 1px solid black; border-bottom: 1px solid black;">14</td><td style="border-bottom: 1px solid black;">4</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">12</td><td style="border-right: 1px solid black;">6</td><td style="border-right: 1px solid black;">7</td><td>9</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">8</td><td style="border-right: 1px solid black;">10</td><td style="border-right: 1px solid black;">11</td><td>5</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black;">13</td><td style="border-right: 1px solid black;">3</td><td style="border-right: 1px solid black;">2</td><td>16</td></tr> </table>	1	15	14	4	12	6	7	9	8	10	11	5	13	3	2	16
1	15	12	6																																															
14	4	7	9																																															
8	10	13	3																																															
11	5	2	16																																															
1	15	8	10																																															
14	4	11	5																																															
12	6	13	3																																															
7	9	2	16																																															
1	15	14	4																																															
12	6	7	9																																															
8	10	11	5																																															
13	3	2	16																																															

* 解の総数[基本解/原始解] = 3/384

(May 29, 2000(初稿), Mar. 2, 2006(改訂新稿), Aug. 15, 2013(清書稿)

MacOSX 10.8.4 & Xcode 4.6.3 での計数・作表: 摂田 寛二(Kanji Setsuda)

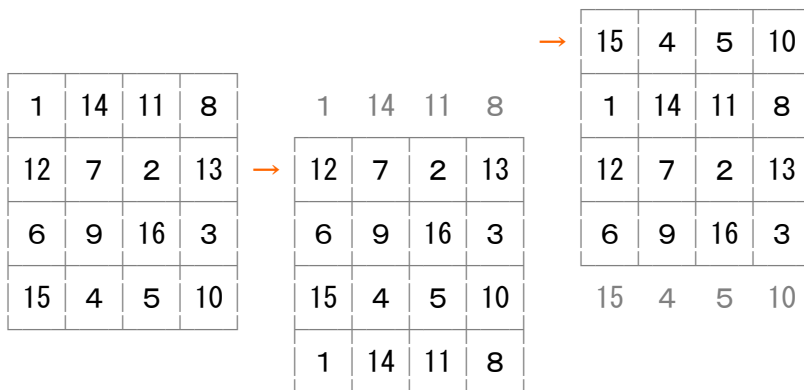
第3節 : 汎四方陣の代数的研究

0. 「汎四方陣」とは？

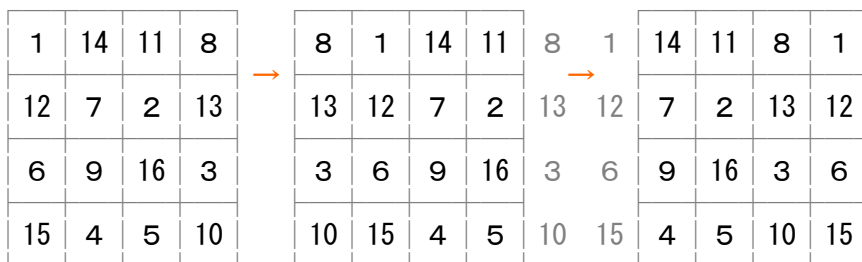
四次の魔方陣というのは、例えば下図のように4×4の正方形の盤に1～16の自然数を欠落無く重複無く全部入れて、縦横の各列・各行の和が等しくなるように構成した数盤のことである。一般に2つの主対角線上の4数の和も列和・行和に等しくする。これらの和はすべて等しくなければならない。

四次の汎対角線型の魔方陣、略して「汎四方陣」というのは、さらに厳しい条件を付加したものである。例えば、上の1行目を最下行の下に移して新たな方陣を構成する。この場合でも、上の諸条件が全て成り立たなければならない。縦横の内容に変化は無いから、新たな対角線の和を等しくすればよい。

