

第 1 部 : 『魔方陣の基礎的研究』 : 摂田 寛二

第 3 章 : 魔方陣の代数的研究 (2)

第 1 節 : 標準型五方陣の概要

1. 五方陣の基本ポジションを下図のように表し、まずは一般的な標準型を定義しよう。自然数 1 ~ 25 をすべて欠落無く重複無く用いて、次の連立方程式を満たさなければならない。縦の列と横の行の和が、すべて定数 C に等しい。そして、2 本の主対角線の和も C に等しい。

n1	n2	n3	n4	n5	$n1+n2+n3+n4+n5=C$ (1)
n6	n7	n8	n9	10	$n6+n7+n8+n9+n10=C$ (2)
11	12	13	14	15	$n11+n12+n13+n14+n15=C$ (3)
16	17	18	19	20	$n16+n17+n18+n19+n20=C$ (4)
21	22	23	24	25	$n21+n22+n23+n24+n25=C$ (5)
					$n1+n6+n11+n16+n21=C$ (6)
					$n2+n7+n12+n17+n22=C$ (7)
					$n3+n8+n13+n18+n23=C$ (8)
					$n4+n9+n14+n19+n24=C$ (9)
					$n5+n10+n15+n20+n25=C$ (10)
					$n1+n7+n13+n19+n25=C$ (11)
					$n5+n9+n13+n17+n21=C$ (12)

2. 定数 C の値を代数計算によって求めておこう。この値は、対称型でも汎型でも、五方陣ならば、どんなタイプの魔方陣でも共通である。

(1) ~ (5) 式から、 $\{n1+n2+\dots+n24+n25\} = 5 * C$

左辺は、自然数 1 ~ 25 の総和に他ならないから、

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 24 + 25 = 5 * C$$

$$25 * (25 + 1) \div 2 = 5 * C$$

$$\therefore C = 65 \quad \dots (13)$$

自然数が 25 個あるのに等式が 12 本しかないから、このままでは解が無数に生じる。

*** 標準型五方陣の解のリスト : 標準解 (抜粋) : チェック・サム付き ***

1 65\65/ 1 22 21 18 3 65 65 20 2 15 9 19 65 65 14 16 13 10 12 65 65 7 17 11 24 6 65 65 23 8 5 4 25 65 65	41093 65\65/ 1 23 21 18 2 65 65 22 3 15 14 11 65 65 13 16 12 5 19 65 65 9 17 7 24 8 65 65 20 6 10 4 25 65 65	86874 65\65/ 1 22 21 19 2 65 65 14 4 20 12 15 65 65 18 16 11 7 13 65 65 9 17 5 24 10 65 65 23 6 8 3 25 65 65	154894 65\65/ 1 23 21 18 2 65 65 15 5 17 12 16 65 65 20 14 10 8 13 65 65 7 19 6 24 9 65 65 22 4 11 3 25 65 65
221635 65\65/ 1 22 23 17 2 65 65 15 6 18 14 12 65 65 20 13 9 7 16 65 65 8 19 4 24 10 65 65 21 5 11 3 25 65 65	312570 65\65/ 1 22 20 19 3 65 65 13 7 18 15 12 65 65 17 14 8 5 21 65 65 11 16 10 24 4 65 65 23 6 9 2 25 65 65	401482 65\65/ 1 22 21 18 3 65 65 12 8 16 15 14 65 65 20 13 7 6 19 65 65 9 17 11 24 4 65 65 23 5 10 2 25 65 65	502999 65\65/ 1 23 21 16 4 65 65 17 9 14 15 10 65 65 20 12 6 8 19 65 65 5 18 11 24 7 65 65 22 3 13 2 25 65 65
598305 65\65/ 1 19 21 18 6 65 65 12 10 20 14 9 65 65 16 15 5 7 22 65 65 13 17 8 24 3 65 65 23 4 11 2 25 65 65	710010 65\65/ 1 21 22 15 6 65 65 16 11 17 14 7 65 65 20 13 4 9 19 65 65 5 18 10 24 8 65 65 23 2 12 3 25 65 65	811401 65\65/ 1 19 23 15 7 65 65 10 12 17 18 8 65 65 22 14 3 6 20 65 65 11 16 9 24 5 65 65 21 4 13 2 25 65 65	938219 65\65/ 1 14 23 17 10 65 65 15 13 20 12 5 65 65 21 16 2 8 18 65 65 6 19 9 24 7 65 65 22 3 11 4 25 65 65
1075807 65\65/ 1 18 21 16 9 65 65 12 14 19 13 7 65 65 22 11 2 10 20 65 65 6 17 15 23 4 65 65 24 5 8 3 25 65 65	1202625 65\65/ 1 18 24 14 8 65 65 9 15 17 19 5 65 65 21 16 2 6 20 65 65 11 13 12 22 7 65 65 23 3 10 4 25 65 65	1304016 65\65/ 1 17 24 15 8 65 65 14 16 18 13 4 65 65 20 10 2 11 22 65 65 7 19 12 21 6 65 65 23 3 9 5 25 65 65	1415721 65\65/ 1 15 24 18 7 65 65 12 17 16 14 6 65 65 21 11 2 9 22 65 65 8 19 13 20 5 65 65 23 3 10 4 25 65 65

1511027 65\65/	1612544 65\65/	1701456 65\65/	1792391 65\65/
1 20 24 13 7 65 65	1 13 24 20 7 65 65	1 15 24 18 7 65 65	1 14 22 20 8 65 65
9 18 15 17 6 65 65	9 19 15 16 6 65 65	9 20 16 14 6 65 65	5 21 18 15 6 65 65
21 8 2 12 22 65 65	21 12 2 8 22 65 65	21 8 2 12 22 65 65	24 9 2 11 19 65 65
11 16 14 19 5 65 65	11 17 14 18 5 65 65	11 19 13 17 5 65 65	12 17 13 16 7 65 65
23 3 10 4 25 65 65	23 4 10 3 25 65 65	23 3 10 4 25 65 65	23 4 10 3 25 65 65
1859132 65\65/	1927152 65\65/	1972933 65\65/	2014025 65\65/
1 14 24 18 8 65 65	1 16 21 18 9 65 65	1 17 23 14 10 65 65	1 21 22 18 3 65 65
11 22 12 13 7 65 65	6 23 15 17 4 65 65	6 24 9 19 7 65 65	20 2 14 10 19 65 65
21 6 2 16 20 65 65	22 10 2 11 20 65 65	21 8 2 16 18 65 65	15 17 13 8 12 65 65
9 19 17 15 5 65 65	12 13 19 14 7 65 65	15 12 20 13 5 65 65	6 16 11 25 7 65 65
23 4 10 3 25 65 65	24 3 8 5 25 65 65	22 4 11 3 25 65 65	23 9 5 4 24 65 65
2047980 65\65/	2098871 65\65/	2157680 65\65/	2228857 65\65/
1 23 22 17 2 65 65	1 23 21 18 2 65 65	1 23 22 17 2 65 65	1 23 21 17 3 65 65
20 3 16 11 15 65 65	15 4 20 14 12 65 65	15 5 18 13 14 65 65	19 6 15 11 14 65 65
18 13 12 8 14 65 65	19 13 11 5 17 65 65	20 12 10 7 16 65 65	18 12 9 10 16 65 65
5 19 6 25 10 65 65	8 16 6 25 10 65 65	8 19 4 25 9 65 65	5 20 7 25 8 65 65
21 7 9 4 24 65 65	22 9 7 3 24 65 65	21 6 11 3 24 65 65	22 4 13 2 24 65 65
2307901 65\65/	2399576 65\65/	2505443 65\65/	2602430 65\65/
1 23 20 18 3 65 65	1 21 22 17 4 65 65	1 20 23 17 4 65 65	1 19 21 18 6 65 65
14 7 16 15 13 65 65	11 8 18 12 16 65 65	13 9 14 18 11 65 65	15 10 17 11 12 65 65
19 12 8 5 21 65 65	20 14 7 9 15 65 65	21 16 6 3 19 65 65	22 14 5 8 16 65 65
9 17 10 25 4 65 65	10 19 5 25 6 65 65	8 15 10 25 7 65 65	4 20 9 25 7 65 65
22 6 11 2 24 65 65	23 3 13 2 24 65 65	22 5 12 2 24 65 65	23 2 13 3 24 65 65
2697682 65\65/	2805714 65\65/	2911721 65\65/	3020377 65\65/
1 20 22 16 6 65 65	1 16 23 17 8 65 65	1 18 21 14 11 65 65	1 20 22 15 7 65 65
12 11 18 15 9 65 65	10 12 20 14 9 65 65	9 13 19 17 7 65 65	11 14 18 17 5 65 65
19 14 4 7 21 65 65	21 15 3 7 19 65 65	22 16 2 5 20 65 65	19 16 3 6 21 65 65
10 17 8 25 5 65 65	11 18 6 25 5 65 65	10 12 15 25 3 65 65	9 13 12 23 8 65 65
23 3 13 2 24 65 65	22 4 13 2 24 65 65	23 6 8 4 24 65 65	25 2 10 4 24 65 65
3115151 65\65/	3243010 65\65/	3347862 65\65/	3461217 65\65/
1 17 22 16 9 65 65	1 19 25 12 8 65 65	1 18 23 15 8 65 65	1 13 25 19 7 65 65
13 15 19 11 7 65 65	15 16 10 18 6 65 65	7 17 20 16 5 65 65	10 18 15 17 5 65 65
20 12 2 10 21 65 65	21 13 2 9 20 65 65	19 12 2 10 22 65 65	22 14 2 6 21 65 65
6 18 14 23 4 65 65	5 14 17 22 7 65 65	13 14 11 21 6 65 65	9 16 12 20 8 65 65
25 3 8 5 24 65 65	23 3 11 4 24 65 65	25 4 9 3 24 65 65	23 4 11 3 24 65 65
3559391 65\65/	3658055 65\65/	3746462 65\65/	3838740 65\65/
1 22 23 13 6 65 65	1 19 25 13 7 65 65	1 15 23 18 8 65 65	1 12 25 19 8 65 65
8 19 17 16 5 65 65	9 20 15 16 5 65 65	13 21 11 14 6 65 65	5 22 17 14 7 65 65
20 7 3 14 21 65 65	22 6 2 14 21 65 65	19 10 2 12 22 65 65	21 9 2 13 20 65 65
11 15 12 18 9 65 65	10 17 12 18 8 65 65	7 16 20 17 5 65 65	15 18 10 16 6 65 65
25 2 10 4 24 65 65	23 3 11 4 24 65 65	25 3 9 4 24 65 65	23 4 11 3 24 65 65
3906462 65\65/	3973038 65\65/	4013925 65\65/	4051842 65\65/
1 16 22 17 9 65 65	1 14 21 18 11 65 65	1 24 20 17 3 65 65	1 24 20 18 2 65 65
6 23 14 18 4 65 65	10 25 15 12 3 65 65	19 2 21 8 15 65 65	15 3 14 12 21 65 65
20 12 2 10 21 65 65	22 5 2 16 20 65 65	16 12 14 10 13 65 65	19 17 13 6 10 65 65
13 11 19 15 7 65 65	9 17 19 13 7 65 65	7 18 4 25 11 65 65	8 16 7 25 9 65 65
25 3 8 5 24 65 65	23 4 8 6 24 65 65	22 9 6 5 23 65 65	22 5 11 4 23 65 65
4092654 65\65/	4154963 65\65/	4215776 65\65/	4295864 65\65/
1 21 22 19 2 65 65	1 20 24 18 2 65 65	1 21 22 19 2 65 65	1 24 21 17 2 65 65
15 4 20 10 16 65 65	16 5 10 13 21 65 65	13 6 20 14 12 65 65	13 7 15 14 16 65 65
18 14 12 8 13 65 65	19 14 11 6 15 65 65	18 16 10 4 17 65 65	19 11 9 6 20 65 65
7 17 5 25 11 65 65	7 17 12 25 4 65 65	9 15 5 25 11 65 65	10 18 8 25 4 65 65
24 9 6 3 23 65 65	22 9 8 3 23 65 65	24 7 8 3 23 65 65	22 5 12 3 23 65 65
4372535 65\65/	4462269 65\65/	4562877 65\65/	4665674 65\65/
1 19 25 18 2 65 65	1 22 21 18 3 65 65	1 22 20 18 4 65 65	1 19 22 17 6 65 65
17 8 13 11 16 65 65	16 9 15 14 11 65 65	12 10 17 15 11 65 65	20 11 15 12 7 65 65
15 14 9 7 20 65 65	19 13 7 6 20 65 65	21 14 6 5 19 65 65	16 14 5 9 21 65 65
10 21 6 24 4 65 65	5 17 10 25 8 65 65	7 16 9 25 8 65 65	4 18 10 25 8 65 65
22 3 12 5 23 65 65	24 4 12 2 23 65 65	24 3 13 2 23 65 65	24 3 13 2 23 65 65

4756380 65\65/ 1 19 24 14 7 65 65 16 12 17 11 9 65 65 20 10 4 13 18 65 65 6 21 5 25 8 65 65 22 3 15 2 23 65 65	4866805 65\65/ 1 17 21 18 8 65 65 11 13 20 14 7 65 65 19 15 3 6 22 65 65 10 16 9 25 5 65 65 24 4 12 2 23 65 65	4961309 65\65/ 1 12 24 18 10 65 65 15 14 17 11 8 65 65 21 16 2 7 19 65 65 6 20 9 25 5 65 65 22 3 13 4 23 65 65	5076952 65\65/ 1 16 21 18 9 65 65 11 15 19 12 8 65 65 22 14 2 7 20 65 65 6 17 13 24 5 65 65 25 3 10 4 23 65 65
5164282 65\65/ 1 15 24 19 6 65 65 12 16 18 14 5 65 65 20 13 3 8 21 65 65 7 17 9 22 10 65 65 25 4 11 2 23 65 65	5273407 65\65/ 1 18 24 14 8 65 65 12 17 16 11 9 65 65 21 7 2 15 20 65 65 6 19 13 22 5 65 65 25 4 10 3 23 65 65	5380809 65\65/ 1 20 22 14 8 65 65 10 18 13 15 9 65 65 25 7 2 12 19 65 65 5 16 17 21 6 65 65 24 4 11 3 23 65 65	5493905 65\65/ 1 16 24 17 7 65 65 12 19 15 13 6 65 65 22 9 2 11 21 65 65 5 18 14 20 8 65 65 25 3 10 4 23 65 65
5586540 65\65/ 1 15 24 18 7 65 65 12 20 13 14 6 65 65 22 9 2 11 21 65 65 5 17 16 19 8 65 65 25 4 10 3 23 65 65	5709075 65\65/ 1 14 25 17 8 65 65 13 21 7 15 9 65 65 22 10 2 12 19 65 65 5 16 20 18 6 65 65 24 4 11 3 23 65 65	5793000 65\65/ 1 14 24 18 8 65 65 6 22 13 19 5 65 65 21 15 2 7 20 65 65 12 11 16 17 9 65 65 25 3 10 4 23 65 65	5884795 65\65/ 1 14 22 19 9 65 65 11 24 13 12 5 65 65 21 6 2 16 20 65 65 7 17 18 15 8 65 65 25 4 10 3 23 65 65
5950928 65\65/ 1 18 24 12 10 65 65 5 25 9 20 6 65 65 21 8 2 15 19 65 65 16 11 17 14 7 65 65 22 3 13 4 23 65 65	5996665 65\65/ 1 23 17 21 3 65 65 16 2 20 9 18 65 65 13 19 15 6 12 65 65 11 14 5 25 10 65 65 24 7 8 4 22 65 65	6026373 65\65/ 1 23 20 19 2 65 65 21 3 15 9 17 65 65 12 18 14 8 13 65 65 7 16 6 25 11 65 65 24 5 10 4 22 65 65	6070262 65\65/ 1 20 23 19 2 65 65 17 4 15 8 21 65 65 12 16 13 10 14 65 65 11 18 5 25 6 65 65 24 7 9 3 22 65 65
6118886 65\65/ 1 19 23 20 2 65 65 14 5 16 9 21 65 65 15 17 12 8 13 65 65 11 18 4 25 7 65 65 24 6 10 3 22 65 65	6183660 65\65/ 1 18 23 21 2 65 65 19 6 13 12 15 65 65 14 20 11 3 17 65 65 7 16 8 25 9 65 65 24 5 10 4 22 65 65	6253859 65\65/ 1 23 19 20 2 65 65 14 7 16 11 17 65 65 21 13 10 6 15 65 65 5 18 8 25 9 65 65 24 4 12 3 22 65 65	6336462 65\65/ 1 21 23 18 2 65 65 19 8 14 13 11 65 65 15 16 9 5 20 65 65 6 17 7 25 10 65 65 24 3 12 4 22 65 65
6429800 65\65/ 1 20 24 18 2 65 65 13 9 16 15 12 65 65 21 14 8 3 19 65 65 7 17 6 25 10 65 65 23 5 11 4 22 65 65	6521744 65\65/ 1 21 24 16 3 65 65 15 10 17 14 9 65 65 20 11 7 8 19 65 65 6 18 4 25 12 65 65 23 5 13 2 22 65 65	6635682 65\65/ 1 20 23 17 4 65 65 10 11 14 18 12 65 65 24 13 6 3 19 65 65 9 16 7 25 8 65 65 21 5 15 2 22 65 65	6733620 65\65/ 1 20 23 15 6 65 65 17 12 16 9 11 65 65 19 10 5 13 18 65 65 4 21 7 25 8 65 65 24 2 14 3 22 65 65
6828983 65\65/ 1 18 24 16 6 65 65 14 13 17 12 9 65 65 19 11 4 10 21 65 65 8 20 5 25 7 65 65 23 3 15 2 22 65 65	6927921 65\65/ 1 16 23 17 8 65 65 10 14 20 12 9 65 65 19 15 3 7 21 65 65 11 18 6 25 5 65 65 24 2 13 4 22 65 65	7051499 65\65/ 1 19 21 14 10 65 65 9 15 18 17 6 65 65 23 16 2 4 20 65 65 8 12 13 25 7 65 65 24 3 11 5 22 65 65	7166162 65\65/ 1 14 23 18 9 65 65 13 16 19 12 5 65 65 20 15 2 7 21 65 65 6 17 10 24 8 65 65 25 3 11 4 22 65 65
7267139 65\65/ 1 19 24 12 9 65 65 15 17 16 11 6 65 65 20 8 2 14 21 65 65 4 18 13 23 7 65 65 25 3 10 5 22 65 65	7380559 65\65/ 1 20 24 14 6 65 65 5 18 17 15 10 65 65 23 7 3 13 19 65 65 11 16 9 21 8 65 65 25 4 12 2 22 65 65	7486831 65\65/ 1 17 24 15 8 65 65 7 19 16 12 11 65 65 23 6 2 14 20 65 65 9 18 13 21 4 65 65 25 5 10 3 22 65 65	7612813 65\65/ 1 16 24 17 7 65 65 12 20 14 9 10 65 65 23 6 3 15 18 65 65 4 21 13 19 8 65 65 25 2 11 5 22 65 65
7711706 65\65/ 1 15 23 18 8 65 65 11 21 14 13 6 65 65 24 7 2 12 20 65 65 4 17 16 19 9 65 65 25 5 10 3 22 65 65	7822064 65\65/ 1 19 24 12 9 65 65 8 23 15 13 6 65 65 20 4 2 18 21 65 65 11 16 14 17 7 65 65 25 3 10 5 22 65 65	7917353 65\65/ 1 14 23 18 9 65 65 13 24 10 12 6 65 65 21 7 2 15 20 65 65 5 17 19 16 8 65 65 25 3 11 4 22 65 65	7988031 65\65/ 1 14 21 19 10 65 65 9 25 13 12 6 65 65 23 4 2 16 20 65 65 8 17 18 15 7 65 65 24 5 11 3 22 65 65
8055937 65\65/ 1 22 20 19 3 65 65 23 2 15 8 17 65 65 12 18 16 6 13 65 65 5 14 10 25 11 65 65 24 9 4 7 21 65 65	9916517 65\65/ 1 22 16 23 3 65 65 15 2 19 8 21 65 65 14 18 17 4 12 65 65 11 13 7 25 9 65 65 24 10 6 5 20 65 65	11927511 65\65/ 1 23 21 17 3 65 65 20 2 15 6 22 65 65 11 16 18 12 8 65 65 9 14 4 25 13 65 65 24 10 7 5 19 65 65	13840403 65\65/ 1 23 17 21 3 65 65 20 2 16 5 22 65 65 13 15 19 6 12 65 65 7 14 9 25 10 65 65 24 11 4 8 18 65 65

15729139 65\65/ 1 21 18 22 3 65 65 19 2 14 7 23 65 65 13 16 20 6 10 65 65 8 11 9 25 12 65 65 24 15 4 5 17 65 65	17498665 65\65/ 1 22 19 20 3 65 65 17 2 15 8 23 65 65 11 18 21 5 10 65 65 12 9 6 25 13 65 65 24 14 4 7 16 65 65	19262329 65\65/ 1 24 17 20 3 65 65 21 2 13 10 19 65 65 11 14 22 6 12 65 65 9 7 8 25 16 65 65 23 18 5 4 15 65 65	20945487 65\65/ 1 24 18 19 3 65 65 21 2 15 7 20 65 65 12 13 23 6 11 65 65 9 10 4 25 17 65 65 22 16 5 8 14 65 65
22650789 65\65/ 1 23 16 21 4 65 65 19 2 12 10 22 65 65 14 15 24 3 9 65 65 11 7 5 25 17 65 65 20 18 8 6 13 65 65	24256015 65\65/ 1 23 19 18 4 65 65 20 3 14 7 21 65 65 9 16 24 5 11 65 65 13 8 2 25 17 65 65 22 15 6 10 12 65 65	25849695 65\65/ 1 23 18 20 3 65 65 17 4 15 7 22 65 65 14 9 24 5 13 65 65 12 10 2 25 16 65 65 21 19 6 8 11 65 65	27246415 65\65/ 1 23 20 18 3 65 65 19 5 13 7 21 65 65 8 12 24 4 17 65 65 15 9 2 25 14 65 65 22 16 6 11 10 65 65
28752703 65\65/ 1 22 19 20 3 65 65 18 6 13 5 23 65 65 15 8 24 4 14 65 65 10 12 2 25 16 65 65 21 17 7 11 9 65 65	30012441 65\65/ 1 22 18 20 4 65 65 17 7 15 5 21 65 65 14 11 24 3 13 65 65 10 9 2 25 19 65 65 23 16 6 12 8 65 65	31280461 65\65/ 1 20 19 21 4 65 65 16 8 14 5 22 65 65 13 10 24 3 15 65 65 12 9 2 25 17 65 65 23 18 6 11 7 65 65	32357217 65\65/ 1 21 20 19 4 65 65 16 9 7 10 23 65 65 11 13 24 3 14 65 65 15 5 2 25 18 65 65 22 17 12 8 6 65 65
33313773 65\65/ 1 23 19 18 4 65 65 17 10 11 6 21 65 65 12 7 24 2 20 65 65 13 9 3 25 15 65 65 22 16 8 14 5 65 65	34050313 65\65/ 1 23 16 20 5 65 65 18 11 6 8 22 65 65 13 10 24 3 15 65 65 12 7 2 25 19 65 65 21 14 17 9 4 65 65	34727611 65\65/ 1 21 19 18 6 65 65 16 12 11 4 22 65 65 15 7 24 5 14 65 65 10 8 2 25 20 65 65 23 17 9 13 3 65 65	35163051 65\65/ 1 22 15 20 7 65 65 18 13 10 3 21 65 65 14 5 24 6 16 65 65 9 8 4 25 19 65 65 23 17 12 11 2 65 65
35472327 65\65/ 2 22 21 17 3 65 65 20 1 15 10 19 65 65 14 18 13 9 11 65 65 6 16 12 24 7 65 65 23 8 4 5 25 65 65	72448255 65\65/ 3 21 20 17 4 65 65 19 1 22 8 15 65 65 13 16 12 14 10 65 65 7 18 5 24 11 65 65 23 9 6 2 25 65 65	109794755 65\65/ 4 21 19 16 5 65 65 14 1 22 8 20 65 65 17 13 11 15 9 65 65 7 18 10 24 6 65 65 23 12 3 2 25 65 65	143903959 65\65/ 5 22 15 17 6 65 65 21 1 16 8 19 65 65 9 20 10 14 12 65 65 7 18 13 24 3 65 65 23 4 11 2 25 65 65
174813433 65\65/ 6 15 17 20 7 65 65 21 1 22 8 13 65 65 10 19 9 11 16 65 65 5 18 14 24 4 65 65 23 12 3 2 25 65 65	201422209 65\65/ 7 14 18 17 9 65 65 20 1 22 6 16 65 65 12 21 8 13 11 65 65 3 19 15 24 4 65 65 23 10 2 5 25 65 65	223435493 65\65/ 8 18 20 10 9 65 65 13 1 17 12 22 65 65 16 21 7 15 6 65 65 5 14 19 24 3 65 65 23 11 2 4 25 65 65	240804015 65\65/ 9 20 14 12 10 65 65 13 1 19 11 21 65 65 17 22 6 16 4 65 65 3 15 18 24 5 65 65 23 7 8 2 25 65 65
253537291 65\65/ 10 20 17 7 11 65 65 15 1 19 12 18 65 65 13 22 5 16 9 65 65 4 14 21 24 2 65 65 23 8 3 6 25 65 65	262175289 65\65/ 11 18 14 10 12 65 65 17 1 23 8 16 65 65 13 21 4 20 7 65 65 2 19 15 24 5 65 65 22 6 9 3 25 65 65	267791141 65\65/ 12 19 16 5 13 65 65 17 1 23 10 14 65 65 9 20 3 22 11 65 65 6 18 15 24 2 65 65 21 7 8 4 25 65 65	271388851 65\65/ 13 19 15 4 14 65 65 17 1 22 16 9 65 65 6 24 3 20 12 65 65 8 11 18 23 5 65 65 21 10 7 2 25 65 65
273683093 65\65/ 14 18 13 5 15 65 65 20 1 24 12 8 65 65 9 22 2 21 11 65 65 3 17 16 23 6 65 65 19 7 10 4 25 65 65	274792651 65\65/ 15 14 13 6 17 65 65 20 1 23 12 9 65 65 7 24 2 21 11 65 65 5 16 19 22 3 65 65 18 10 8 4 25 65 65	275181411 65\65/ 16 14 12 6 17 65 65 19 1 23 13 9 65 65 7 24 2 22 10 65 65 5 15 20 21 4 65 65 18 11 8 3 25 65 65	275279597 65\65/ 17 15 9 6 18 65 65 14 2 25 11 13 65 65 12 24 1 21 7 65 65 3 16 20 22 4 65 65 19 8 10 5 23 65 65
275301177 65\65/ 18 10 5 13 19 65 65 15 6 23 7 14 65 65 11 25 3 24 2 65 65 1 16 22 17 9 65 65 20 8 12 4 21 65 65	[Total Count of Solutions = 275305224] [OK!]		

** Calculated and Listed by Kanji Setsuda on
June 2, 2014 with MacOSX 10.9.3 & Xcode 5.1.1 **

長時間かけて計数したら、標準解が何と2億7530万5224個もあった。
別の数え方をしても、同じであった（下表に示す）。

* 標準型五方陣の標準解の別仕様のリスト-1: (抜粋) *

1#\65/65	3166#\65/65	5319#\65/65	8233#\65/65
14 20 1 12 18 65 65	20 19 1 9 16 65 65	14 18 1 20 12 65 65	14 17 1 13 20 65 65
21 19 3 16 6 65 65	18 21 4 10 12 65 65	21 17 5 7 15 65 65	19 21 6 9 10 65 65
2 4 13 22 24 65 65	2 3 13 23 24 65 65	2 6 11 22 24 65 65	2 5 11 23 24 65 65
17 7 23 10 8 65 65	14 15 22 6 8 65 65	9 16 23 13 4 65 65	12 7 22 16 8 65 65
11 15 25 5 9 65 65	11 7 25 17 5 65 65	19 8 25 3 10 65 65	18 15 25 4 3 65 65
10717#\65/65	14747#\65/65	17067#\65/65	19469#\65/65
15 13 1 17 19 65 65	11 21 1 15 17 65 65	12 20 1 13 19 65 65	16 15 1 19 14 65 65
18 21 7 16 3 65 65	20 19 8 13 5 65 65	17 21 9 15 3 65 65	21 17 10 6 11 65 65
2 8 9 22 24 65 65	2 7 9 23 24 65 65	2 10 7 22 24 65 65	2 9 7 23 24 65 65
20 11 23 6 5 65 65	18 12 22 10 3 65 65	18 8 23 11 5 65 65	8 20 22 12 3 65 65
10 12 25 4 14 65 65	14 6 25 4 16 65 65	16 6 25 4 14 65 65	18 4 25 5 13 65 65
21524#\65/65	24739#\65/65	27265#\65/65	29021#\65/65
17 20 1 6 21 65 65	18 7 1 20 19 65 65	19 11 1 16 18 65 65	19 9 1 15 21 65 65
15 16 11 14 9 65 65	16 21 12 10 6 65 65	17 21 13 9 5 65 65	18 20 14 8 5 65 65
2 12 5 22 24 65 65	2 11 5 23 24 65 65	2 14 3 22 24 65 65	2 13 3 23 24 65 65
13 7 23 19 3 65 65	15 17 22 8 3 65 65	7 15 23 12 8 65 65	10 17 22 12 4 65 65
18 10 25 4 8 65 65	14 9 25 4 13 65 65	20 4 25 6 10 65 65	16 6 25 7 11 65 65
31547#\65/65	34762#\65/65	36817#\65/65	39219#\65/65
18 17 1 7 22 65 65	18 17 1 7 22 65 65	16 15 1 11 22 65 65	15 21 1 8 20 65 65
14 20 15 10 6 65 65	12 21 16 11 5 65 65	14 20 17 9 5 65 65	9 19 18 13 6 65 65
2 13 3 23 24 65 65	2 13 3 23 24 65 65	2 13 3 23 24 65 65	2 11 5 23 24 65 65
12 11 21 16 5 65 65	14 10 20 15 6 65 65	12 10 19 18 6 65 65	22 10 16 14 3 65 65
19 4 25 9 8 65 65	19 4 25 9 8 65 65	21 7 25 4 8 65 65	17 4 25 7 12 65 65
41539#\65/65	45569#\65/65	48053#\65/65	50967#\65/65
16 15 1 11 22 65 65	18 17 1 7 22 65 65	18 17 1 7 22 65 65	19 9 1 15 21 65 65
12 20 19 9 5 65 65	14 15 20 10 6 65 65	12 16 21 11 5 65 65	10 20 22 8 5 65 65
2 13 3 23 24 65 65	2 13 3 23 24 65 65	2 13 3 23 24 65 65	2 13 3 23 24 65 65
14 10 17 18 6 65 65	12 11 16 21 5 65 65	14 10 15 20 6 65 65	18 17 14 12 4 65 65
21 7 25 4 8 65 65	19 9 25 4 8 65 65	19 9 25 4 8 65 65	16 6 25 7 11 65 65
53120#\65/65	56285#\65/65	57452#\65/65	58577#\65/65
19 15 1 9 21 65 65	16 21 1 13 14 65 65	9 24 1 15 16 65 65	12 18 1 14 20 65 65
18 12 23 8 4 65 65	17 18 3 8 19 65 65	19 22 4 7 13 65 65	17 21 5 9 13 65 65
2 14 3 22 24 65 65	2 6 12 22 23 65 65	2 6 14 20 23 65 65	2 8 10 22 23 65 65
10 17 13 20 5 65 65	10 11 24 15 5 65 65	17 10 21 12 5 65 65	15 7 24 16 3 65 65
16 7 25 6 11 65 65	20 9 25 7 4 65 65	18 3 25 11 8 65 65	19 11 25 4 6 65 65
60175#\65/65	61244#\65/65	62604#\65/65	63933#\65/65
10 22 1 15 17 65 65	12 18 1 15 19 65 65	11 22 1 15 16 65 65	16 11 1 18 19 65 65
19 20 6 7 13 65 65	21 20 7 14 3 65 65	20 18 8 14 5 65 65	20 21 9 10 5 65 65
2 4 12 24 23 65 65	2 10 8 22 23 65 65	2 6 10 24 23 65 65	2 12 6 22 23 65 65
16 11 21 14 3 65 65	17 11 24 9 4 65 65	19 12 21 9 4 65 65	14 17 24 7 3 65 65
18 8 25 5 9 65 65	13 6 25 5 16 65 65	13 7 25 3 17 65 65	13 4 25 8 15 65 65
65609#\65/65	66875#\65/65	68176#\65/65	69604#\65/65
15 24 1 3 22 65 65	20 21 1 6 17 65 65	14 17 1 13 20 65 65	18 19 1 6 21 65 65
19 18 10 14 4 65 65	12 18 11 19 5 65 65	22 19 12 5 7 65 65	20 15 13 10 7 65 65
2 12 8 20 23 65 65	2 14 4 22 23 65 65	2 10 6 24 23 65 65	2 12 4 24 23 65 65
13 5 21 17 9 65 65	15 9 24 10 7 65 65	9 16 21 15 4 65 65	9 14 22 17 3 65 65
16 6 25 11 7 65 65	16 3 25 8 13 65 65	18 3 25 8 11 65 65	16 5 25 8 11 65 65
71397#\65/65	72735#\65/65	73781#\65/65	75186#\65/65
18 17 1 7 22 65 65	16 18 1 9 21 65 65	15 17 1 10 22 65 65	15 16 1 13 20 65 65
10 19 14 16 6 65 65	11 22 15 14 3 65 65	13 20 16 7 9 65 65	8 22 17 11 7 65 65
2 12 4 24 23 65 65	2 12 4 24 23 65 65	2 12 4 24 23 65 65	2 12 4 24 23 65 65
20 8 21 13 3 65 65	17 7 20 13 8 65 65	14 11 19 18 3 65 65	19 9 18 14 5 65 65
15 9 25 5 11 65 65	19 6 25 5 10 65 65	21 5 25 6 8 65 65	21 6 25 3 10 65 65
76599#\65/65	77688#\65/65	78893#\65/65	80087#\65/65
19 10 1 13 22 65 65	17 11 1 15 21 65 65	16 9 1 18 21 65 65	15 17 1 13 19 65 65
21 15 18 5 6 65 65	14 20 19 5 7 65 65	11 22 20 7 5 65 65	8 20 21 9 7 65 65
2 12 4 24 23 65 65	2 12 4 24 23 65 65	2 12 4 24 23 65 65	2 12 4 24 23 65 65
9 20 17 16 3 65 65	10 13 16 18 8 65 65	17 14 15 13 6 65 65	18 11 14 16 6 65 65
14 8 25 7 11 65 65	22 9 25 3 6 65 65	19 8 25 3 10 65 65	22 5 25 3 10 65 65