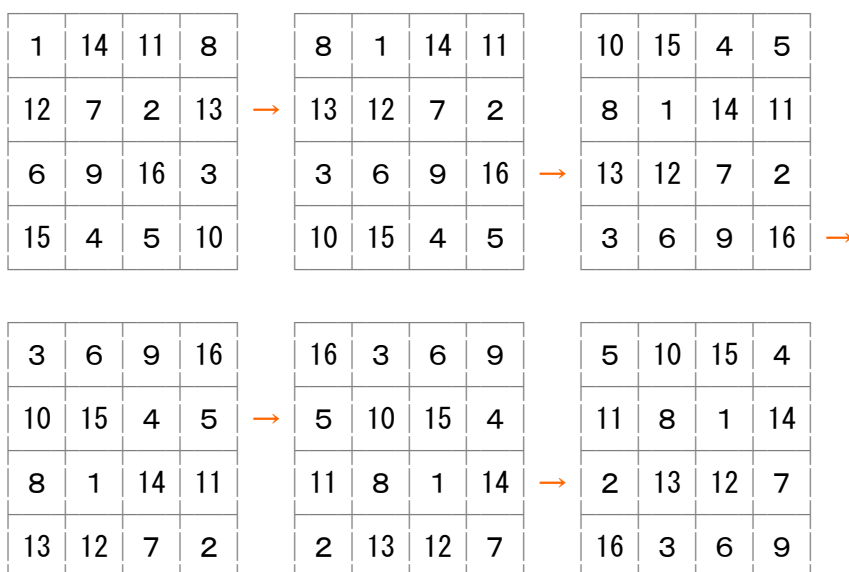
最下行を最上行の上に移して乗せた場合にも、同様に成り立たなければならない。



上下ばかりでなく左右にも移動できなければならない。



さらに繰り返し連続移動も可能。上下・左右の混合移動も可能でなければならない。



いずれの場合でも、縦列横行の内容は保存されているので、新たな対角線上の4数の組合

せに定和の条件が増えるだけである。

1. 「汎対角線」とは？

上のような行列の逐次移動だけで、お互いに異なる四方陣が一体いくつ出来るものだろうか？ また新たな主対角線の定和条件は一体いくつ必要になるのだろうか？

次の図は、最初の基本図をもとに、それを逐次移動によって変換した図をすべて網羅したものである。未変換のものも含めて全部で16個出来る。

そのどの場合でも、行列の定和条件は、内容が全部共通で、良く保存されている。

新たな主対角線の定和条件は、全部で $16 \times 2 = 32$ 本出来る勘定になる。

** 平面四次の魔方陣の基本図と基本定義式：C=34 **

1 2 3 4	行列の定和を定義する条件式： $n1+n2+n3+n4=C;$ $n5+n6+n7+n8=C;$ $n9+n10+n11+n12=C;$ $n13+n14+n15+n16=C;$	$n1+n5+n9+n13=C;$ $n2+n6+n10+n14=C;$ $n3+n7+n11+n15=C;$ $n4+n8+n12+n16=C;$
5 6 7 8		
9 10 11 12		
13 14 15 16		
	主対角線の定和を定義する条件式： $n1+n6+n11+n16=C;$	$n4+n7+n10+n13=C;$

** 汎対角線型四方陣の行列の逐次シフトを網羅した基本概念図 **

** 汎対角線型四方陣の汎対角線定和を定義する条件式を求める：C=34 **

1 図 <table border="1"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr> </table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	行列の定和式： $n1+n2+n3+n4=C;$ $n5+n6+n7+n8=C;$ $n9+n10+n11+n12=C;$ $n13+n14+n15+n16=C;$ 新主対角線の定和式： $n1+n6+n11+n16=C;$ $n4+n7+n10+n13=C;$	2 図 <table border="1"> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>9</td></tr> <tr><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>13</td></tr> </table>	2	3	4	1	6	7	8	5	10	11	12	9	14	15	16	13	行列の定和式： $n2+n3+n4+n1=C;$ $n6+n7+n8+n5=C;$ $n10+n11+n12+n9=C;$ $n14+n15+n16+n13=C;$ $n2+n6+n10+n14=C;$ $n3+n7+n11+n15=C;$ $n4+n8+n12+n16=C;$ $n1+n5+n9+n13=C;$ 新主対角線の定和式： $n2+n7+n12+n13=C;$ $n1+n8+n11+n14=C;$
1	2	3	4																																
5	6	7	8																																
9	10	11	12																																
13	14	15	16																																
2	3	4	1																																
6	7	8	5																																
10	11	12	9																																
14	15	16	13																																
3 図 <table border="1"> <tr><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>7</td><td>8</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>15</td><td>16</td><td>13</td><td>14</td></tr> </table>	3	4	1	2	7	8	5	6	11	12	9	10	15	16	13	14	行列の定和式： $n3+n4+n1+n2=C;$ $n7+n8+n5+n6=C;$ $n11+n12+n9+n10=C;$ $n15+n16+n13+n14=C;$ $n3+n7+n11+n15=C;$ $n4+n8+n12+n16=C;$ $n1+n5+n9+n13=C;$ $n2+n6+n10+n14=C;$ 新主対角線の定和式： $n3+n8+n9+n14=C;$ $n2+n5+n12+n15=C;$	4 図 <table border="1"> <tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>8</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr> <tr><td>12</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td></tr> <tr><td>16</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> </table>	4	1	2	3	8	5	6	7	12	9	10	11	16	13	14	15	行列の定和式： $n4+n1+n2+n3=C;$ $n8+n5+n6+n7=C;$ $n12+n9+n10+n11=C;$ $n16+n13+n14+n15=C;$ $n4+n7+n12+n16=C;$ $n1+n5+n9+n13=C;$ $n2+n6+n10+n14=C;$ $n3+n7+n11+n15=C;$ 新主対角線の定和式： $n4+n5+n10+n15=C;$ $n3+n6+n9+n16=C;$
3	4	1	2																																
7	8	5	6																																
11	12	9	10																																
15	16	13	14																																
4	1	2	3																																
8	5	6	7																																
12	9	10	11																																
16	13	14	15																																
5 図 <table border="1"> <tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr> <tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr> </table>	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	行列の定和式： $n5+n6+n7+n8=C;$ $n9+n10+n11+n12=C;$ $n13+n14+n15+n16=C;$ $n1+n2+n3+n4=C;$ $n5+n9+n13+n1=C;$ $n6+n10+n14+n2=C;$ $n7+n11+n15+n3=C;$ $n8+n12+n16+n4=C;$ 新主対角線の定和式： $n5+n10+n15+n4=C;$ $n8+n11+n14+n1=C;$	6 図 <table border="1"> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>5</td></tr> <tr><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>9</td></tr> <tr><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>13</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> </table>	6	7	8	5	10	11	12	9	14	15	16	13	2	3	4	1	行列の定和式： $n6+n7+n8+n5=C;$ $n10+n11+n12+n9=C;$ $n14+n15+n16+n13=C;$ $n2+n3+n4+n1=C;$ $n6+n10+n14+n2=C;$ $n7+n11+n15+n3=C;$ $n8+n12+n16+n4=C;$ $n5+n9+n13+n1=C;$ 新主対角線の定和式： $n6+n11+n16+n1=C;$ $n5+n12+n15+n2=C;$
5	6	7	8																																
9	10	11	12																																
13	14	15	16																																
1	2	3	4																																
6	7	8	5																																
10	11	12	9																																
14	15	16	13																																
2	3	4	1																																