81146#\65/65	82520#\65/65	83521#\65/65	84950#\65/65
18 16 1 9 21 65 65	15 16 1 13 20 65 65	14 18 1 20 12 65 65	15 16 1 14 19 65 65
11 19 22 5 8 65 65	9 17 24 8 7 65 65	21 19 3 7 15 65 65	20 21 4 17 3 65 65
2 12 4 24 23 65 65	2 14 4 22 23 65 65	2 4 13 24 22 65 65	2 7 11 23 22 65 65
14 15 13 17 6 65 65	18 12 11 19 5 65 65	11 16 23 9 6 65 65	18 8 24 6 9 65 65
20 3 25 10 7 65 65	21 6 25 3 10 65 65	17 8 25 5 10 65 65	10 13 25 5 12 65 65
86092#\65/65	87818#\65/65	89166#\65/65	91255#\65/65
12 19 1 16 17 65 65	14 13 1 19 18 65 65	14 19 1 13 18 65 65	16 9 1 20 19 65 65
20 21 5 15 4 65 65	17 23 6 16 3 65 65	21 20 7 12 5 65 65	18 21 8 13 5 65 65
2 6 11 24 22 65 65	2 11 9 21 22 65 65	2 8 9 24 22 65 65	2 11 7 23 22 65 65
18 9 23 7 8 65 65	20 10 24 4 7 65 65	17 15 23 6 4 65 65	17 14 24 6 4 65 65
13 10 25 3 14 65 65	12 8 25 5 15 65 65	11 3 25 10 16 65 65	12 10 25 3 15 65 65
92589#\65/65	93810#\65/65	95126#\65/65	96791#\65/65
14 17 1 18 15 65 65	17 16 1 12 19 65 65	19 14 1 15 16 65 65	17 18 1 9 20 65 65
20 19 9 6 11 65 65	11 20 10 18 6 65 65	21 18 11 7 8 65 65	14 19 12 13 7 65 65
2 10 7 24 22 65 65	2 13 5 23 22 65 65	2 12 5 24 22 65 65	2 15 3 23 22 65 65
8 16 23 13 5 65 65	21 9 24 8 3 65 65	3 17 23 13 9 65 65	11 8 24 16 6 65 65
21 3 25 4 12 65 65	14 7 25 4 15 65 65	20 4 25 6 10 65 65	21 5 25 4 10 65 65
97939#\65/65	99755#\65/65	100927#\65/65	102333#\65/65
18 16 1 10 20 65 65	16 19 1 11 18 65 65	20 17 1 9 18 65 65	18 15 1 12 19 65 65
9 21 13 15 7 65 65	17 21 14 9 4 65 65	8 19 15 10 13 65 65	7 23 16 13 6 65 65
2 14 3 24 22 65 65	2 12 5 24 22 65 65	2 14 3 24 22 65 65	2 14 3 24 22 65 65
17 8 23 12 5 65 65	7 10 20 15 13 65 65	12 11 21 16 5 65 65	17 9 20 11 8 65 65
19 6 25 4 11 65 65	23 3 25 6 8 65 65	23 4 25 6 7 65 65	21 4 25 5 10 65 65
103546#\65/65	104614#\65/65	105899#\65/65	107745#\65/65
21 20 1 7 16 65 65	14 23 1 7 20 65 65	18 12 1 11 23 65 65	23 7 1 19 15 65 65
13 15 17 11 9 65 65	13 19 18 11 4 65 65	15 21 19 6 4 65 65	9 17 20 8 11 65 65
2 14 3 24 22 65 65	2 12 5 24 22 65 65	2 14 3 24 22 65 65	2 14 3 24 22 65 65
6 12 19 18 10 65 65	15 8 16 17 9 65 65	10 13 17 16 9 65 65	13 21 16 10 5 65 65
23 4 25 5 8 65 65	21 3 25 6 10 65 65	20 5 25 8 7 65 65	18 6 25 4 12 65 65
109029#\65/65	110552#\65/65	112019#\65/65	112797#\65/65
17 16 1 11 20 65 65	19 9 1 15 21 65 65	19 16 1 11 18 65 65	14 17 1 18 15 65 65
13 18 21 7 6 65 65	10 20 23 8 4 65 65	14 13 24 6 8 65 65	13 22 3 8 19 65 65
2 14 3 24 22 65 65	2 14 3 24 22 65 65	2 15 3 23 22 65 65	2 7 12 23 21 65 65
10 12 15 19 9 65 65	18 17 13 11 6 65 65	9 17 12 20 7 65 65	16 10 24 11 4 65 65
23 5 25 4 8 65 65	16 5 25 7 12 65 65	21 4 25 5 10 65 65	20 9 25 5 6 65 65
138809#\65/65	164251#\65/65	185607#\65/65	209899#\65/65
11 22 1 14 17 65 65	10 21 1 18 15 65 65	10 19 1 20 15 65 65	9 20 1 16 19 65 65
15 21 3 10 16 65 65	16 22 3 13 11 65 65	22 21 3 12 7 65 65	18 21 3 13 10 65 65
2 6 13 24 20 65 65	2 9 12 23 19 65 65	2 8 13 24 18 65 65	2 11 12 23 17 65 65
19 7 23 12 4 65 65	20 8 24 7 6 65 65	17 11 23 5 9 65 65	22 7 24 8 4 65 65
18 9 25 5 8 65 65	17 5 25 4 14 65 65	14 6 25 4 16 65 65	14 6 25 5 15 65 65
230609#\65/65	251697#\65/65	270475#\65/65	287335#\65/65
8 17 1 20 19 65 65	11 17 1 16 20 65 65	7 21 1 17 19 65 65	8 17 1 18 21 65 65
22 21 3 7 12 65 65	21 19 3 14 8 65 65	22 20 3 9 11 65 65	19 22 3 11 10 65 65
2 10 13 24 16 65 65	2 13 12 23 15 65 65	2 12 13 24 14 65 65	2 15 12 23 13 65 65
18 11 23 9 4 65 65	22 10 24 5 4 65 65	18 8 23 10 6 65 65	20 5 24 9 7 65 65
15 6 25 5 14 65 65	9 6 25 7 18 65 65	16 4 25 5 15 65 65	16 6 25 4 14 65 65
303745#\65/65	319229#\65/65	332885#\65/65	348325#\65/65
9 19 1 16 20 65 65	9 19 1 15 21 65 65	8 19 1 15 22 65 65	15 21 1 10 18 65 65
15 22 3 8 17 65 65	22 20 3 13 7 65 65	18 21 3 9 14 65 65	22 16 3 11 13 65 65
2 14 13 24 12 65 65	2 17 12 23 11 65 65	2 16 13 24 10 65 65	2 19 12 23 9 65 65
21 6 23 10 5 65 65	18 5 24 8 10 65 65	20 4 23 11 7 65 65	6 4 24 14 17 65 65
18 4 25 7 11 65 65	14 4 25 6 16 65 65	17 5 25 6 12 65 65	20 5 25 7 8 65 65
361243#\65/65	373503#\65/65	383617#\65/65	395655#\65/65
9 17 1 16 22 65 65	13 16 1 17 18 65 65	12 17 1 14 21 65 65	11 12 1 18 23 65 65
20 21 3 7 14 65 65	22 15 3 6 19 65 65	22 15 3 16 9 65 65	19 21 3 7 15 65 65
2 18 13 24 8 65 65	2 21 12 23 7 65 65	2 20 13 24 6 65 65	2 20 14 24 5 65 65
15 4 23 12 11 65 65	8 9 24 14 10 65 65	19 5 23 7 11 65 65	16 4 22 10 13 65 65
19 5 25 6 10 65 65	20 4 25 5 11 65 65	10 8 25 4 18 65 65	17 8 25 6 9 65 65

403691#\65/65	411541#\65/65	419067#\65/65	446303#\65/65
14 11 1 18 21 65 65	12 13 1 16 23 65 65	10 21 1 16 17 65 65	17 21 1 14 12 65 65
19 16 3 12 15 65 65	17 18 4 6 20 65 65	19 22 2 13 9 65 65	10 20 2 15 18 65 65
2 22 13 24 4 65 65	2 22 14 24 3 65 65	3 4 14 20 24 65 65	3 4 13 22 23 65 65
20 9 23 5 8 65 65	19 7 21 10 8 65 65	18 6 23 11 7 65 65	19 9 24 8 5 65 65
10 7 25 6 17 65 65	15 5 25 9 11 65 65	15 12 25 5 8 65 65	16 11 25 6 7 65 65
504643#\65/65	527835#\65/65	550823#\65/65	574557#\65/65
11 24 1 16 13 65 65	14 20 1 18 12 65 65	16 21 1 18 9 65 65	9 21 1 18 16 65 65
15 20 2 10 18 65 65	22 19 2 7 15 65 65	17 22 2 11 13 65 65	22 20 2 10 11 65 65
3 5 14 21 22 65 65	3 5 13 23 21 65 65	3 4 14 24 20 65 65	3 7 13 23 19 65 65
17 9 23 12 4 65 65	10 17 24 8 6 65 65	10 12 23 5 15 65 65	17 12 24 8 4 65 65
19 7 25 6 8 65 65	16 4 25 9 11 65 65	19 6 25 7 8 65 65	14 5 25 6 15 65 65
593079#\65/65	610259#\65/65	628961#\65/65	647129#\65/65
13 20 1 16 15 65 65	12 18 1 19 15 65 65	9 22 1 18 15 65 65	7 20 1 18 19 65 65
19 22 2 5 17 65 65	14 22 2 6 21 65 65	21 20 2 12 10 65 65	22 21 2 8 12 65 65
3 6 14 24 18 65 65	3 9 13 23 17 65 65	3 8 14 24 16 65 65	3 11 13 23 15 65 65
9 10 23 12 11 65 65	16 11 24 10 4 65 65	19 11 23 5 7 65 65	17 9 24 10 5 65 65
21 7 25 8 4 65 65	20 5 25 7 8 65 65	13 4 25 6 17 65 65	16 4 25 6 14 65 65
662353#\65/65	678433#\65/65	691619#\65/65	703581#\65/65
7 17 1 18 22 65 65	9 20 1 14 21 65 65	10 24 1 13 17 65 65	8 16 1 21 19 65 65
23 20 2 5 15 65 65	19 23 2 4 17 65 65	19 16 2 8 20 65 65	22 20 2 9 12 65 65
3 8 16 24 14 65 65	3 10 15 24 13 65 65	3 15 14 21 12 65 65	3 15 13 23 11 65 65
19 9 21 12 4 65 65	16 7 22 12 8 65 65	11 4 23 18 9 65 65	18 10 24 7 6 65 65
13 11 25 6 10 65 65	18 5 25 11 6 65 65	22 6 25 5 7 65 65	14 4 25 5 17 65 65
715483#\65/65	727057#\65/65	737273#\65/65	749783#\65/65
12 21 1 11 20 65 65	10 21 1 15 18 65 65	15 17 1 19 13 65 65	9 17 1 16 22 65 65
24 15 2 19 5 65 65	22 14 2 7 20 65 65	9 21 2 11 22 65 65	21 20 2 12 10 65 65
3 16 14 22 10 65 65	3 17 13 23 9 65 65	3 16 14 24 8 65 65	3 19 13 23 7 65 65
18 4 23 7 13 65 65	11 8 24 16 6 65 65	18 7 23 5 12 65 65	18 4 24 8 11 65 65
8 9 25 6 17 65 65	19 5 25 4 12 65 65	20 4 25 6 10 65 65	14 5 25 6 15 65 65
758725#\65/65	767803#\65/65	776685#\65/65	784263#\65/65
12 20 1 11 21 65 65	12 14 1 16 22 65 65	11 17 1 15 21 65 65	10 20 1 18 16 65 65
19 15 2 13 16 65 65	15 19 2 9 20 65 65	22 13 2 12 16 65 65	21 23 2 14 5 65 65
3 18 14 24 6 65 65	3 21 13 23 5 65 65	3 20 14 24 4 65 65	4 3 15 19 24 65 65
22 8 23 7 5 65 65	18 4 24 11 8 65 65	19 8 23 9 6 65 65	17 7 22 8 11 65 65
9 4 25 10 17 65 65	17 7 25 6 10 65 65	10 7 25 5 18 65 65	13 12 25 6 9 65 65
813539#\65/65	836731#\65/65	886463#\65/65	908329#\65/65
12 13 1 22 17 65 65	20 19 1 9 16 65 65	15 19 1 22 8 65 65	10 21 1 18 15 65 65
24 20 2 10 9 65 65	18 21 2 17 7 65 65	24 17 2 13 9 65 65	22 19 2 14 8 65 65
4 3 16 19 23 65 65	4 3 13 23 22 65 65	4 6 14 20 21 65 65	4 5 13 23 20 65 65
18 15 21 6 5 65 65	12 8 24 6 15 65 65	10 18 23 3 11 65 65	17 11 24 7 6 65 65
7 14 25 8 11 65 65	11 14 25 10 5 65 65	12 5 25 7 16 65 65	12 9 25 3 16 65 65
932655#\65/65	953993#\65/65	975217#\65/65	993139#\65/65
11 21 1 12 20 65 65	11 17 1 14 22 65 65	8 19 1 16 21 65 65	8 21 1 20 15 65 65
15 24 2 8 16 65 65	21 19 2 15 8 65 65	20 22 2 10 11 65 65	22 19 2 12 10 65 65
4 6 14 22 19 65 65	4 7 13 23 18 65 65	4 6 14 24 17 65 65	4 9 13 23 16 65 65
17 5 23 13 7 65 65	20 6 24 10 5 65 65	18 5 23 12 7 65 65	17 11 24 7 6 65 65
18 9 25 10 3 65 65	9 16 25 3 12 65 65	15 13 25 3 9 65 65	14 5 25 3 18 65 65

[Total Count of Solutions = 275305224] OK!

** Calculated and Listed by Kanji Setsuda on
Apr. 12, 2015 with MacOSX 10.10.3 & Xcode 6.3 **

最初の方を詳しくすると、リストが長大になり過ぎた。あえて途中省略せざるを得ない。
奇数方陣の場合は、次のような仕様のリストも可能である。中央の n13 にインデックス・
マークをつけて、そこから数え始めてみた。