7図

7	8	5	6
11	12	9	10
15	16	13	14
3	4	1	2
7	8	5	6

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n7+n8+n5+n6=C; \\ n11+n12+n9+n10=C; \\ n15+n16+n13+n14=C; \\ n3+n4+n1+n2=C; \\ n7+n11+n15+n3=C; \\ n8+n12+n16+n4=C; \\ n5+n9+n13+n1=C; \\ n6+n10+n14+n2=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n7+n12+n13+n2=C; \\ n6+n9+n16+n3=C; \end{aligned}$$

8図

8	5	6	7
12	9	10	11
16	13	14	15
4	1	2	3
8	5	6	7

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n8+n5+n6+n7=C; \\ n12+n9+n10+n11=C; \\ n16+n13+n14+n15=C; \\ n4+n1+n2+n3=C; \\ n8+n12+n16+n4=C; \\ n5+n9+n13+n1=C; \\ n6+n10+n14+n2=C; \\ n7+n11+n15+n3=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n8+n9+n14+n3=C; \\ n7+n10+n13+n4=C; \end{aligned}$$

9図

9	10	11	12
13	14	15	16
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n9+n10+n11+n12=C; \\ n13+n14+n15+n16=C; \\ n1+n2+n3+n4=C; \\ n5+n6+n7+n8=C; \\ n9+n13+n1+n5=C; \\ n10+n14+n2+n6=C; \\ n11+n15+n3+n7=C; \\ n12+n16+n4+n8=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n9+n14+n3+n8=C; \\ n12+n15+n2+n5=C; \end{aligned}$$

10図

10	11	12	9
14	15	16	13
2	3	4	1
6	7	8	5
10	11	12	9

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n10+n11+n12+n9=C; \\ n14+n15+n16+n13=C; \\ n2+n3+n4+n1=C; \\ n6+n7+n8+n5=C; \\ n10+n14+n2+n6=C; \\ n11+n15+n3+n7=C; \\ n12+n16+n4+n8=C; \\ n9+n13+n1+n5=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n10+n15+n4+n5=C; \\ n9+n16+n3+n6=C; \end{aligned}$$

11図

11	12	9	10
15	16	13	14
3	4	1	2
7	8	5	6
11	12	9	10

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n11+n12+n9+n10=C; \\ n15+n16+n13+n14=C; \\ n3+n4+n1+n2=C; \\ n7+n8+n5+n6=C; \\ n11+n15+n3+n7=C; \\ n12+n16+n4+n8=C; \\ n9+n13+n1+n5=C; \\ n10+n14+n2+n6=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n11+n16+n1+n6=C; \\ n10+n13+n4+n7=C; \end{aligned}$$

12図

12	9	10	11
16	13	14	15
4	1	2	3
8	5	6	7
12	9	10	11

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n12+n9+n10+n11=C; \\ n16+n13+n14+n15=C; \\ n4+n1+n2+n3=C; \\ n8+n5+n6+n7=C; \\ n12+n16+n4+n8=C; \\ n9+n13+n1+n5=C; \\ n10+n14+n2+n6=C; \\ n11+n15+n3+n7=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n12+n13+n2+n7=C; \\ n11+n14+n1+n8=C; \end{aligned}$$

13図

13	14	15	16
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n13+n14+n15+n16=C; \\ n1+n2+n3+n4=C; \\ n5+n6+n7+n8=C; \\ n9+n10+n11+n12=C; \\ n13+n1+n5+n9=C; \\ n14+n2+n6+n10=C; \\ n15+n3+n7+n11=C; \\ n16+n4+n8+n12=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n13+n2+n7+n12=C; \\ n16+n3+n6+n9=C; \end{aligned}$$

14図

14	15	16	13
2	3	4	1
6	7	8	5
10	11	12	9
14	15	16	13

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n14+n15+n16+n13=C; \\ n2+n3+n4+n1=C; \\ n6+n7+n8+n5=C; \\ n10+n11+n12+n9=C; \\ n14+n2+n6+n10=C; \\ n15+n3+n7+n11=C; \\ n16+n4+n8+n12=C; \\ n13+n1+n5+n9=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n14+n3+n8+n9=C; \\ n13+n4+n7+n10=C; \end{aligned}$$

15図

15	16	13	14
3	4	1	2
7	8	5	6
11	12	9	10
15	16	13	14

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n15+n16+n13+n14=C; \\ n3+n4+n1+n2=C; \\ n7+n8+n5+n6=C; \\ n11+n12+n9+n10=C; \\ n15+n3+n7+n11=C; \\ n16+n4+n8+n12=C; \\ n13+n1+n5+n9=C; \\ n14+n2+n6+n10=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n15+n4+n5+n10=C; \\ n14+n1+n8+n11=C; \end{aligned}$$

16図

16	13	14	15
4	1	2	3
8	5	6	7
12	9	10	11
16	13	14	15

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n16+n13+n14+n15=C; \\ n4+n1+n2+n3=C; \\ n8+n5+n6+n7=C; \\ n12+n9+n10+n11=C; \\ n16+n4+n8+n12=C; \\ n13+n1+n5+n9=C; \\ n14+n2+n6+n10=C; \\ n15+n3+n7+n11=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n16+n1+n6+n11=C; \\ n15+n2+n5+n12=C; \end{aligned}$$

**** 新主対角線の定和式を集めたリスト: C=34 (各式内部の順序を整理) ****

n1+n6+n11+n16=C ... pd11;	n4+n7+n10+n13=C ... pd12;
n2+n7+n12+n13=C ... pd21;	n1+n8+n11+n14=C ... pd22;
n3+n8+n9+n14=C ... pd31;	n2+n5+n12+n15=C ... pd32;
n4+n5+n10+n15=C ... pd41;	n3+n6+n9+n16=C ... pd42;
n4+n5+n10+n15=C ... pd51;	n1+n8+n11+n14=C ... pd52;
n1+n6+n11+n16=C ... pd61;	n2+n5+n12+n15=C ... pd62;
n2+n7+n12+n13=C ... pd71;	n3+n6+n9+n16=C ... pd72;
n3+n8+n9+n14=C ... pd81;	n4+n7+n10+n13=C ... pd82;
n3+n8+n9+n14=C ... pd91;	n2+n5+n12+n15=C ... pd92;
n4+n5+n10+n15=C ... pd101;	n3+n6+n9+n16=C ... pd102;
n1+n6+n11+n16=C ... pd111;	n4+n7+n10+n13=C ... pd112;
n2+n7+n12+n13=C ... pd121;	n1+n8+n11+n14=C ... pd122;
n2+n7+n12+n13=C ... pd131;	n3+n6+n9+n16=C ... pd132;
n3+n8+n9+n14=C ... pd141;	n4+n7+n10+n13=C ... pd142;
n4+n5+n10+n15=C ... pd151;	n1+n8+n11+n14=C ... pd152;
n1+n6+n11+n16=C ... pd161;	n2+n5+n12+n15=C ... pd162;

上のように新主対角線の定和式だけを集めてみると、重複しているものが結構ある。相互に異なったものは、最初の8例のみ。以降に新しいものは出て来ない。

従って、上の8式を最初に仮定するだけで、行列の逐次移動16通りの全てが可能となる。すなわち、「汎対角線型四方陣」が可能となる。

これからは、上の pd11~pd42 の8式をもって「汎対角線」を代表させ、「汎対角線定和の条件式」と言うことにする。すなわち、汎対角線は8本ある。8本しかない。

2. 「方陣拡張空間」

いま数盤の内容を1行1列ずつコピーして左右・上下に拡張し、下図のように「方陣拡張空間」を作る。汎対角線方陣の行列の逐次移動は、この拡張空間内での方陣枠の移動に正確に対応することがわかる。方陣枠は左右・上下・斜め方向いずれにも移動可能である。

移動して得られた結果は、この空間内に必ず見つけられる。幾つもの対角線も、この空間内に必ず見つかる。

したがって、この拡張空間を1つ作っておけば、幾つもの派生形を簡単に作ることができる。また幾つもの方陣を分類して、同じ内容のものを1つの空間に帰着させることができる。その際、先ず n1を含む行・列の構成要素をチェックする。そして、単純な反転・回転・対称移動によって得られる形は、同一種類にまとめる。

今後は、この空間内に見つかる幾つもの方陣を同一の集合にまとめ、あえて同一種類と見なす。そして、拡張空間そのものの種類が幾つ見つかるかを数えることにしよう。

汎対角線四方陣の拡張空間を下図のように定義する。数値はあくまで相対的なポジション(場所)の名前を表す。

•	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	•
•	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	•
•	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	•
•	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	•
•	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	•
•	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	•
•	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	•
•	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	•
•	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	•