* 標準型五方陣の標準解の別仕様のリスト-2 : (抜粋) *

1#\65/65	4365793#\65/65	9830509#\65/65	17490445#\65/65
2 19 22 12 10 65 65	1 14 23 17 10 65 65	1 19 23 15 7 65 65	1 21 22 15 6 65 65
11 13 18 17 6 65 65	15 13 20 12 5 65 65	10 12 17 18 8 65 65	16 11 17 14 7 65 65
21 16 1 7 20 65 65	21 16 2 8 18 65 65	22 14 3 6 20 65 65	20 13 4 9 19 65 65
8 14 15 24 4 65 65	6 19 9 24 7 65 65	11 16 9 24 5 65 65	5 18 10 24 8 65 65
23 3 9 5 25 65 65	22 3 11 4 25 65 65	21 4 13 2 25 65 65	23 2 12 3 25 65 65
25325793#\65/65	35053017#\65/65	45456533#\65/65	57524057#\65/65
1 19 21 18 6 65 65	1 23 21 16 4 65 65	1 22 21 18 3 65 65	1 22 20 19 3 65 65
12 10 20 14 9 65 65	17 9 14 15 10 65 65	12 8 16 15 14 65 65	13 7 18 15 12 65 65
16 15 5 7 22 65 65	20 12 6 8 19 65 65	20 13 7 6 19 65 65	17 14 8 5 21 65 65
13 17 8 24 3 65 65	5 18 11 24 7 65 65	9 17 11 24 4 65 65	11 16 10 24 4 65 65
23 4 11 2 25 65 65	22 3 13 2 25 65 65	23 5 10 2 25 65 65	23 6 9 2 25 65 65
69972701#\65/65	83862861#\65/65	97238997#\65/65	112974269#\65/65
1 22 23 17 2 65 65	1 23 21 18 2 65 65	1 22 21 19 2 65 65	1 23 21 18 2 65 65
15 6 18 14 12 65 65	15 5 17 12 16 65 65	14 4 20 12 15 65 65	22 3 15 14 11 65 65
20 13 9 7 16 65 65	20 14 10 8 13 65 65	18 16 11 7 13 65 65	13 16 12 5 19 65 65
8 19 4 24 10 65 65	7 19 6 24 9 65 65	9 17 5 24 10 65 65	9 17 7 24 8 65 65
21 5 11 3 25 65 65	22 4 11 3 25 65 65	23 6 8 3 25 65 65	20 6 10 4 25 65 65
128112741#\65/65	147192485#\65/65	162330957#\65/65	178066229#\65/65
1 22 21 18 3 65 65	1 24 20 17 3 65 65	1 23 17 21 3 65 65	1 24 15 22 3 65 65
20 2 15 9 19 65 65	19 2 15 8 21 65 65	18 2 16 9 20 65 65	19 2 18 6 20 65 65
14 16 13 10 12 65 65	12 16 14 13 10 65 65	12 19 15 8 11 65 65	13 14 16 12 10 65 65
7 17 11 24 6 65 65	11 18 7 23 6 65 65	10 14 13 22 6 65 65	9 17 11 21 7 65 65
23 8 5 4 25 65 65	22 5 9 4 25 65 65	24 7 4 5 25 65 65	23 8 5 4 25 65 65
191442365#\65/65	205332525#\65/65	217781169#\65/65	229848693#\65/65
1 24 16 21 3 65 65	1 24 17 20 3 65 65	1 24 16 21 3 65 65	1 23 14 24 3 65 65
18 2 14 9 22 65 65	22 2 16 10 15 65 65	22 2 15 9 17 65 65	22 2 16 6 19 65 65
8 19 17 11 10 65 65	5 21 18 12 9 65 65	7 20 19 13 6 65 65	12 18 20 10 5 65 65
15 13 12 20 5 65 65	14 11 8 19 13 65 65	12 11 10 18 14 65 65	9 15 11 17 13 65 65
23 7 6 4 25 65 65	23 7 6 4 25 65 65	23 8 5 4 25 65 65	21 7 4 8 25 65 65
240252209#\65/65	249979433#\65/65	257814781#\65/65	265474717#\65/65
1 24 15 22 3 65 65	1 23 14 24 3 65 65	1 24 17 20 3 65 65	1 23 18 20 3 65 65
23 2 18 9 13 65 65	18 2 16 8 21 65 65	21 2 12 8 22 65 65	22 2 10 15 16 65 65
4 19 21 11 10 65 65	7 17 22 13 6 65 65	6 15 23 16 5 65 65	7 19 24 11 4 65 65
17 12 6 16 14 65 65	19 12 9 15 10 65 65	19 13 9 14 10 65 65	21 9 5 13 17 65 65
20 8 5 7 25 65 65	20 11 4 5 25 65 65	18 11 4 7 25 65 65	14 12 8 6 25 65 65
270939433#\65/65			
1 21 17 23 3 65 65			
22 2 11 12 18 65 65			
6 19 25 10 5 65 65			
20 9 8 13 15 65 65			
16 14 4 7 24 65 65			

[標準解の総数 = 275305224] OK!

** n13 の各値別に解の総数をカウントした結果 **

1: 4365792;	2: 5464716;	3: 7659936;	4: 7835348;	5: 9727224;
6: 10403516;	7: 12067524;	8: 12448644;	9: 13890160;	10: 13376136;
11: 15735272;	12: 15138472;	13: 19079744;	14: 15138472;	15: 15735272;
16: 13376136;	17: 13890160;	18: 12448644;	19: 12067524;	20: 10403516;
21: 9727224;	22: 7835348;	23: 7659936;	24: 5464716;	25: 4365792;

** 上の各値を標準解の総数に対する割合で表したリスト (百分率) **

1: 1.59%;	2: 1.98%;	3: 2.78%;	4: 2.85%;	5: 3.53%;
6: 3.78%;	7: 4.38%;	8: 4.52%;	9: 5.05%;	10: 4.86%;
11: 5.72%;	12: 5.50%;	13: 6.93%;	14: 5.50%;	15: 5.72%;
16: 4.86%;	17: 5.05%;	18: 4.52%;	19: 4.38%;	20: 3.78%;
21: 3.53%;	22: 2.85%;	23: 2.78%;	24: 1.98%;	25: 1.59%;

** Calculated and Listed by Kanji Setsuda on

三方陣では1個、四方陣では880個しか無かったのに、この多さは何てえことだろう。解の総数が多過ぎると、リスト出力が大変になる。解の分類や構造解析が、一向に進まない。およそ研究対象として適さないので、標準型の研究は潔く諦める。

【附記】

最近になって、 $n_{13}=13$ の場合の解の総数に特別の興味を持って研究して居られる方々の存在を知った。19,079,744個という個数も特定して居られた。見事と思う。

この解集合には、補数対称型や連立型の対称汎五方陣も当然含まれているのだが、それにしても、御指摘の通り特別に多い数だ。平均値の4% (=1/25) を優に超えている。

そして、上の最後に掲載したようなリストを作ってみると、分布に特徴があり、対称型の鋭い「鋸山」上にあることがわかった。その頂点に $n_{13}=13$ の解集合が来ている。

何か意味があるのであろうか？ 更なる構造研究が待たれることだ。

(June 7, 2000; Jan. 4, 2005; Apr. 13, 2015(改訂稿); Apr. 19, 2016(最新改訂稿):
MacOSX EIC 10.11.4 & Xcode 7.3 による計数・作表: 摂田 寛二(Kanji Setsuda))

E-Mail Address: jag12001@nifty.com

Homepage: <http://kanjissetsuda.la.coocan.jp>

第2節：対称五方陣の代数的研究

1. 目標を変更し、早速にも「補数対称型五方陣」を追究する。

n_{13} を中心として対称の位置にある2数の和を常に等しくするのである。

上の定義式に次の各式を付け加える。

$$\begin{aligned} n_1+n_{25}=n_2+n_{24}=n_3+n_{23}=n_4+n_{22}=n_5+n_{21}=n_6+n_{20}=n_7+n_{19} \\ =n_8+n_{18}=n_9+n_{17}=n_{10}+n_{16}=n_{11}+n_{15}=n_{12}+n_{14}=n_{13}+n_{13}=CC \quad \dots (14) \end{aligned}$$

この式の辺々を加えると、

$$\begin{aligned} n_1+n_2+n_3+n_4+\dots+n_{12}+n_{13}+n_{13}+n_{14}+\dots+n_{23}+n_{24}+n_{25}=13*CC \\ (n_1+n_2+n_3+\dots+n_{12}+n_{13}+n_{14}+\dots+n_{24}+n_{25})+n_{13}=13*CC \\ \{1+2+3+4+5+\dots+23+24+25\}+n_{13}=13*CC \end{aligned}$$

$$\text{すなわち,} \quad 325+n_{13}=13*CC \quad \dots (15)$$

$$\text{一方,} \quad n_{11}+n_{12}+n_{13}+n_{14}+n_{15}=65 \quad \dots (3)$$

$$(n_{11}+n_{15})+(n_{12}+n_{14})+n_{13}=65$$

$$CC+CC+n_{13}=65$$

$$\text{左右を入れ替えて,} \quad 65-n_{13}=2*CC \quad \dots (16)$$

$$(15), (16) \text{ の辺々を加えると,} \quad 390=15*CC$$

$$\therefore CC=26$$

(14)式の13ペアの2数は、いずれも「26の補数」を成すことがわかった。

$$\text{これを(16)に戻して} \quad 65-n_{13}=2*26$$

$$\text{よって} \quad n_{13}=13 \quad \dots (17)$$

対称五方陣の中央には定数13が必ず来る。

これは、 n_{13} が対称の中心点にあることの表現 ($n_{13}+n_{13}=26$) である。

2. 補数ペアの対称配置を見るには、下図のような「補数表現」が便利だ。

もともと n_{25} には、 n_1 にある数値と足して26になる数値が入っている。つまり、 $n_1+n_{25}=26$ なのだが、それをあえて $n_1+n_{\underline{1}}=26$ と表記している。

n_{24} には n_2 の補数が入っているのを、 $n_{\underline{2}}$ と表記している。

n_{23} には n_3 の補数が入っているのを、 $n_{\underline{3}}$ と表記している。

.....

n_{14} には n_{12} の補数が入っているのを、 $n_{\underline{12}}$ と表記している。

対称五方陣の補数表現：

[原形]

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

[補数表現]

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	<u>12</u>	<u>11</u>
16	17	18	19	20
<u>10</u>	<u>9</u>	<u>8</u>	<u>7</u>	<u>6</u>
<u>5</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>1</u>

- $n_1 + n_{11} = 26$
- $n_2 + n_{22} = 26$
- $n_3 + n_{33} = 26$
- $n_4 + n_{44} = 26$
- $n_5 + n_{55} = 26$
- $n_6 + n_{66} = 26$
-
- $n_{10} + n_{10} = 26$
- $n_{11} + n_{11} = 26$
- $n_{12} + n_{12} = 26$
- $n_{13} = n_{13} = 13$

3. ここで行または列の交換移動による派生形の構成を考える。一般に補数対称型五方陣では、補数ペアの対称配置ゆえに、次のような行/列の交換移動が可能である。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	<u>12</u>	<u>11</u>
<u>10</u>	<u>9</u>	<u>8</u>	<u>7</u>	<u>6</u>
<u>5</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>1</u>
C1	C2	C3	C4	C5

- R1 (1) 縦の C2列と C4列をそっくり交換できる。
- (2) 横の R2行と R4行をそっくり交換できる。
- R2 (3) 縦の C1列と C5列をそっくり交換できる。
- (4) 横の R1行と R5行をそっくり交換できる。
- R3 (5) 縦の外側と内側を2列ごと交換できる。
(C1 \leftrightarrow C2) & (C4 \leftrightarrow C5)
- R4 (6) 横の外側と内側を2行ごと交換できる。
(R1 \leftrightarrow R2) & (R4 \leftrightarrow R5)
- R5 この6種類の交換移動を組み合わせてもよい。
同種の変換を2度繰り返すのは意味が無い。
元に戻るだけだから。

上の交換の結果を下に例示しよう。移動しても、各行列の内容は全然変わらないから、定和は定義式によって保証される。問題は、主対角線の定和が保たれるかどうかということ。つまり、 n_{13} を挟んで対称の位置に $n_N + n_N = 26$ のペアが2組見つければよい。

<p>(1)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td></tr> <tr><td>6</td><td>9</td><td>8</td><td>7</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td><u>12</u></td><td>13</td><td>12</td><td><u>11</u></td></tr> <tr><td><u>10</u></td><td><u>7</u></td><td><u>8</u></td><td><u>9</u></td><td><u>6</u></td></tr> <tr><td><u>5</u></td><td><u>2</u></td><td><u>3</u></td><td><u>4</u></td><td><u>1</u></td></tr> </table>	1	4	3	2	5	6	9	8	7	10	11	<u>12</u>	13	12	<u>11</u>	<u>10</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>6</u>	<u>5</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	<p>(2)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td><u>10</u></td><td><u>9</u></td><td><u>8</u></td><td><u>7</u></td><td><u>6</u></td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td><u>12</u></td><td><u>11</u></td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td><u>5</u></td><td><u>4</u></td><td><u>3</u></td><td><u>2</u></td><td><u>1</u></td></tr> </table>	1	2	3	4	5	<u>10</u>	<u>9</u>	<u>8</u>	<u>7</u>	<u>6</u>	11	12	13	<u>12</u>	<u>11</u>	6	7	8	9	10	<u>5</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>1</u>	<p>(3)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>5</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td></tr> <tr><td>10</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>6</td></tr> <tr><td><u>11</u></td><td>12</td><td>13</td><td><u>12</u></td><td>11</td></tr> <tr><td><u>6</u></td><td><u>9</u></td><td><u>8</u></td><td><u>7</u></td><td><u>10</u></td></tr> <tr><td><u>1</u></td><td><u>4</u></td><td><u>3</u></td><td><u>2</u></td><td><u>5</u></td></tr> </table>	5	2	3	4	1	10	7	8	9	6	<u>11</u>	12	13	<u>12</u>	11	<u>6</u>	<u>9</u>	<u>8</u>	<u>7</u>	<u>10</u>	<u>1</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>5</u>
1	4	3	2	5																																																																									
6	9	8	7	10																																																																									
11	<u>12</u>	13	12	<u>11</u>																																																																									
<u>10</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>6</u>																																																																									
<u>5</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>1</u>																																																																									
1	2	3	4	5																																																																									
<u>10</u>	<u>9</u>	<u>8</u>	<u>7</u>	<u>6</u>																																																																									
11	12	13	<u>12</u>	<u>11</u>																																																																									
6	7	8	9	10																																																																									
<u>5</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>1</u>																																																																									
5	2	3	4	1																																																																									
10	7	8	9	6																																																																									
<u>11</u>	12	13	<u>12</u>	11																																																																									
<u>6</u>	<u>9</u>	<u>8</u>	<u>7</u>	<u>10</u>																																																																									
<u>1</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>5</u>																																																																									
<p>(4)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td><u>5</u></td><td><u>4</u></td><td><u>3</u></td><td><u>2</u></td><td><u>1</u></td></tr> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td><u>12</u></td><td><u>11</u></td></tr> <tr><td><u>10</u></td><td><u>9</u></td><td><u>8</u></td><td><u>7</u></td><td><u>6</u></td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> </table>	<u>5</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>1</u>	6	7	8	9	10	11	12	13	<u>12</u>	<u>11</u>	<u>10</u>	<u>9</u>	<u>8</u>	<u>7</u>	<u>6</u>	1	2	3	4	5	<p>(5)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>4</td></tr> <tr><td>7</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>9</td></tr> <tr><td>12</td><td>11</td><td>13</td><td><u>11</u></td><td><u>12</u></td></tr> <tr><td><u>9</u></td><td><u>10</u></td><td><u>8</u></td><td><u>6</u></td><td><u>7</u></td></tr> <tr><td><u>4</u></td><td><u>5</u></td><td><u>3</u></td><td><u>1</u></td><td><u>2</u></td></tr> </table>	2	1	3	5	4	7	6	8	10	9	12	11	13	<u>11</u>	<u>12</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	<u>8</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<p>(6)</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td><u>12</u></td><td><u>11</u></td></tr> <tr><td><u>5</u></td><td><u>4</u></td><td><u>3</u></td><td><u>2</u></td><td><u>1</u></td></tr> <tr><td><u>10</u></td><td><u>9</u></td><td><u>8</u></td><td><u>7</u></td><td><u>6</u></td></tr> </table>	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	11	12	13	<u>12</u>	<u>11</u>	<u>5</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>1</u>	<u>10</u>	<u>9</u>	<u>8</u>	<u>7</u>	<u>6</u>
<u>5</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>1</u>																																																																									
6	7	8	9	10																																																																									
11	12	13	<u>12</u>	<u>11</u>																																																																									
<u>10</u>	<u>9</u>	<u>8</u>	<u>7</u>	<u>6</u>																																																																									
1	2	3	4	5																																																																									
2	1	3	5	4																																																																									
7	6	8	10	9																																																																									
12	11	13	<u>11</u>	<u>12</u>																																																																									
<u>9</u>	<u>10</u>	<u>8</u>	<u>6</u>	<u>7</u>																																																																									
<u>4</u>	<u>5</u>	<u>3</u>	<u>1</u>	<u>2</u>																																																																									
6	7	8	9	10																																																																									
1	2	3	4	5																																																																									
11	12	13	<u>12</u>	<u>11</u>																																																																									
<u>5</u>	<u>4</u>	<u>3</u>	<u>2</u>	<u>1</u>																																																																									
<u>10</u>	<u>9</u>	<u>8</u>	<u>7</u>	<u>6</u>																																																																									

(1)と(3)が、実は同じ結果になっていることにお気づきだろうか。左右を反転しただけの形で、内容は全く同じだ。(2)と(4)も、反転しただけで、同一の解だ。

* 回転・反転移動によって得られる8形 *

0/ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25	1/ 21 16 11 6 1 22 17 12 7 2 23 18 13 8 3 24 19 14 9 4 25 20 15 10 5	2/ 25 24 23 22 21 20 19 18 17 16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1	3/ 5 10 15 20 25 4 9 14 19 24 3 8 13 18 23 2 7 12 17 22 1 6 11 16 21
4/ 1 6 11 16 21 2 7 12 17 22 3 8 13 18 23 4 9 14 19 24 5 10 15 20 25	5/ 5 4 3 2 1 10 9 8 7 6 15 14 13 12 11 20 19 18 17 16 25 24 23 22 21	6/ 25 20 15 10 5 24 19 14 9 4 23 18 13 8 3 22 17 12 7 2 21 16 11 6 1	7/ 21 22 23 24 25 16 17 18 19 20 11 12 13 14 15 6 7 8 9 10 1 2 3 4 5

我々は、上の並び方をした解の8形をすべて同一と考える。

そうすると前ページの(1)と(3)，(2)と(4)は、どちらか一方しか使えないことになる。(1)と(2)，(1)と(5)，(2)と(5)，(2)と(6)などは、別個の解に書き換えられている。

方向を考えて分け、(1)と(5)と(1)+(5)，(2)と(6)と(2)+(6)の変換を採用する。無変換も入れると、縦の行で4種類、横の列で4種類の変換が可能である。縦と横の組み合わせも可能だから、結局 $4 \times 4 = 16$ 通りの変換ができるわけだ。