3. 定義条件式

次の連立方程式において 各々の $\{n_1, n_2, \dots, n_{16}\}$ は、値として 1~16の重複しない自然数を取るものとする。

横の4行：

$$n_1+n_2+n_3+n_4=C \quad \dots (1)$$

$$n_5+n_6+n_7+n_8=C \quad \dots (2)$$

$$n_9+n_{10}+n_{11}+n_{12}=C \quad \dots (3)$$

$$n_{13}+n_{14}+n_{15}+n_{16}=C \quad \dots (4)$$

これらの4式を加えると、

$$n_1+n_2+n_3+\dots+n_{15}+n_{16}=4*C$$

$$1+2+3+4+\dots+15+16=4*C$$

$$\text{よって} \quad 16*(16+1) \div 2 = 4*C$$

$$\therefore C=34$$

縦の4列：

$$n_1+n_5+n_9+n_{13}=34 \quad \dots (5)$$

$$n_2+n_6+n_{10}+n_{14}= \quad \dots (6)$$

$$n_3+n_7+n_{11}+n_{15}=34 \quad \dots (7)$$

$$n_4+n_8+n_{12}+n_{16}=34 \quad \dots (8)$$

主対角線2本：

$$n_1+n_6+n_{11}+n_{16}=34 \quad \dots (9)$$

$$n_4+n_7+n_{10}+n_{13}=34 \quad \dots (10)$$

さらに汎四方陣では、次の各式もまた同時に成り立たなければならない。

汎対角線上の6本：

$$n_1+n_8+n_{11}+n_{14}=34 \quad \dots (11)$$

$$n_2+n_5+n_{12}+n_{15}=34 \quad \dots (12)$$

$$n_2+n_7+n_{12}+n_{13}=34 \quad \dots (13)$$

$$n_3+n_6+n_9+n_{16}=34 \quad \dots (14)$$

$$n_3+n_8+n_9+n_{14}=34 \quad \dots (15)$$

$$n_4+n_5+n_{10}+n_{15}=34 \quad \dots (16)$$

この16本の方程式をもって「汎四方陣」の定義としたい。

4. 代数計算

これらの式を適宜加減算する。先ず2式ずつを取って比較し、

$$(9), (11) \text{式から, } n_6+n_{16}=34-(n_1+n_{11})$$

$$n_8+n_{14}=34-(n_1+n_{11})$$

$$\therefore n_6+n_{16}=n_8+n_{14} \quad (=aa \text{とおく})$$

$$(12), (13) \text{式から, } n_5+n_{15}=34-(n_2+n_{12})$$

$$n_7+n_{13}=34-(n_2+n_{12})$$

$$\therefore n_5+n_{15}=n_7+n_{13} \quad (=bb \text{とおく})$$

$$(9), (14) \text{式から, } n_1+n_{11}=n_3+n_9 \quad (=cc \text{とおく})$$

$$(10), (13) \text{式から, } n_2+n_{12}=n_4+n_{10} \quad (=dd \text{とおく})$$

$$(1)+(3) \quad n_1+n_2+n_3+n_4=34 \quad \dots (1)$$

$$+) \quad n_9+n_{10}+n_{11}+n_{12}=34 \quad \dots (3)$$

$$(n_1+n_{11})+(n_3+n_9)+(n_2+n_{12})+(n_4+n_{10})=2*34$$

$$2*cc+2*dd=2*34$$

$$\therefore cc+dd=34 \quad \dots (17)$$

$$(5)+(7) \quad n_1+n_5+n_9+n_{13}=34 \quad \dots (5)$$

$$+) \quad n_3+n_7+n_{11}+n_{15}=34 \quad \dots (7)$$

$$(n_1+n_{11})+(n_3+n_9)+(n_5+n_{15})+(n_7+n_{13})=2*34$$

$$2*cc+2*bb=2*34$$

$$\therefore bb+cc=34 \quad \dots (18)$$

$$(17), (18) \text{から } bb=dd$$

つまり、 $n_2+n_{12}=n_4+n_{10}=n_5+n_{15}=n_7+n_{13}$
 ところが、 $n_2+n_5+n_{12}+n_{15}=34 \dots (12)$ だったから、
 $n_2+n_{12}=n_5+n_{15}=34/2=17$

つまり、 $bb=dd=17$
 これを(18)式に戻せば、 $cc=17$

同様にして、 $aa=17$

つまり、 $n_1+n_{11}=n_2+n_{12}=n_3+n_9=n_4+n_{10}$
 $=n_5+n_{15}=n_6+n_{16}=n_7+n_{13}=n_8+n_{14}=17 \dots (19)$

かくして $\{n_1, n_{11}\}$, $\{n_2, n_{12}\}$, $\{n_3, n_9\}$, $\{n_4, n_{10}\}$, $\{n_5, n_{15}\}$, $\{n_6, n_{16}\}$,
 $\{n_7, n_{13}\}$ および $\{8, n_{14}\}$ の 8 組のペアは「17の補数を成す」ことがわかった。

この性質を拡張図に求めると、「任意の斜めのライン上の 1 つおきの任意の 2 数の和は、定数 17 に等しい」と言える。これは、かつて言われた「完全四方阵」の定義そのものである。
汎四方阵は、同時に**完全四方阵**でもあるのだ。

5. 今度は、縦横 2 行 2 列に隣接する**正方四数の和**に注目する。

例えば、 $\{n_1, n_2, n_5, n_6\}$ に注目して次の 4 式の辺々を足すと、

$$n_1+n_2+n_3+n_4=34 \dots (1)$$

$$n_5+n_6+n_7+n_8=34 \dots (2)$$

$$n_1+n_5+n_9+n_{13}=34 \dots (5)$$

$$+) n_2+n_6+n_{10}+n_{14}=34 \dots (6)$$

$$2*(n_1+n_2+n_5+n_6) + (n_3+n_9) + (n_4+n_{10}) + (n_7+n_{13}) + (n_8+n_{14}) = 4*34$$

$$(22) \text{式から } 2*(n_1+n_2+n_5+n_6) + 17+17+17+17=136$$

$$\text{よって、 } n_1+n_2+n_5+n_6=34 \dots (20)$$

同様に $\{n_2, n_3, n_6, n_7\}$ の 4 数に注目して

$$n_1+n_2+n_3+n_4=34 \dots (1)$$

$$n_5+n_6+n_7+n_8=34 \dots (2)$$

$$n_2+n_6+n_{10}+n_{14}=34 \dots (6)$$

$$+) n_3+n_7+n_{11}+n_{15}=34 \dots (7)$$

$$2*(n_2+n_3+n_6+n_7) + (n_1+n_{11}) + (n_4+n_{10}) + (n_5+n_{15}) + (n_8+n_{14}) = 4*34$$

$$(22) \text{式から } 2*(n_2+n_3+n_6+n_7) + 17+17+17+17=136$$

$$\text{よって、 } n_2+n_3+n_6+n_7=34 \dots (21)$$

$$\text{同様に } n_3+n_4+n_7+n_8=34$$

$$n_5+n_6+n_9+n_{10}=34$$

$$n_6+n_7+n_{10}+n_{11}=34$$

$$n_7+n_8+n_{11}+n_{12}=34$$

$$n_9+n_{10}+n_{13}+n_{14}=34$$

$$n_{10}+n_{11}+n_{14}+n_{15}=34$$

$$n_{11}+n_{12}+n_{15}+n_{16}=34$$

$$\text{さらに } n_1+n_2+n_{13}+n_{14}=34$$

$$n_1+n_5+n_4+n_8=34$$

$$n_1+n_4+n_{13}+n_{16}=34$$

.....

も成り立つ。拡張空間の任意の縦横 2×2 正方 4 数の和もまた定数 34 に等しい。

これは、いわゆる「**正方連結型の魔方陣**」の定義そのものである。**汎四方阵**は、同時に**正方連結四方阵**でもあるのだ。

仮に**完全四方阵**の定義から出発して代数計算しても、**汎四方阵**と**正方連結四方阵**の性質が両方とも得られる。

どの性質も、**汎四方阵**が既に内在的に具備しているもので、外から特別に与えられた条件ではない。仮に 3 つの性質を同時に最初から与えて解を求めても、**汎四方阵**の解集合と同じものが得られる。解が変わりもしないし、減りもしない。解無しにもならない。

6. 汎対角線魔方陣では、移動変換が可能な規則ゆえに拡張空間で任意の4行4列4斜を選んでも、各々の和が定数 34 に等しいという条件が成り立つ。

ということは、1つの型を代表させるのに、 $n1=1$ を仮定してよいことになる。

$n1$ には1以外の任意の数値も取れるが、移動可能な規則ゆえに後で任意の内部変換が可能だ。だから、他の場所に数1があっても、いつでもホームポジションの $n1$ に戻せる。

$n1=1$ の場合を調べれば、全ての同型の方陣内部を調べたのと同じ結果になる。

よって、これからは基本形として、 $n1=1$ と $n11=16$ を仮定する。

ところで、 $n1$ を含む3式から、

$$n1+n2+n3+n4=34 \quad \dots (1)$$

$$n1+n5+n9+n13=34 \quad \dots (5)$$

$$+) n1+n6+n11+n16=34 \quad \dots (9)$$

$$\{n2+n4+n5+n13\} + 2*n1 + (n6+n16) + (n3+n9) + (n1+n11) = 3*34$$

ところが、(19)式と $n1=1$ から

$$\{n2+n4+n5+n13\} + 2 + 17 + 17 + 17 = 3*34$$

$$\text{ゆえに } n2+n4+n5+n13 = 3*34 - 2 - (17+17+17) = 49 \quad \dots (22)$$

同様に $n11$ を含む3式から、

$$n9+n10+n11+n12=34 \quad \dots (3)$$

$$n3+n7+n11+n15=34 \quad \dots (7)$$

$$+) n1+n6+n11+n16=34 \quad \dots (9)$$

$$\{n7+n10+n12+n15\} + (n3+n9) + (n6+n16) + (n1+n11) + 2*n11 = 3*34$$

ところが、(19)式と $n11=16$ から

$$\{n7+n10+n12+n15\} + 17 + 17 + 17 + 2*16 = 3*34$$

$$\text{ゆえに } n7+n10+n12+n15 = 19 \quad \dots (23)$$

$n1$ に縦横に隣接する4数 $\{n2, n4, n5, n13\}$ の和は 49 でなければならず、また $n11$ に縦横に隣接する4数 $\{n7, n10, n12, n15\}$ の和は 19 でなければならない。つまり、 $n1$ の周囲には比較的大きな数が集まり、 $n11$ の周囲には比較的小さい数が集まることがわかる。

ところで、(22)式のように4数の和が 49 となるような重複しない自然数の組合わせは何通りあるだろうか。先ずそのうちの3数を考えられる最大値に取ると、 $\{15, 14, 13, 7\}$ となる（‘組合わせ’だから大きい順に並べる）。いまは7以上の4数の組合わせをを考えればよい。あれこれ試してみると、他に

$$\{15, 14, 12, 8\}, \{15, 14, 11, 9\}, \{15, 13, 12, 9\},$$

$$\{15, 13, 11, 10\}, \{14, 13, 12, 11\} \text{ が得られる。これで全部である。}$$

(23)式の4数は、(22)式の各項の補数 $\{(n2, n12), (n4, n10), (n5, n15), (n13, n7)\}$ になっているから、あわせて次の6通りを調べればすむことがわかる。

$$[1] \{15, 14, 13, 7\}, \{2, 3, 4, 10\}$$

$$[2] \{15, 14, 12, 8\}, \{2, 3, 5, 9\}$$

$$[3] \{15, 14, 11, 9\}, \{2, 3, 6, 8\}$$

$$[4] \{15, 13, 12, 9\}, \{2, 4, 5, 8\}$$

$$[5] \{15, 13, 11, 10\}, \{2, 4, 6, 7\}$$

$$[6] \{14, 13, 12, 11\}, \{3, 4, 5, 6\}$$

これで $n1, n11$ に続いて $\{n2, n4, n5, n13\}, \{n12, n10, n15, n7\}$ の候補が絞れた。

7. あとは、 $\{n3, n9\}, \{n6, n16\}, \{n8, n14\}$ を調べればよいわけだが、どの値も一義的に決まる。 $\{n1, n2, n4, n5, n13\}$ を決めさえすれば自動的に決まる。