下表が、その16通りだ。先頭の 0/ は、原形を無変換のまま出力している。

*** 補数対称型五方陣の 4×4 の変換法システム (概念図) ***

0/ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25	1/ 1 4 3 2 5 6 9 8 7 10 11 14 13 12 15 16 19 18 17 20 21 24 23 22 25	2/ 2 1 3 5 4 7 6 8 10 9 12 11 13 15 14 17 16 18 20 19 22 21 23 25 24	3/ 4 1 3 5 2 9 6 8 10 7 14 11 13 15 12 19 16 18 20 17 24 21 23 25 22
4/ 1 2 3 4 5 16 17 18 19 20 11 12 13 14 15 6 7 8 9 10 21 22 23 24 25	5/ 1 4 3 2 5 16 19 18 17 20 11 14 13 12 15 6 9 8 7 10 21 24 23 22 25	6/ 2 1 3 5 4 17 16 18 20 19 12 11 13 15 14 7 6 8 10 9 22 21 23 25 24	7/ 4 1 3 5 2 19 16 18 20 17 14 11 13 15 12 9 6 8 10 7 24 21 23 25 22
8/ 6 7 8 9 10 1 2 3 4 5 11 12 13 14 15 21 22 23 24 25 16 17 18 19 20	9/ 6 9 8 7 10 1 4 3 2 5 11 14 13 12 15 21 24 23 22 25 16 19 18 17 20	10/ 7 6 8 10 9 2 1 3 5 4 12 11 13 15 14 22 21 23 25 24 17 16 18 20 19	11/ 9 6 8 10 7 4 1 3 5 2 14 11 13 15 12 24 21 23 25 22 19 16 18 20 17
12/ 16 17 18 19 20 1 2 3 4 5 11 12 13 14 15 21 22 23 24 25 6 7 8 9 10	13/ 16 19 18 17 20 1 4 3 2 5 11 14 13 12 15 21 24 23 22 25 6 9 8 7 10	14/ 17 16 18 20 19 2 1 3 5 4 12 11 13 15 14 22 21 23 25 24 7 6 8 10 9	15/ 19 16 18 20 17 4 1 3 5 2 14 11 13 15 12 24 21 23 25 22 9 6 8 10 7

4. 横 R3行 {n11, n12, n13, n14, n15} と縦 C3列 {n3, n8, n13, n18, n23} の構成要素

は、上のいずれの変換でも、全く変わっていない(順不同)。

1	2	3	4	5	R1
6	7	8	9	10	R2
11	12	13	14	15	R3
16	17	18	19	20	R4
21	22	23	24	25	R5
C1	C2	C3	C4	C5	

ているものを基本形として、計数することができる。

{n3, n8, n13, n18, n23}, {n11, n12, n13, n14, n15} にある 1 は、この中でしか動けない。従って、この場合のホームポジションを n3 に仮定する。そして n3=1 (すなわち n23=25) となっているものを基本形として計数する。

こうした 2 種類 (n1=1 および n3=1) の計数で基本解が得られれば、規則的な 16 通りの変換によって、他の形の方陣を後で復原することができる。16 分の 1 の基本解だけを計数することができれば、時間も手間もだいぶ省けそうだ。

ところで {n11, n12, n13, n14, n15} の並び方は、幾つあるだろうか。

n13 は不変不動だ。さらに {n11, n15}, {n12, n14} は補数のペアで対称の位置に収まるから、

{n11, n12, n13, n14, n15}, {n15, n12, n13, n14, n11},
 {n11, n14, n13, n12, n15}, {n15, n14, n13, n12, n11},
 {n12, n11, n13, n15, n14}, {n12, n15, n13, n11, n14},
 {n14, n11, n13, n15, n12}, {n14, n15, n13, n11, n12} の 8 通りある。

左右をただ反転させただけの場合を同一と数えよう。そうすれば 4 通りしかない。8 通りを 4 通りにするには、n11<n15 という条件を付けて、構成・計数する。

さらに n11<n12, n12<n14 を仮定すれば、この 4 通りを 1 通りにすることができる。順列を言わず組合わせだけ考えれば、本来 1 通りと見なすべきなのだから。

{n3, n8, n13, n18, n23} の場合も、同様に 4 通りの並び方がある。これも、n3<n23 とした上で、n3<n8<n18 を仮定する。いま n3=1 (すなわち n23=25) を基本形としたのだから、すでに n3<n23 は言えているが。

n1=1 (すなわち n25=25) の基本形の場合には、重複計数を避けるために、次のように不等式を仮定する。

例えば、n1<n5<n21 (サイコロ回転を禁じる)。そうした上で、行列の交換移動を防ぐために n1<n2<n4, n1<n6<n16 とする。こうすれば、必要な解を減らさずに計数し、無駄な解の計数をかなり減らすことができるはずである。

5. 解はたくさんある。予想では、1000を下らない。全部を数え上げるためには、プログラムによってパソコンを動かし探索・計数することにする。

2 種類の基本形を用意し、別々に数えてみよう。

n3=1 (すなわち n23=25) を基本形とする場合は、まず縦の中央列の {n3, n8, n13, n18, n23} から決めて行く。n13=13 は決まっている。{n8, n18} にはそれぞれ 26 の補数を入れればよい。

次に横の中央行 {n11, n12, n13, n14, n15} を決める。{n11, n15}, {n12, n14} は、26 の補数だ。

$n1 = 1$ (すなわち $n25 = 25$) の基本形の場合には、斜めの対角線から決めて行く。

実際の計数結果は、以下のごとくであった。全部で $1948 + 1086 = 3034$ 個。

* 補数対称五方陣の基本解のリスト : タイプ $n1=1$ *

1/					100/					311/					440/				
1	22	17	23	2	1	22	15	24	3	1	21	15	24	4	1	23	12	24	5
8	19	11	21	6	17	12	21	7	8	17	10	23	8	7	19	15	16	9	6
12	16	13	10	14	6	10	13	16	20	6	14	13	12	20	4	8	13	18	22
20	5	15	7	18	18	19	5	14	9	19	18	3	16	9	20	17	10	11	7
24	3	9	4	25	23	2	11	4	25	22	2	11	5	25	21	2	14	3	25
647/					780/					995/					1158/				
1	23	11	24	6	1	23	10	24	7	1	23	9	24	8	1	23	8	24	9
19	10	17	14	5	20	17	12	11	5	15	16	21	6	7	20	11	14	16	4
4	18	13	8	22	4	8	13	18	22	12	4	13	22	14	5	19	13	7	21
21	12	9	16	7	21	15	14	9	6	19	20	5	10	11	22	10	12	15	6
20	2	15	3	25	19	2	16	3	25	18	2	17	3	25	17	2	18	3	25
1423/					1556/					1790/									
1	23	7	24	10	1	23	6	24	11	1	23	5	24	12					
9	22	15	14	5	18	19	14	10	4	18	9	19	15	4					
18	6	13	20	8	9	5	13	21	17	10	20	13	6	16					
21	12	11	4	17	22	16	12	7	8	22	11	7	17	8					
16	2	19	3	25	15	2	20	3	25	14	2	21	3	25	[Count = 1948]				

* 補数対称五方陣の基本解のリスト : タイプ $n3=1$ *

1949/					2260/					2307/					2596/								
15	18	1	14	17	12	20	1	24	8	10	19	1	21	14	7	22	1	20	15				
19	21	3	16	6	22	15	5	7	16	24	18	3	9	11	24	16	3	14	8				
2	4	13	22	24	3	9	13	17	23	4	6	13	20	22	5	9	13	17	21				
20	10	23	5	7	10	19	21	11	4	15	17	23	8	2	18	12	23	10	2				
9	12	25	8	11	18	2	25	6	14	12	5	25	7	16	11	6	25	4	19				
2686/					2854/					2872/					2960/								
7	21	1	22	14	10	12	1	22	20	21	7	1	22	14	4	23	1	19	18				
24	17	3	11	10	24	21	3	9	8	15	24	3	6	17	24	14	5	16	6				
6	8	13	18	20	7	11	13	15	19	8	10	13	16	18	9	11	13	15	17				
16	15	23	9	2	18	17	23	5	2	9	20	23	2	11	20	10	21	12	2				
12	4	25	5	19	6	4	25	14	16	12	4	25	19	5	8	7	25	3	22				
2972/																							
6	17	1	19	22																			
24	18	3	15	5																			
10	12	13	14	16																			
21	11	23	8	2																			
4	7	25	9	20	[Count = 1086]																		

[Total Count = 1948 + 1086 = 3034] OK!

試みに $n3=1$ のタイプの第1番解を例にとって 4×4 の変換法システムで 16通りに変換してみよう。

* 補数対称五方陣の基本解を標準解に変換する実験 *

0/ 15 18 1 14 17 19 21 3 16 6 2 4 13 22 24 20 10 23 5 7 9 12 25 8 11	1/ 15 14 1 18 17 19 16 3 21 6 2 22 13 4 24 20 5 23 10 7 9 8 25 12 11	2/ 18 15 1 17 14 21 19 3 6 16 4 2 13 24 22 10 20 23 7 5 12 9 25 11 8	3/ 18 17 1 15 14 21 6 3 19 16 4 24 13 2 22 10 7 23 20 5 12 11 25 9 8
4/ 15 18 1 14 17 20 10 23 5 7 2 4 13 22 24 19 21 3 16 6 9 12 25 8 11	5/ 15 14 1 18 17 20 5 23 10 7 2 22 13 4 24 19 16 3 21 6 9 8 25 12 11	6/ 18 15 1 17 14 10 20 23 7 5 4 2 13 24 22 21 19 3 6 16 12 9 25 11 8	7/ 18 17 1 15 14 10 7 23 20 5 4 24 13 2 22 21 6 3 19 16 12 11 25 9 8
8/ 6 17 24 11 7 16 14 22 8 5 3 1 13 25 23 21 18 4 12 10 19 15 2 9 20	9/ 6 17 24 11 7 21 18 4 12 10 3 1 13 25 23 16 14 22 8 5 19 15 2 9 20	10/ 5 7 23 20 10 8 11 25 9 12 22 24 13 2 4 14 17 1 15 18 16 6 3 19 21	11/ 5 20 23 7 10 8 9 25 11 12 22 2 13 24 4 14 15 1 17 18 16 19 3 6 21
12/ 6 11 24 17 7 16 8 22 14 5 3 25 13 1 23 21 12 4 18 10 19 9 2 15 20	13/ 6 11 24 17 7 21 12 4 18 10 3 25 13 1 23 16 8 22 14 5 19 9 2 15 20	14/ 5 7 23 20 10 14 17 1 15 18 22 24 13 2 4 8 11 25 9 12 16 6 3 19 21	15/ 5 20 23 7 10 14 15 1 17 18 22 2 13 24 4 8 9 25 11 12 16 19 3 6 21

こうした派生形まで全て含めると、標準解の総数は $(1948+1086) \times 16 = 48544$ 個あると推理される。

(June 7, 2000(初稿): NWCW による計数; Jan. 4, 2005(改訂稿):
MacOS Xcode1.5 による計数・作表: 摂田 寛二(Kanji Setsuda))

第3節：立体三方陣の代数的研究

1. 定義：基本ポジションを下図に示す。1とあるのは、変数 n_1 のことである。

1 ——— 10 ——— 19	2 とあるのは、変数 n_2 のことである。
2 11 20	3 とあるのは、変数 n_3 のことである。
4 3 —13—12—22—21	4 とあるのは、変数 n_4 のことである。
5 14 23	9 とあるのは、変数 n_9 のことである。
7—6—16—15—25 24	...
8 17 26	26 とあるのは、 n_{26} のことである。
9 ——— 18 ——— 27	27 とあるのは、 n_{27} のことである。

2. 定義：1～27 の重複しない自然数を全て用いて次の連立方程式を満たすものとする。

先ずX方向に9本。

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_3 &= C \dots (1) \\ n_4 + n_5 + n_6 &= C \dots (2) \\ n_7 + n_8 + n_9 &= C \dots (3) \\ n_{10} + n_{11} + n_{12} &= C \dots (4) \\ n_{13} + n_{14} + n_{15} &= C \dots (5) \\ n_{16} + n_{17} + n_{18} &= C \dots (6) \\ n_{19} + n_{20} + n_{21} &= C \dots (7) \\ n_{22} + n_{23} + n_{24} &= C \dots (8) \\ n_{25} + n_{26} + n_{27} &= C \dots (9) \end{aligned}$$

次にY方向に9本。

$$\begin{aligned} n_1 + n_4 + n_7 &= C \dots (10) \\ n_2 + n_5 + n_8 &= C \dots (11) \\ n_3 + n_6 + n_9 &= C \dots (12) \\ n_{10} + n_{13} + n_{16} &= C \dots (13) \\ n_{11} + n_{14} + n_{17} &= C \dots (14) \\ n_{12} + n_{15} + n_{18} &= C \dots (15) \\ n_{19} + n_{22} + n_{25} &= C \dots (16) \\ n_{20} + n_{23} + n_{26} &= C \dots (17) \\ n_{21} + n_{24} + n_{27} &= C \dots (18) \end{aligned}$$

次にZ方向に9本。

$$\begin{aligned} n_1 + n_{10} + n_{19} &= C \dots (19) \\ n_2 + n_{11} + n_{20} &= C \dots (20) \\ n_3 + n_{12} + n_{21} &= C \dots (21) \\ n_4 + n_{13} + n_{22} &= C \dots (22) \\ n_5 + n_{14} + n_{23} &= C \dots (23) \\ n_6 + n_{15} + n_{24} &= C \dots (24) \\ n_7 + n_{16} + n_{25} &= C \dots (25) \\ n_8 + n_{17} + n_{26} &= C \dots (26) \\ n_9 + n_{18} + n_{27} &= C \dots (27) \end{aligned}$$

立方体の対角線上の4本。

$$\begin{aligned} n_1 + n_{14} + n_{27} &= C \dots (28) \\ n_3 + n_{14} + n_{25} &= C \dots (29) \\ n_7 + n_{14} + n_{21} &= C \dots (30) \\ n_9 + n_{14} + n_{19} &= C \dots (31) \end{aligned}$$

立方体表面の n_{14} を含まない対角線上の4数の和については、特に条件を付けない。へたに厳しい条件を付けると、正解が1つも得られなくなるから。

ここで(1)~(9)式の辺々を加えると、

$$\{n_1 + n_2 + \dots + n_{26} + n_{27}\} = 9 * C$$

左辺には、自然数1, 2, 3, ..., 26, 27の全てが入るから、

$$27 * (27 + 1) \div 2 = 9 * C$$

$$\therefore C = 42 \quad \dots (32)$$

3. n_{14} について整理する。

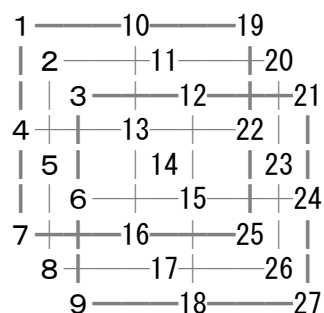
$$\begin{aligned} n_{13} + n_{14} + n_{15} &= C \dots (5) \\ n_{11} + n_{14} + n_{17} &= C \dots (14) \\ n_5 + n_{14} + n_{23} &= C \dots (23) \\ n_1 + n_{14} + n_{27} &= C \dots (28) \\ n_3 + n_{14} + n_{25} &= C \dots (29) \\ n_7 + n_{14} + n_{21} &= C \dots (30) \\ n_9 + n_{14} + n_{19} &= C \dots (31) \end{aligned}$$

n_{14} を右辺に移項すると、

$$n_1 + n_{27} = n_3 + n_{25} = n_5 + n_{23} = n_7 + n_{21}$$

$$= n_9 + n_{19} = n_{11} + n_{17} = n_{13} + n_{15} = C - n_{14} \quad (=CCとおく) \quad \dots (33)$$

14数7ペアが「CCの補数」を成すことがわかった。



一方, $n_1 + n_2 + n_3 = C \dots (1)$

+ $n_{25} + n_{26} + n_{27} = C \dots (9)$

$$\begin{aligned} \{n_1 + n_{27}\} + \{n_3 + n_{25}\} + \{n_2 + n_{26}\} &= 2 * C \\ CC + CC + \{n_2 + n_{26}\} &= 2 * C \\ \{n_2 + n_{26}\} &= 2 * C - 2 * CC = 2 * (C - CC) \\ &= 2 * \{C - (C - n_{14})\} = 2 * n_{14} \end{aligned}$$

同様に $n_1 + n_4 + n_7 = C \dots (10)$

+ $n_{21} + n_{24} + n_{27} = C \dots (18)$

$$\begin{aligned} \{n_1 + n_{27}\} + \{n_7 + n_{21}\} + \{n_4 + n_{24}\} &= 2 * C \\ \{n_4 + n_{24}\} &= 2 * C - 2 * CC = 2 * (C - CC) = 2 * n_{14} \end{aligned}$$

まとめて整理すると、

$$\begin{aligned}n^2 + n^{26} &= n^4 + n^{24} = n^6 + n^{22} \\ &= n^8 + n^{20} = n^{10} + n^{18} = n^{12} + n^{16} = 2 * n^{14} \quad (=DD \text{とおく}) \quad \dots (34)\end{aligned}$$

12数6ペアが「DDの補数」を成すことがわかった (n14 は、1人2役の特別数)。(33), (34)式から、DD=84-2*CC という関係式を得る。

4. CC/DDは、具体的にどんな値を取れるだろうか。

仮に CC=20 とする。DD=44 となる。和が 20となる2数の組み合わせを7ペアと、和が 44になるような2数を6ペア用意しなければならないのだが、これは不可能である。

CC1(1, 19), DD1{27, 17}; CC2(2, 18), DD2{24, 20}; CC3(4, 16), DD3{23, 21}; CC4(5, 15), DD4{21, 23}; ... と行き詰まる。今は組み合わせだから、DD4 と DD3 は同じ内容だ。重複矛盾する。

では、CC=23 と仮定する。DD=38 となる。

CC1(1, 22), DD1{27, 11}; CC2(2, 21), DD2{26, 12}; CC3(3, 20), DD3{25, 13}; CC4(4, 19), DD4{24, 14}; CC5(5, 18), DD5{23, 15}; CC6(6, 17), DD6{22?, 16}; ...