$$n3=34-n1-n2-n4; \quad n9=17-n3$$

$$n6=34-n1-n2-n5; \quad n16=17-n6$$

$$n8=34-n5-n6-n7; \quad n14=17-n8$$

例えば、[1] $\{15, 14, 13, 7\}, \{2, 3, 4, 10\}$ を調べる。

しかし、これは不可能である。 $n3=34-1-15-14=4$ となり、4が重複する。

•	14	1	15	n3	14	1	15
10	•	13	•	10	•	13	•
16	2	•	3	16	2	•	3
4	•	7	•	4	•	7	•

下の左図では、 $n3=34-1-15-13=5$ となり、 $n15=5$ と重複する。

•	13	1	15	n3	13	1	15	•	13	1	15	n3	13	1	15
8	•	12	•	8	•	12	•	7	•	11	•	7	•	11	•
16	2	•	4	16	2	•	4	16	2	n9	4	16	2	•	4
5	•	9	•	5	•	9	•	6	•	10	•	6	•	10	•

右図は良さそうに思える。 $n3=5$ 、 $n9=12$ と決まるのだが、 $n1+n4+n13+n16=34$ が成り立たない。 $n16=34-1-13-10=10$ となって、 $n13=10$ と矛盾する。

[2] {15, 14, 12, 8}, {2, 3, 5, 9} を調べる。

5	•	8	•	5	•	8	•	5	•	8	•	5	•	8	•	
•	14	1	15	n3	14	1	15	→	4	14	1	15	4	14	1	15
9	•	12	•	9	•	12	•	9	•	12	•	9	•	12	•	
16	2	•	3	16	2	•	3	16	2	13	3	16	2	13	3	
5	•	8	•	5	•	8	•	5	•	8	•	5	•	8	•	
•	14	1	15	•	14	1	15	•	14	1	15	4	14	1	15	

これは有望だ。残りの (6, 11), (7, 10) も何とか入りそうだが、では、 $n4$ と $n5$ の値を入れ替えたらどうなるか。

3	•	8	•	3	•	8	•	3	•	8	•	3	•	8	•	
•	12	1	15	n3	12	1	15	→	•	12	1	15	6	12	1	15
9	•	14	•	9	•	14	•	9	•	14	•	9	•	14	•	
16	2	•	5	16	2	•	5	16	2	11	5	16	2	11	5	
3	•	8	•	3	•	8	•	3	•	8	•	3	•	8	•	
•	12	1	15	•	12	1	15	•	12	1	15	6	12	1	15	

これも有望だ。残りの (4, 13), (7, 10) も何とか入りそうだが。

8. 解の見つけ方は何とかわかったが、正解はいったい幾つあるだろうか。全部の解を手に入れたものだ。

結局のところ、 $n1=1$ 、 $n11=16$ として、 $\{n2, n4, n5, n13\}$ 、 $\{n12, n10, n15, n7\}$ に

- [1] {15, 14, 13, 7}, {2, 3, 4, 10}
- [2] {15, 14, 12, 8}, {2, 3, 5, 9}
- [3] {15, 14, 11, 9}, {2, 3, 6, 8}
- [4] {15, 13, 12, 9}, {2, 4, 5, 8}

[5] {15, 13, 11, 10}, {2, 4, 6, 7}
 [6] {14, 13, 12, 11}, {3, 4, 5, 6}

を丁寧に当てはめて調べて行くしか方法は無い。その際、 n_2, n_4, n_5, n_{13} の大小関係はどうするか。拡張空間のいわば座標軸上にある4数の大小関係は予め決めておかなければならない。

•	•	15	16	n_{13}	14	15	16	13	14	•	•
•	•	3	n_4	n1	n2	n3	n4	1	2	•	•
•	•	7	8	n5	6	7	8	5	6	•	•

大小関係を定めなくておくと、例えば n_2, n_4 の交換が起こる。そして単に左右を反転しただけの図形さえ新方陣として1個に数えてしまう。また n_5, n_{13} の交換が起こると、図形が上下反転してしまう。 n_2, n_5 の交換が起こると、図形が90度(あるいは270度)回転してしまう。こうして出来た図形を各々新方陣として別個に数えるわけには行かない。

よって、我々は、 $n_2 > n_5$ および $n_2 > n_4, n_5 > n_{13}$ を仮定する。これは恣意的な仮定である。別に $n_2 < n_5$ および $n_2 < n_4, n_5 < n_{13}$ としてもかまわない。ただし、一度決めた仮定は最後まで押し通すこと。途中で変更してはいけない。

だから、 $\{n_2, n_4, n_5, n_{13}\}, \{n_{12}, n_{10}, n_{15}, n_7\}$ に上の表の [2] {15, 14, 12, 8}, {2, 3, 5, 9} と置いた時、次に {15, 12, 14, 8}, {2, 5, 3, 9} を考えるのは妥当である。

$n_2 > n_5$ および $n_2 > n_4, n_5 > n_{13}$ に違反しない。

同様に {15, 8, 14, 12}, {2, 9, 3, 5} も違反しない。

つまり、 $n_2=15$ (最大値) と置けば、相手は $n_4=14, 12, 8$ の3通りが可能である。それに応じて、 n_5, n_{13} は一義的に決まる。 $n_5 > n_{13}$ としたからである。