DD6 の 22は、CC1(1, 22)で使っている。同じ数を2度使うことは許されていない。{21, 17}, {20, 18}, {19, 19} ... も不可能だ。

では、CC=27 と仮定する。DD=30 となる。

CC1(1, 26), DD1{27, 3}; CC2(2, 25), DD2{24, 6}; CC3(4, 23), DD3{22, 8}; CC4(7, 20), DD4{21, 9}; CC5(10, 17), DD5{18, 12}; CC6(11, 16), DD6(15, 15?); ... あと1歩で行き詰まる。同じ数を2度使うことは許されない。

.....

CC/DD の補数を用意する時には、CC, DD, CC, DD, ... と交互に数を組み分けしながらペアリングするのだが、CC組は小さい数から確保して行く。DD組は大きい数から確保して行く。そして、使われていないフリーな相手を見つける。何組作れるかが勝負なのだが、丹念に調べて見て、CC=DD=28 の場合以外には無理だとわかる。

CC=DD=28 ならば、

CC1(1, 27), DD1{26, 2}; CC2(3, 25), DD2{24, 4}; CC3(5, 23), DD3{22, 6}; CC4(7, 21), DD4{20, 8}; CC5(9, 19), DD5{18, 10}; CC6(11, 17), DD6{16, 12}; CC7(13, 15)

となって、めでたく CC組が7ペアと DD組が6ペア出来る。そして、この組み合わせだけが(33), (34)式を満たすことができる。

よって、CC=DD=28 を (33), (34)の $C-n_{14}=CC$ および $2*n_{14}=DD$ に戻して、 $n_{14}=14$ を得る。そして、下の(35)式のように「28の補数」が13組26数そろった。

$$\begin{aligned}n^1 + n^{27} &= n^2 + n^{26} = n^3 + n^{25} = n^4 + n^{24} = n^5 + n^{23} = n^6 + n^{22} = n^7 + n^{21} \\ &= n^8 + n^{20} = n^9 + n^{19} = n^{10} + n^{18} = n^{11} + n^{17} = n^{12} + n^{16} = n^{13} + n^{15} = 28 \quad \dots (35)\end{aligned}$$

CC=DD=28 となったために、CC/DD の区別はもう必要無くなった。お互いに「28の補数」であるならば、どのペアともその位置を交換できるようになった。

確定した補数相互の位置関係を調べると、これが皆 n14 をはさんで対称の位置にある。1~27の自然数を用いる立体三方陣は、かくして必然的に「補数対称型」になるのである。平面の三方陣の時もそうであったが、立体三方陣も補数対称方陣にならざるを得ない。

必ず対称型になるのであれば、最初から対称型の立体三方陣を作るのが、賢い構成法だ。つまり $n_{14}=14$ と最初から想定し、下記の28の補数13ペアを対称の位置にどんどん並べて行くのである。調べる場合の数を激減できる。それなのに、結果は同じになる。

$$\begin{aligned}1 + 27 &= 2 + 26 = 3 + 25 = 4 + 24 = 5 + 23 = 6 + 22 = 7 + 21 \\ &= 8 + 20 = 9 + 19 = 10 + 18 = 11 + 17 = 12 + 16 = 13 + 15 \quad (=28)\end{aligned}$$

解は幾つあるであろうか。

5. 解の総数を求める前に考えておかなければならない大切なことがある。

次図を見てほしい。立方体の基本図をただ転がして得た形だが、これらを別個の解と認められるだろうか。

<p>(1)</p> <pre> 1 10 19 2 11 20 3 12 21 4 13 22 5 14 23 6 15 24 7 16 25 8 17 26 9 18 27 </pre>	<p>(2)</p> <pre> 7 16 25 8 17 26 9 18 27 4 13 22 5 14 23 6 15 24 1 10 19 2 11 20 3 12 21 </pre>	<p>(3)</p> <pre> 19 10 1 20 11 2 21 12 3 22 13 4 23 14 5 24 15 6 25 16 7 26 17 8 27 18 9 </pre>
<p>(4)</p> <pre> 3 12 21 2 11 20 1 10 19 6 15 24 5 14 23 4 13 22 9 18 27 8 17 26 7 16 25 </pre>	<p>(5)</p> <pre> 25 16 7 26 17 8 27 18 9 22 13 4 23 14 5 24 15 6 19 10 1 20 11 2 21 12 3 </pre>	<p>(6)</p> <pre> 9 18 27 8 17 26 7 16 25 6 15 24 5 14 23 4 13 22 3 12 21 2 11 20 1 10 19 </pre>
<p>(7)</p> <pre> 21 12 3 20 11 2 19 10 1 24 15 6 23 14 5 22 13 4 27 18 9 26 17 8 25 16 7 </pre>	<p>(8)</p> <pre> 27 18 9 26 17 8 25 16 7 24 15 6 23 14 5 22 13 4 21 12 3 20 11 2 19 10 1 </pre>	

小生は、反転形・回転形を「異形」とせず、「同一解」として扱うことにしている。では、単純な反転形・回転形は、一体全体いくつあるのだろうか。上の8個だけではない。下図を見てほしい。

<p>1/</p> <pre> 1 23 18 15 7 20 26 12 4 17 3 22 19 14 9 6 25 11 24 16 2 8 21 13 10 5 27 </pre>	<p>2/</p> <pre> 1 17 24 15 19 8 26 6 10 23 3 16 7 14 21 12 25 5 18 22 2 20 9 13 4 11 27 </pre>	<p>3/</p> <pre> 1 23 18 17 3 20 24 7 16 15 7 20 19 14 9 8 21 13 26 12 4 6 25 11 10 5 27 </pre>
<p>4/</p> <pre> 1 15 26 17 19 6 24 8 10 23 7 12 3 14 25 16 21 5 18 20 4 22 9 11 2 13 27 </pre>	<p>5/</p> <pre> 1 17 24 23 3 16 18 22 2 15 19 8 7 14 21 20 9 13 26 6 10 12 25 5 4 11 27 </pre>	<p>6/</p> <pre> 1 15 26 23 7 12 18 20 4 17 19 6 3 14 25 22 9 11 24 8 10 16 21 5 2 13 27 </pre>

1が n1 にあるタイプだけでも、こういう変化もあるのである。これらも「同一解」とは認めがたい。行列や主対角線の内容が全く同一で、特に {n3, n7, n19} に注目すれば、{18,

24, 26}の並び方が違うだけなのである。3 × 2 × 1 = 6通りある。

立方体の8つの頂点に平等に1が来るとして、全部で8 × 6通りの変形が可能だ。
ゆえに「解の母集合」を無作為に求めると、各48個ずつの同一解が含まれてしまう。

派生形を1つにまとめ、「同一解」を重複なく1つと数えるようにしたい。そうするためにはどうすれば良いか。

工夫として「リスト出力用の不等式」を加える方法を提案する。さいころがコロコロ回転しないように、いつでも n1 の値を他の頂点の値より軽くする。そのために、
n1 < n3, n1 < n7, n1 < n9, n1 < n19, n1 < n21, n1 < n25, n1 < n27 とするのである。

さらに n1-n14-n27 を軸とする回転移動も封じるために n3 < n7 < n19 とするのである。そうすれば、48分の1のサイズで「標準解のリスト」が得られるはずだ。

以下にそのリストを示す。代表解の総数は4個だから、母集合には 4 × 48 = 192個の解が含まれることになる。

* 補数対称型立体三方陣の標準解のリスト *

1/ 1-----15-----26 23 7 12 18-----20----- 4 17 19 6 3 14 25 22 9 11 24----- 8-----10 16 21 5 2-----13-----27	2/ 2-----15-----25 24 7 11 16-----20----- 6 18 19 5 1 14 27 23 9 10 22----- 8-----12 17 21 4 3-----13-----26	3/ 4-----17-----21 26 3 13 12-----22----- 8 18 19 5 1 14 27 23 9 10 20----- 6-----16 15 25 2 7-----11-----24	4/ 6-----16-----20 26 3 13 10-----23----- 9 17 21 4 1 14 27 24 7 11 19----- 5-----18 15 25 2 8-----12-----22
---	---	---	---

[Count = 4] OK!

ところで、最初に示した反転・回転形を見ると、n1が立体の8頂点に平等に移動することが可能である。ということは、この変換を逆に使えば、他の頂点にある数値1をいつでもホームポジションのn1に戻すことができるということを意味する。

ということは、最初から8つの形の代表として n1 = 1 の基本形を仮定することができるわけで、基本形を調べるだけで8つの全部（しいては、8 × 6 = 48通り）を調べたのと同じことになる。したがって、今後は積極的に n1 = 1 の基本形を主に研究する。

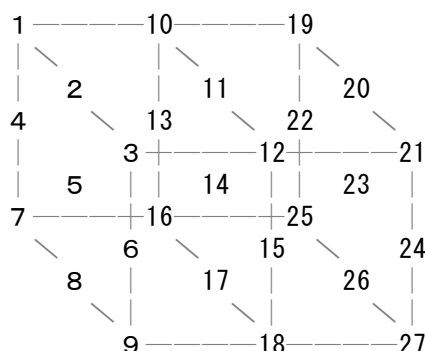
しかしながら、立体三方陣の他のポジションを良く調べてみると、数値1が行けない領域がある。一番見やすいのは、n14だ。定数14が入って、他を寄せつけない。その他にも1が行けないのは、立体の稜の中点の {n2, n4, n6, n8, n10, n12, n16, n18, n20, n22, n24, n26} だ。

代表として数値1が n2に行けない理由を背理法で証明しておく。

もし n2 = 1 と仮定すると、その補数 n26 = CC - n2 = 28 - 1 = 27

これを n2 + n11 + n20 = C (20)

および n20 + n23 + n26 = C (17) に代入すると、



$$\begin{aligned} 1 + n_{11} + n_{20} &= C \\ \rightarrow n_{20} + n_{23} + 27 &= C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_{11} - n_{23} - 26 &= 0 \\ \therefore n_{11} - n_{23} &= 26 \end{aligned}$$

ところが、1~27 の自然数の中で、差が 26 になる 2 数の組み合わせは、(27, 1) しかない。よって、 $n_{11}=27$; $n_{23}=1$;

しかるに 我々は最初に $n_2=1$; $n_{26}=27$; と仮定したのであった。これでは、数値が重複してしまう。これは重大な矛盾である。

よって、最初の仮定を破棄しなければならない。
つまり、 $n_2=1$ は不可能である。

立体の各面の中心の $\{n_5, n_{11}, n_{13}, n_{15}, n_{17}, n_{23}\}$ には 1 が来れるが、 $n_1=1$ の時の変換法は通用しない。別途に $n_5=1$ の基本形を仮定して、独自の変換法を考えてやる必要がある。

得られた解を整理すると、 $n_1=1$ の時の解は、本質的に 1 個しかないようだ。
 $n_5=1$ の時の解は、3 個見つかる。

リスト出力用の不等式群を少し甘い設定にすると、解の数は当然増える。だから、多めに言う人が居ても、全然不思議ではない。24 個と言う人や 32 個と言う人も居る。いや総数は断然 192 個だと言う人もいるが、小生は最小の 4 個で全部をカバーできると考えている。

(July 25, 2000 (初稿), Jan. 5, 2005 (改訂稿):
MacOS Xcode 1.5 による計数・作表: 撰田 寛二 (Kanji Setsuda))

第 4 節: 対称型立体四方陣の代数的研究

1. 立体四方陣のポジションを下図に示す。

```

1-----17-----33-----49
| 2      18      34      | 50
5 3    21 19    37 35    53 51
| 6  4-----22-20-----38-36-| 54-52
9 7 | 25 23    41 39    57 55 |
| 10 8    26 24    42 40    | 58 56
13-11-| 29-27-----45-43-----61 59 |
    14 12    30 28    46 44    62 60
    15 |      31      47      63 |
    16-----32-----48-----64

```

2. 1~64 の重複しない自然数 64 個を用いて、次の連立方程式を満たさなければならない。
先ずは、一般型の魔方陣を定義しよう。

前後方向に 16 本。

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 &= 130 \dots (1) \\ n_5 + n_6 + n_7 + n_8 &= 130 \dots (2) \\ n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12} &= 130 \dots (3) \\ n_{13} + n_{14} + n_{15} + n_{16} &= 130 \dots (4) \\ n_{17} + n_{18} + n_{19} + n_{20} &= 130 \dots (5) \\ n_{21} + n_{22} + n_{23} + n_{24} &= 130 \dots (6) \\ n_{25} + n_{26} + n_{27} + n_{28} &= 130 \dots (7) \end{aligned}$$

次は、上下方向に 16 本。

$$\begin{aligned} n_1 + n_5 + n_9 + n_{13} &= 130 \dots (17) \\ n_2 + n_6 + n_{10} + n_{14} &= 130 \dots (18) \\ n_3 + n_7 + n_{11} + n_{15} &= 130 \dots (19) \\ n_4 + n_8 + n_{12} + n_{16} &= 130 \dots (20) \\ n_{17} + n_{21} + n_{25} + n_{29} &= 130 \dots (21) \\ n_{18} + n_{22} + n_{26} + n_{30} &= 130 \dots (22) \\ n_{19} + n_{23} + n_{27} + n_{31} &= 130 \dots (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_{29}+n_{30}+n_{31}+n_{32} &= 130 \dots (8) \\ n_{33}+n_{34}+n_{35}+n_{36} &= 130 \dots (9) \\ n_{37}+n_{38}+n_{39}+n_{40} &= 130 \dots (10) \\ n_{41}+n_{42}+n_{43}+n_{44} &= 130 \dots (11) \\ n_{45}+n_{46}+n_{47}+n_{48} &= 130 \dots (12) \\ n_{49}+n_{50}+n_{51}+n_{52} &= 130 \dots (13) \\ n_{53}+n_{54}+n_{55}+n_{56} &= 130 \dots (14) \\ n_{57}+n_{58}+n_{59}+n_{60} &= 130 \dots (15) \\ n_{61}+n_{62}+n_{63}+n_{64} &= 130 \dots (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_{20}+n_{24}+n_{28}+n_{32} &= 130 \dots (24) \\ n_{33}+n_{37}+n_{41}+n_{45} &= 130 \dots (25) \\ n_{34}+n_{38}+n_{42}+n_{46} &= 130 \dots (26) \\ n_{35}+n_{39}+n_{43}+n_{47} &= 130 \dots (27) \\ n_{36}+n_{40}+n_{44}+n_{48} &= 130 \dots (28) \\ n_{49}+n_{53}+n_{57}+n_{61} &= 130 \dots (29) \\ n_{50}+n_{54}+n_{58}+n_{62} &= 130 \dots (30) \\ n_{51}+n_{55}+n_{59}+n_{63} &= 130 \dots (31) \\ n_{52}+n_{56}+n_{60}+n_{64} &= 130 \dots (32) \end{aligned}$$

次は、左右方向に 16本。

$$\begin{aligned} n_1 + n_{17} + n_{33} + n_{49} &= 130 \dots (33) \\ n_2 + n_{18} + n_{34} + n_{50} &= 130 \dots (34) \\ n_3 + n_{19} + n_{35} + n_{51} &= 130 \dots (35) \\ n_4 + n_{20} + n_{36} + n_{52} &= 130 \dots (36) \\ n_5 + n_{21} + n_{37} + n_{53} &= 130 \dots (37) \\ n_6 + n_{22} + n_{38} + n_{54} &= 130 \dots (38) \\ n_7 + n_{23} + n_{39} + n_{55} &= 130 \dots (39) \\ n_8 + n_{24} + n_{40} + n_{56} &= 130 \dots (40) \\ n_9 + n_{25} + n_{41} + n_{57} &= 130 \dots (41) \\ n_{10} + n_{26} + n_{42} + n_{58} &= 130 \dots (42) \\ n_{11} + n_{27} + n_{43} + n_{59} &= 130 \dots (43) \\ n_{12} + n_{28} + n_{44} + n_{60} &= 130 \dots (44) \\ n_{13} + n_{29} + n_{45} + n_{61} &= 130 \dots (45) \\ n_{14} + n_{30} + n_{46} + n_{62} &= 130 \dots (46) \\ n_{15} + n_{31} + n_{47} + n_{63} &= 130 \dots (47) \\ n_{16} + n_{32} + n_{48} + n_{64} &= 130 \dots (48) \end{aligned}$$