上の [2] の時、調べる場合の数は3通りしかないことがわかった。

他の [1] ~ [6] の時も、事情は同じである。結局全部で18通り調べればよいことがわかる。そして、誰でも最大でも15回失敗すれば、ついには正解にたどり着ける。

《汎四方陣の基本解：3個》

1/	2/	3/																																																
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">15</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">14</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">12</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">9</td><td style="padding: 2px 5px;">7</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">13</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">16</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">8</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">10</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">11</td></tr> </table>	1	15	4	14	12	6	9	7	13	3	16	2	8	10	5	11	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">15</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td><td style="padding: 2px 5px;">12</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">14</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">9</td><td style="padding: 2px 5px;">7</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">11</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">5</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">16</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">8</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">10</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">13</td></tr> </table>	1	15	6	12	14	4	9	7	11	5	16	2	8	10	3	13	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">1</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">15</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">10</td><td style="padding: 2px 5px;">8</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">14</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">4</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">5</td><td style="padding: 2px 5px;">11</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">7</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">9</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">16</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td></tr> <tr><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">12</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">6</td><td style="border-right: 1px solid black; padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">13</td></tr> </table>	1	15	10	8	14	4	5	11	7	9	16	2	12	6	3	13
1	15	4	14																																															
12	6	9	7																																															
13	3	16	2																																															
8	10	5	11																																															
1	15	6	12																																															
14	4	9	7																																															
11	5	16	2																																															
8	10	3	13																																															
1	15	10	8																																															
14	4	5	11																																															
7	9	16	2																																															
12	6	3	13																																															

正解は、上の3個しかない。

下に拡張空間の形式でも示す。方陣枠を左右上下斜めに動かせば、あなたの作った方陣がこれら3つの中のいずれかに必ず見つかるはずだ。ただし、反転しているかも知れない。回転しているかも知れない。あるいは対称移動しているかも知れない。1の周辺、16の周辺の数値を手がかりに粘り強くさがしていただきたい。

《汎四方陣の基本解》 方陣拡張空間の形式で

(1)

3	16	2	13	3	16	2	13	3	16
10	5	11	8	10	5	11	8	10	5
15	4	14	1	15	4	14	1	15	4
6	9	7	12	6	9	7	12	6	9
3	16	2	13	3	16	2	13	3	16
10	5	11	8	10	5	11	8	10	5
15	4	14	1	15	4	14	1	15	4
6	9	7	12	6	9	7	12	6	9
3	16	2	13	3	16	2	13	3	16

(2)

5	16	2	11	5	16	2	11	5	16
10	3	13	8	10	3	13	8	10	3
15	6	12	1	15	6	12	1	15	6
4	9	7	14	4	9	7	14	4	9
5	16	2	11	5	16	2	11	5	16
10	3	13	8	10	3	13	8	10	3
15	6	12	1	15	6	12	1	15	6
4	9	7	14	4	9	7	14	4	9
5	16	2	11	5	16	2	11	5	16

(3)

9	16	2	7	9	16	2	7	9	16
6	3	13	12	6	3	13	12	6	3
15	10	8	1	15	10	8	1	15	10
4	5	11	14	4	5	11	14	4	5
9	16	2	7	9	16	2	7	9	16
6	3	13	12	6	3	13	12	6	3
15	10	8	1	15	10	8	1	15	10
4	5	11	14	4	5	11	14	4	5
9	16	2	7	9	16	2	7	9	16

【Total Count = 3】

9. 汎四方陣の3つの解を得てみて、あらためて対称四方陣の3つの解との類似性に気付かされる。行列の内容が良く似ている。何か関連があるのであろうか。

そこで不等式の立て方を共通にし、方陣の段階的な構成法を共通化・標準化すると、あらためて下図のような解を得る。次ページの図を良く見て欲しい。

2×2の正方4数で方陣を4つのブロックに分けると、ブロックごとの内容がそっくりである。これならば、対応関係を想定しても良いのではないか。

実際に次のような規則的な「変換構成法」を仮定すると、対称四方陣の解を汎四方陣の解に作り換えることができる。

(1) 先ず縦の第Ⅲ列と第Ⅳ列の内容をそっくり交換する。

(2) 次に横の第Ⅲ行と第Ⅳ行の内容をそっくり交換する。

具体的なやり方を下右図に示す。(1), (2)の交換を必ず続けて行うこと。

逆もまた可なり。(1), (2)の順序は問題ではない。

この変換構成法で、汎四方陣の解から対称四方陣の解に作り換えることもできる。

つまり、この変換構成法によって、2種類の解の間に一対一対応の関係を付けられる。だからこそ、ともに基本解が同数ずつあるのであろう。

対称四方陣と汎四方陣の間には、まるで兄弟姉妹のような関連があるようだ。

対称四方陣と汎四方陣の解の間の対応関係

《対称四方陣》 《汎四方陣》 《変換法概念図》



(Jul. 23, 2000(初稿): MWCWによる計数; Mar. 2, 2006; Aug. 15, 2013(改訂清書稿):
MacOSX 10.8.4 & Xcode 4.6.3 による計数・作表・執筆: 摂田 寛二 (Kanji Setsuda))

E-Mail Address: <jag12001@nifty.com>