さらに立体の対角線の 4 本。

$$\begin{aligned} n_1 + n_{22} + n_{43} + n_{64} &= 130 \dots (49) \\ n_4 + n_{23} + n_{42} + n_{61} &= 130 \dots (50) \\ n_{13} + n_{26} + n_{39} + n_{52} &= 130 \dots (51) \\ n_{16} + n_{27} + n_{38} + n_{49} &= 130 \dots (52) \end{aligned}$$

「補数対称型」の立体四方陣では、立体の幾何学的中心を中心点として、対称の位置にある次の 32組のペアが定和を保たなければならない。

$$\begin{aligned} n_1 + n_{64} = n_2 + n_{63} = n_3 + n_{62} = n_4 + n_{61} = \\ n_5 + n_{60} = n_6 + n_{59} = n_7 + n_{58} = n_8 + n_{57} = \\ n_9 + n_{56} = n_{10} + n_{55} = n_{11} + n_{54} = n_{12} + n_{53} = \\ n_{13} + n_{52} = n_{14} + n_{51} = n_{15} + n_{50} = n_{16} + n_{49} = \\ n_{17} + n_{48} = n_{18} + n_{47} = n_{19} + n_{46} = n_{20} + n_{45} = \\ n_{21} + n_{44} = n_{22} + n_{43} = n_{23} + n_{42} = n_{24} + n_{41} = \\ n_{25} + n_{40} = n_{26} + n_{39} = n_{27} + n_{38} = n_{28} + n_{37} = \\ n_{29} + n_{36} = n_{30} + n_{35} = n_{31} + n_{34} = n_{32} + n_{33} = CC \end{aligned} \dots (53)$$

汎対角線上の 8 組 16数は、どれもがお互いに対称の位置にある。

上の式の幾つかと (49) ~ (52) 式を関わらせよう。

$$n_1 + n_{64} = n_{22} + n_{43} = CC \text{ を (49) 式に代入する。}$$

$$CC + CC = 130 \text{ となる。}$$

$$\text{よって } CC = 65 \dots (54)$$

上の 32組のペアは、全て「65 の補数」を成すことがわかった。今後は、この補数関係を最大限に活用することにする。最初の 32数を決めれば残りの 32数が自動的に決まるから、手数を半分に減らすことができる。

立体の中心点を通らない各平面の対角線上の 4 数の和には特に条件を付けない。この寛容さは、どの立方体方陣でも伝統的な常識になっている。

3. もう少し、方程式を相互に関わらせて見よう。

(53) 式の辺々を加えると、

$$n_1 + n_2 + n_{63} + n_{64} = 2 \cdot CC = 130 \quad \neg$$

$$\text{ところが、} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 130 \dots (1) \quad + \quad n_3 + n_4 = n_{63} + n_{64}$$

$$\text{また } n_{61} + n_{62} + n_{63} + n_{64} = 130 \dots (16) \quad \neg \quad n_1 + n_2 = n_{61} + n_{62} \dots (55)$$

同様に

$$\begin{array}{l} n_1 + n_4 + n_{61} + n_{64} = 2 \cdot CC = 130 \dots (53) \quad \neg \\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 130 \dots (1) \quad + \\ n_{61} + n_{62} + n_{63} + n_{64} = 130 \dots (16) \quad \text{から, } \neg \end{array} \quad \begin{array}{l} n_2 + n_3 = n_{61} + n_{64} \\ n_1 + n_4 = n_{62} + n_{63} \dots (56) \end{array}$$

同様に

$$\begin{array}{l} n_1 + n_3 + n_{62} + n_{64} = 2 \cdot CC = 130 \dots (53) \quad \neg \\ n_1 + n_3 + n_2 + n_4 = 130 \dots (1) \quad + \\ n_{61} + n_{63} + n_{62} + n_{64} = 130 \dots (16) \quad \text{から, } \neg \end{array} \quad \begin{array}{l} n_2 + n_4 = n_{62} + n_{64} \\ n_1 + n_3 = n_{61} + n_{63} \dots (57) \end{array}$$

同様に

$$\begin{array}{l} n_1 + n_5 + n_{60} + n_{64} = 2 \cdot CC = 130 \dots (53) \quad \neg \\ n_1 + n_5 + n_9 + n_{13} = 130 \dots (17) \quad + \\ n_{52} + n_{56} + n_{60} + n_{64} = 130 \dots (32) \quad \text{から, } \neg \end{array} \quad \begin{array}{l} n_9 + n_{13} = n_{60} + n_{64} \\ n_1 + n_5 = n_{52} + n_{56} \dots (58) \end{array}$$

同様に

$$\begin{array}{ll} n_5 + n_9 = n_{52} + n_{64}, & n_1 + n_{13} = n_{56} + n_{60} & \dots (59) \\ n_1 + n_9 = n_{52} + n_{60}, & n_5 + n_{13} = n_{56} + n_{64} & \dots (60) \\ n_1 + n_{17} = n_{16} + n_{32}, & n_{33} + n_{49} = n_{48} + n_{64} & \dots (61) \\ n_1 + n_{49} = n_{32} + n_{48}, & n_{17} + n_{33} = n_{16} + n_{64} & \dots (62) \end{array}$$

が言える。たいした関係式ではないが、何かの時に便利・重宝するかも知れない。

立体方陣の手ごわいところは、一般型がおよそ捉えどころのない「無個性」であることだ。「欠点の無い美人」のように、特徴を言い表わし難い。条件を予めなかなか絞りに絞れない。等式が多数ある割には解が無数にある。方程式を組み合わせても、得られる関係式はたいして堂々巡りの同語反復に他ならず、手間と時間の節約を果たせないでいる。

そんなとき補数の存在は、調べる場合の数を $64 \times 63 \times 62 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ から $32 \times 31 \times 30 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ に確かに減らしてくれる。とはいえ、それでももの凄い数には変わらない。

4. 次は、別の解を作る変換法について調べる。特に各面の交換による可能性を考えよう。平面方陣では行列ごとの交換であったが、立体方陣だと面ごとの交換になる。

単なる反転や回転による変形は考えない。これでも 48 個もの異形が作れてしまうが、内容それ自体は全く変わらず、すべて同一解と見なされるからだ。

1	17	33	49	→	2	18	34	50															
2	18	34	50		1	17	33	49															
5	3	21	19	37	35	53	51	6	4	22	20	38	36	54	52								
6	4	22	20	38	36	54	52	5	3	21	19	37	35	53	51								
9	7	25	23	41	39	57	55	10	8	26	24	42	40	58	56	9	7	25	23	41	39	57	55
10	8	26	24	42	40	58	56	9	7	25	23	41	39	57	55								
13	11	29	27	45	43	61	59	14	12	30	28	46	44	62	60	13	11	29	27	45	43	61	59
14	12	30	28	46	44	62	60	13	11	29	27	45	43	61	59								
15		31	47	63		16		32	48	64													
16	32	48	64	15	31	47	63																

面を動かしても行列柱の定和は変わらないから、4本の主対角線の定和が崩れないような交換を考えてやるのである。

対称型立体四方陣では、縦横・上下・前後の方向に第2面と第3面をそっくり交換することが可能である。第1面と第4面をそっくり交換することもできる。外側の2面と内側の2面を上図のように一度に交換することも可能である。

ただし、(2面 ↔ 3面)の交換と(1面 ↔ 4面)面の交換は、同じ結果をもたらすから、どちらか一方しか使えない。(1面 ↔ 2面) & (3面 ↔ 4面)は可能。組み合わせも可能だ。

左右・上下・前後方向にこの内側交換・内外交換およびその組み合わせの3種類の交換移動を考える。無変換も入れると、 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 通りの派生形が出来るはずだ。

そして、元の n_1 にあった数値 1 を他のどのポジションにも持って行くことができる。

反対に数値 1 がどこにあっても、この変換によって n_1 というホーム・ポジション（立体の頂点）にいつでも戻すことができる。

しかも、これが一番大切なことなのだが、どう動かしても 1 を含む縦横・上下・前後の行列の内部構成要素は変わらない（順序は変わっても、顔ぶれが変わらない）。

このことから 2 つのことを言おう。

(1) 我々は、この種の変換移動によって出来る形を「基本解」と「派生解」とに分けて系列化する。単純な反転・回転・対称移動によってできる派生形は、別解とは認めない。

(2) $n_1=1$; $n_{64}=64$; を基本のポジションと仮定して計数を試みる。そしてその結果をもって全ての系列解の代表とする。あとの 63 解は、変換法によって構成する。

そうすれば 48 分の 1 のさらに 64 分の 1 の手間と暇で、計数の作業を終えることができる。プログラム中では、例えば次のようなリスト出力用の不等式を付加する。

$$n_1 < n_4; n_1 < n_{13}; n_1 < n_{16}; n_1 < n_{49}; n_1 < n_{52}; n_1 < n_{61}; n_1 < n_{64}; n_2 > n_5 > n_{17};$$

$$n_2 > n_3; n_5 > n_9; n_{17} > n_{33}; n_1 < n_2; n_1 < n_5; n_1 < n_{17};$$

もっとも $n_1=1$ と最初から仮定するのだったから、最初の 7 式と最後の 3 式はあらためて言わなくても良い。実際には条件式がだいぶ少なくて済む。

5. 具体的な探索に入るが、手がかりが少な過ぎて心もとない感じがしないでもない。こんな時は、例えば n_2 が具体的に取得する数値を、周囲から絞り込んで行く。求めるものは不等式で示される。

基本形では、 $n_1=1$; $n_{64}=64$; とするのだから

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 130 \dots\dots (1) \rightarrow n_2 + n_3 + n_4 = 129 \dots\dots (1)'$$

$$n_1 + n_5 + n_9 + n_{13} = 130 \dots\dots (17) \rightarrow n_5 + n_9 + n_{13} = 129 \dots\dots (17)'$$

$$n_1 + n_{17} + n_{33} + n_{49} = 130 \dots\dots (33) \rightarrow n_{17} + n_{33} + n_{49} = 129 \dots\dots (33)'$$

$$n_{61} + n_{62} + n_{63} + n_{64} = 130 \dots\dots (16) \rightarrow n_{61} + n_{62} + n_{63} = 66 \dots\dots (16)'$$

$$n_{52} + n_{56} + n_{60} + n_{64} = 130 \dots\dots (32) \rightarrow n_{52} + n_{56} + n_{60} = 66 \dots\dots (32)'$$

$$n_{16} + n_{32} + n_{48} + n_{64} = 130 \dots\dots (48) \rightarrow n_{16} + n_{32} + n_{48} = 66 \dots\dots (48)'$$

一般に $\{a + b + CC\} = 129$ になる自然数 2 ~ 63 の組合せは、 $a < b < CC$ とおくと、 $\{4, 62, 63\}$, $\{5, 61, 63\}$, $\{6, 60, 63\}$, $\dots\dots$, $\{32, 34, 63\}$, $\dots\dots$, $\{42, 43, 44\}$ と 300 通りある。

この時、 a の最小値は 4, b の最大値は 62, CC の最大値はむしろ 63

また a の最大値は 42, b の最小値は 34, CC の最小値は 44

$\{h + i + j\} = 66$ になる自然数 2 ~ 63 の組合せの方は、 $h > i > j$ とおくと、

$\{61, 3, 2\}$, $\{60, 4, 2\}$, $\{59, 5, 2\}$, $\dots\dots$, $\{33, 31, 2\}$, $\dots\dots$, $\{23, 22, 21\}$ と 300 通りある。

この時、 h の最大値は 61, i の最小値は 31, j の最小値はむしろ 2

また h の最小値は 23, i の最大値は 3, j の最大値は 21

ただし、 $a + h = b + i = CC + j = 65$

(なぜなら、 $n_2 + n_{63} = n_3 + n_{62} = n_4 + n_{61} = \dots = 65$)

しかも、 $n_2 > n_5 > n_{17}$ と仮定し、 $n_2 > n_3$, $n_5 > n_9$, $n_{17} > n_{33}$ と仮定した。

n_2 は、 $\{n_2, n_3, n_5, n_9, n_{17}, n_{33}\}$ の中で最大の数であるから、最小値 4 ではあり得ない。

n_2 は n_3 より大きいから $\{a, b, CC\}$ の最小の a には来ない。 $\{a, b, CC\}$ には未知の数値の n_4, n_{13}, n_{49} も含まれるから、 n_2 を最大の CC にも固定できない。 b または CC の位置に来る。

n_2 が b の位置にあるなら、最小値は $b = 34$ となる。最大値は、 CC の場合も考えて 63

従って、 n_2 は 34 より小さい場合を調べなくてよいことになる。

同様に考察して、他の $\{n_3, n_5, n_9, n_{17}, n_{33}\}$ の取り得る値も決めると、

$$4 < n_3 < 62, \quad 36 < n_5 < 62, \quad 5 < n_9 < 61, \quad 34 < n_{17} < 61, \quad 6 < n_{33} < 60$$

n_2 はそのどれよりも大きいから、最小値が 38 と上がる。38 より小さい数を調べる必要が無い。

(16)' ~ (48)' の方は、補数の関係で、(1)' ~ (33)' が決まれば、自動的に決まる。

よって、 $27 > n_{63} > 2 \dots\dots$ こういうふうに予め少しでも調べる場合の数を減らしておく。

6. 解はそれこそ無数にある。むろん有限個だが、試行では優に5百万個を超える。高速プログラムで探索・計数しても、いつ終わるともわからない。中断を余儀無くされる。
 対称立体四方陣は、だから決して特殊なものではなく、むしろ一般的なものと言える。

コンピュータ・プログラムによる計数を何度も試みたが、その経験から言うと、後に記す「完全立体四方陣」と似たような手応えをいつも感じる。解の具体的な出方などでだ。もしかしたら、全然違う種類の立体四方陣に構造的なつながりがあるのかもしれない。

これは「上級編」で研究しよう。
 解の一部をリストにして、最後に掲載する。

(June 16, 2000(初稿), January 8, 2005(第2稿), November 14, 2008(改訂稿):
 MacOSX & Xcode 1.5~3.0 による計数・作表: 撰田 寛二(Kanji Setsuda))

添付資料：対称立体四方陣の解の計数（部分）

** Self-Complementary Magic Cubes of Order 4: **
 ** Made by Kanji Setsuda on January 5, 2005 **

1/ 27581/
 1-----58-----57-----14
 |63 21 18 |28
 60 62 38 22 17 13 15 33
 |26 4---16---29---35---42---+53---55
 59 19 | 11 31 20 24 40 56 |
 | 9 25 41 45 34 54 |46 6
 10-12-| -23-30-36-49-61 39 |
 32 50 52 48 43 27 3 5
 37 | 47 44 2 |
 51-----8-----7-----64

49922/ 71495/
 1-----60-----53-----16
 |63 25 20 |22
 58 62 32 18 29 9 11 41
 |30 4---15---27---26---48---+59---51
 57 19 | 21 28 10 31 42 52 |
 |13 23 34 55 37 44 |46 8
 14- 6-| -17-39-38-50-61 35 |
 24 54 56 36 47 33 3 7
 43 | 45 40 2 |
 49-----12-----5-----64

89941/ 106417/
 1-----60-----50-----19
 |63 11 32 |24
 56 62 17 22 45 6 12 40
 |34 4---16---37---29---42---+51---47
 55 13 | 30 39 7 21 38 57 |
 | 8 27 44 58 26 35 |52 10
 18-14-| -23-36-28-49-61 31 |
 25 53 59 20 43 48 3 9
 41 | 33 54 2 |
 46-----15-----5-----64

119377/

1-----60-----44-----25
 |63 6 13 |48
 54 62 42 38 19 16 15 14
 | 7 4---41-26---35-57---47-43
 53 33 | 20 10 28 31 29 56 |
 | 9 36 34 37 55 45 |32 12
 22-18-| 8-30---39-24---61 58 |
 51 50 49 46 27 23 3 11
 17 | 52 59 2 |
 40-----21-----5-----64

139835/

1-----60-----41-----28
 |63 19 23 |25
 52 62 50 21 18 9 10 38
 |33 4---6-30---43-57---48-39
 51 11 | 12 45 36 16 31 58 |
 | 7 34 49 29 20 53 |54 14
 26-17-| 8-22---35-59---61 32 |
 27 55 56 47 44 15 3 13
 40 | 42 46 2 |
 37-----24-----5-----64

151646/

1-----60-----37-----32
 |63 7 41 |19
 50 62 12 6 42 18 26 44
 |17 4---51-57---10-34---52-35
 49 9 | 27 45 43 40 11 36 |
 |29 54 25 22 20 38 |56 16
 30-13-|31-55---8-14---61 48 |
 21 39 47 23 59 53 3 15
 46 | 24 58 2 |
 33-----28-----5-----64

159094/

1-----60-----33-----36
 |63 23 16 |28
 48 62 10 9 58 24 14 35
 |11 4---45-38---15-57---59-31
 47 25 | 52 22 12 44 19 39 |
 |26 46 21 53 43 13 |40 18
 34-6-| 8-50---27-20---61 54 |
 30 51 41 7 56 55 3 17
 37 | 49 42 2 |
 29-----32-----5-----64

161865/

1-----60-----17-----52
 |63 22 12 |33
 46 62 35 8 39 42 10 18
 |11 4---51-40---24-59---44-27
 45 15 | 29 28 49 31 7 56 |
 | 9 58 34 16 37 36 |50 20
 38-21-| 6-41---25-14---61 54 |
 47 55 23 26 57 30 3 19
 32 | 53 43 2 |
 13-----48-----5-----64

130294/

1-----60-----43-----26
 |63 6 21 |40
 53 62 19 27 50 18 8 23
 |11 4---45-37---16-48---58-41
 52 36 | 34 10 9 33 35 51 |
 |14 30 32 56 55 31 |29 13
 24-7-|17-49---28-20---61 54 |
 42 57 47 15 38 46 3 12
 25 | 44 59 2 |
 39-----22-----5-----64

146268/

1-----60-----35-----34
 |63 6 29 |32
 51 62 9 19 58 22 12 27
 |13 4---55-45---8-44---54-37
 50 24 | 40 18 17 39 23 49 |
 |16 42 26 48 47 25 |41 15
 28-11-|21-57---20-10---61 52 |
 38 53 43 7 46 56 3 14
 33 | 36 59 2 |
 31-----30-----5-----64

155814/

1-----60-----28-----41
 |63 7 34 |26
 49 62 52 27 23 11 6 30
 |18 4---44-36---12-57---56-33
 48 20 | 10 19 50 40 22 51 |
 |14 43 25 15 46 55 |45 17
 32-9-| 8-53---29-21---61 47 |
 35 59 54 42 38 13 3 16
 39 | 31 58 2 |
 24-----37-----5-----64

160735/

1-----60-----32-----37
 |63 20 23 |24
 47 62 50 7 27 21 6 40
 |34 4---13-43---35-54---48-29
 46 10 | 9 51 49 12 26 57 |
 | 8 39 53 16 14 56 |55 19
 36-17-|11-30---22-52---61 31 |
 25 59 44 38 58 15 3 18
 41 | 42 45 2 |
 28-----33-----5-----64

162449/

1-----59-----22-----48
 |63 11 38 |18
 45 62 33 10 36 19 16 39
 |13 4---31-50---30-51---56-25
 44 12 | 24 58 57 23 5 37 |
 |28 60 42 8 7 41 |53 21
 40-9-|14-35---15-34---61 52 |
 26 49 46 29 55 32 3 20
 47 | 27 54 2 |
 17-----43-----6-----64

162859/

1-----59-----24-----46
 |63 7 34 |26
 44 62 15 8 60 25 11 35
 |17 4---51-56---10-47---52-23
 43 16 | 38 36 37 33 12 45 |
 |20 53 32 28 29 27 |49 22
 42-13-|18-55---9-14---61 48 |
 30 54 40 5 57 50 3 21
 39 | 31 58 2 |
 19-----41-----6-----64

163519/

1-----58-----22-----49
 |63 14 9 |44
 42 62 34 10 39 40 15 18
 | 8 4---54-48---30-59---38-19
 41 20 | 32 29 52 28 5 53 |
 |12 60 37 13 36 33 |45 24
 46-27-| 6-35---17-11---61 57 |
 47 50 25 26 55 31 3 23
 21 | 56 51 2 |
 16-----43-----7-----64

164061/

1-----53-----22-----54
 |63 16 31 |20
 40 62 30 6 52 21 8 41
 |14 4---33-55---23-56---60-15
 39 18 | 38 48 46 28 7 36 |
 |29 58 37 19 17 27 |47 26
 50- 5-| 9-42---10-32---61 51 |
 24 57 44 13 59 35 3 25
 45 | 34 49 2 |
 11-----43-----12-----64

164142/

1-----41-----31-----57
 |63 10 25 |32
 38 62 36 23 51 15 5 30
 |12 4---49-56---17-59---52-11
 37 22 | 47 19 39 44 7 45 |
 |20 58 21 26 46 18 |43 28
 54-13-| 6-48---9-16---61 53 |
 35 60 50 14 42 29 3 27
 33 | 40 55 2 |
 8-----34-----24-----64

170756/

1-----62-----54-----13
 |63 8 28 |31
 59 61 20 14 15 22 36 33
 |10 5---49-46---24-26---47-53
 58 17 | 9 38 42 35 21 40 |
 |25 44 30 23 27 56 |48 7
 12-18-|39-41---19-16---60 55 |
 32 29 43 50 51 45 4 6
 34 | 37 57 2 |
 52-----11-----3-----64

163175/

1-----58-----25-----46
 |63 10 12 |45
 43 62 24 13 57 37 6 18
 | 5 4---38-49---36-56---51-21
 42 34 | 39 35 32 11 17 50 |
 |15 48 54 33 30 26 |31 23
 44-14-| 9-29---16-27---61 60 |
 47 59 28 8 52 41 3 22
 20 | 53 55 2 |
 19-----40-----7-----64

163805/

1-----60-----20-----49
 |63 6 30 |31
 41 62 36 8 46 27 7 33
 |14 4---47-56---15-53---54-17
 40 23 | 22 37 55 26 13 44 |
 |21 52 39 10 28 43 |42 25
 48-11-|12-50---9-18---61 51 |
 32 58 38 19 57 29 3 24
 34 | 35 59 2 |
 16-----45-----5-----64

164087/

1-----48-----24-----57
 |63 9 33 |25
 39 62 29 14 55 19 7 35
 |15 4---44-59---18-54---53-13
 38 16 | 42 37 45 34 5 43 |
 |22 60 31 20 28 23 |49 27
 52-12-|11-47---6-21---61 50 |
 30 58 46 10 51 36 3 26
 40 | 32 56 2 |
 8-----41-----17-----64

164144/

1-----58-----56-----15
 |63 12 33 |22
 62 61 14 20 23 13 31 36
 |11 5---47-40---17-28---55-57
 59 16 | 21 30 26 46 24 38 |
 |27 41 19 39 35 44 |49 6
 8-10-|37-48---25-18---60 54 |
 29 34 52 42 45 51 4 3
 43 | 32 53 2 |
 50-----9-----7-----64

175993/

1-----62-----52-----15
 |63 12 32 |23
 58 61 25 10 30 18 17 41
 |34 5---26-46---21-28---49-51
 57 11 | 6 43 29 20 38 56 |
 | 9 27 45 36 22 59 |54 8
 14-16-|37-44---19-39---60 31 |
 24 48 47 35 55 40 4 7
 42 | 33 53 2 |
 50-----13-----3-----64

181412/

1-----62-----48-----19
 |63 12 18 |37
 57 61 27 11 36 33 10 25
 |14 5---42-45---15-31---59-49
 56 35 | 7 22 26 21 41 52 |
 |13 24 44 39 43 58 |30 9
 16- 6-|34-50---20-23---60 51 |
 40 55 32 29 54 38 4 8
 28 | 47 53 2 |
 46-----17-----3-----64

190268/

1-----62-----46-----21
 |63 14 17 |36
 55 61 6 16 35 25 34 28
 |18 5---24-38---56-42---32-45
 54 7 | 39 57 22 13 15 53 |
 |12 50 52 43 8 26 |58 11
 20-33-|23- 9---27-41---60 47 |
 37 31 40 30 49 59 4 10
 29 | 48 51 2 |
 44-----19-----3-----64

197322/

1-----62-----42-----25
 |63 8 32 |27
 53 61 18 26 43 6 16 37
 |20 5--- 7-34---48-50---55-41
 52 21 | 35 54 14 9 29 46 |
 |19 36 56 51 11 30 |44 13
 24-10-|15-17---31-58---60 45 |
 28 49 59 22 39 47 4 12
 38 | 33 57 2 |
 40-----23-----3-----64

201930/

1-----62-----26-----41
 |63 6 44 |17
 51 61 7 16 52 18 20 35
 |12 5---34-46---29-42---55-37
 50 11 | 38 57 33 22 9 40 |
 |25 56 43 32 8 27 |54 15
 28-10-|23-36---19-31---60 53 |
 30 45 47 13 49 58 4 14
 48 | 21 59 2 |
 24-----39-----3-----64

206069/

1-----62-----31-----36
 |63 7 19 |41
 49 61 10 23 59 26 12 20
 | 8 5---28-38---44-54---50-33
 48 30 | 47 40 13 9 22 51 |
 |14 43 56 52 25 18 |35 17
 32-15-|11-21---27-37---60 57 |
 45 53 39 6 42 55 4 16
 24 | 46 58 2 |
 29-----34-----3-----64

185792/

1-----62-----48-----19
 |63 21 24 |22
 56 61 6 7 31 20 37 42
 | 8 5---52-40---16-38---54-47
 55 15 | 35 33 26 53 14 29 |
 |36 51 12 39 32 30 |50 10
 18-11-|27-49---25-13---60 57 |
 23 28 45 34 58 59 4 9
 43 | 41 44 2 |
 46-----17-----3-----64

194258/

1-----62-----42-----25
 |63 6 14 |47
 54 61 26 38 37 16 13 15
 | 9 5---29-24---44-58---48-43
 53 34 | 35 20 10 19 32 57 |
 | 8 33 46 55 45 30 |31 12
 22-17-| 7-21---41-36---60 56 |
 50 52 49 28 27 39 4 11
 18 | 51 59 2 |
 40-----23-----3-----64

199992/

1-----62-----32-----35
 |63 21 8 |38
 52 61 46 10 12 41 20 18
 |11 5---43-37---36-49---40-39
 51 17 | 6 34 58 23 15 56 |
 | 9 50 42 7 31 59 |48 14
 26-25-|16-29---28-22---60 54 |
 47 45 24 53 55 19 4 13
 27 | 57 44 2 |
 30-----33-----3-----64

204474/

1-----62-----28-----39
 |63 29 7 |31
 50 61 18 6 53 38 9 25
 |13 5---19-33---44-57---54-35
 49 24 | 42 45 17 10 22 51 |
 |14 43 55 48 20 23 |41 16
 30-11-| 8-21---32-46---60 52 |
 40 56 27 12 59 47 4 15
 34 | 58 36 2 |
 26-----37-----3-----64

207244/

1-----62-----30-----37
 |63 24 27 |16
 48 61 10 8 59 15 13 46
 |26 5---23-36---25-58---56-31
 47 11 | 51 44 12 32 20 43 |
 |22 45 33 53 21 14 |54 18
 34- 9-| 7-40---29-42---60 39 |
 19 52 50 6 57 55 4 17
 49 | 38 41 2 |
 28-----35-----3-----64

208256/

1-----62-----28-----39
 |63 10 17 |40
 47 61 31 6 32 41 20 22
 |15 5---38-52---42-44---35-29
 46 14 | 16 53 57 7 11 56 |
 | 9 54 58 8 12 49 |51 19
 36-30-|---21-23---13-27---60 50 |
 43 45 24 33 59 34 4 18
 25 | 48 55 2 |
 26-----37-----3-----64

209465/

1-----62-----26-----41
 |63 8 32 |27
 45 61 49 13 30 19 6 37
 |29 5---22-47---31-53---48-25
 44 14 | 7 50 56 11 23 55 |
 |10 42 54 9 15 58 |51 21
 40-17-|---12-34---18-43---60 36 |
 28 59 46 35 52 16 4 20
 38 | 33 57 2 |
 24-----39-----3-----64

210091/

1-----58-----19-----52
 |63 17 11 |39
 43 61 28 10 56 41 3 18
 | 8 5---40-45---31-59---51-21
 42 29 | 38 32 35 16 15 53 |
 |12 50 49 30 33 27 |36 23
 44-14-|---6-34---20-25---60 57 |
 47 62 24 9 55 37 4 22
 26 | 54 48 2 |
 13-----46-----7-----64

210657/

1-----59-----21-----49
 |63 13 28 |26
 41 61 35 8 51 23 3 38
 |31 5---20-50---33-58---46-17
 40 11 | 29 53 43 10 18 56 |
 | 9 47 55 22 12 36 |54 25
 48-19-|---7-32---15-45---60 34 |
 27 62 42 14 57 30 4 24
 39 | 37 52 2 |
 16-----44-----6-----64

210919/

1-----59-----17-----53
 |63 14 23 |30
 39 61 28 3 55 32 8 34
 |16 5---43-54---21-58---50-13
 38 19 | 36 41 47 25 9 45 |
 |20 56 40 18 24 29 |46 27
 52-15-|---7-44---11-22---60 49 |
 31 57 33 10 62 37 4 26
 35 | 42 51 2 |
 12-----48-----6-----64

208947/

1-----62-----25-----42
 |63 15 34 |18
 46 61 8 14 55 12 21 43
 |17 5---32-39---29-59---52-27
 45 9 | 54 49 24 35 7 37 |
 |28 58 30 41 16 11 |56 20
 38-13-|---6-36---26-33---60 48 |
 22 44 53 10 51 57 4 19
 47 | 31 50 2 |
 23-----40-----3-----64

209817/

1-----62-----18-----49
 |63 8 34 |25
 44 61 27 12 45 24 14 33
 | 9 5---29-48---37-54---55-23
 43 19 | 30 59 50 13 7 39 |
 |26 58 52 15 6 35 |46 22
 42-10-|---11-28---17-36---60 56 |
 32 51 41 20 53 38 4 21
 40 | 31 57 2 |
 16-----47-----3-----64

210402/

1-----55-----26-----48
 |63 20 35 |12
 42 61 28 3 44 15 16 51
 |22 5---27-52---25-54---56-19
 41 7 | 36 57 47 32 6 34 |
 |31 59 33 18 8 29 |58 24
 46- 9-|---11-40---13-38---60 43 |
 14 49 50 21 62 37 4 23
 53 | 30 45 2 |
 17-----39-----10-----64

210869/

1-----58-----20-----51
 |63 8 18 |41
 40 61 31 10 46 36 13 23
 | 3 5---49-54---30-56---48-15
 39 28 | 32 38 53 21 6 43 |
 |22 59 44 12 27 33 |37 26
 50-17-|---9-35---11-16---60 62 |
 42 52 29 19 55 34 4 25
 24 | 47 57 2 |
 14-----45-----7-----64

210990/

1-----49-----25-----55
 |63 9 12 |46
 38 61 35 20 50 31 7 18
 | 6 5---48-52---32-62---44-11
 37 29 | 43 24 42 26 8 51 |
 |14 57 39 23 41 22 |36 28
 54-21-|---3-33---13-17---60 59 |
 47 58 34 15 45 30 4 27
 19 | 53 56 2 |
 10-----40-----16-----64

211011/

1-----49-----23-----57
 |63 12 25 |30
 37 61 32 15 55 20 6 34
 |14 5---47-54---17-62---52-9
 36 21 | 46 27 41 39 7 43 |
 |22 58 26 24 38 19 |44 29
 56-13-| 3-48---11-18---60 51 |
 31 59 45 10 50 33 4 28
 35 | 40 53 2 |
 8-----42-----16-----64

232879/

1-----62-----56-----11
 |63 12 30 |25
 61 60 23 15 19 16 27 39
 |20 6---22-41---36-28---52-55
 58 17 | 8 51 31 18 33 44 |
 |21 32 47 34 14 57 |48 7
 10-13-| 37-29---24-43---59 45 |
 26 38 49 46 50 42 5 4
 40 | 35 53 2 |
 54-----9-----3-----64

264858/

1-----62-----48-----19
 |63 11 33 |23
 57 60 4 10 29 21 40 39
 | 7 6---51-47---22-28---50-49
 56 13 | 27 45 35 41 12 31 |
 |34 53 24 30 20 38 |52 9
 16-15-| 37-43---18-14---59 58 |
 26 25 44 36 55 61 5 8
 42 | 32 54 2 |
 46-----17-----3-----64

287291/

1-----62-----46-----21
 |63 16 29 |22
 55 60 26 4 14 24 35 42
 | 7 6---40-48---27-31---56-45
 54 18 | 8 52 53 32 15 28 |
 |37 50 33 12 13 57 |47 11
 20-9-| 34-38---17-25---59 58 |
 23 30 41 51 61 39 5 10
 43 | 36 49 2 |
 44-----19-----3-----64

305729/

1-----62-----40-----27
 |63 17 11 |39
 53 60 19 4 28 43 30 23
 |16 6---33-47---50-36---31-41
 52 10 | 20 57 44 7 14 56 |
 | 9 51 58 21 8 45 |55 13
 24-34-| 29-15---18-32---59 49 |
 42 35 22 37 61 46 5 12
 26 | 54 48 2 |
 38-----25-----3-----64

211019/

1-----61-----57-----11
 |63 21 17 |29
 62 60 14 20 13 16 41 34
 |10 6---27-28---50-40---43-56
 58 12 | 30 47 23 32 19 39 |
 |26 46 33 42 18 35 |53 7
 9-22-| 25-15---37-38---59 55 |
 31 24 49 52 45 51 5 3
 36 | 48 44 2 |
 54-----8-----4-----64

250634/

1-----62-----52-----15
 |63 11 23 |33
 58 60 10 21 45 18 17 31
 |24 6---19-36---38-37---49-51
 57 22 | 30 40 4 12 39 56 |
 | 9 26 53 61 25 35 |43 8
 14-16-| 28-27---29-46---59 41 |
 34 48 47 20 44 55 5 7
 32 | 42 54 2 |
 50-----13-----3-----64

276378/

1-----62-----48-----19
 |63 41 4 |22
 56 60 34 7 25 21 15 42
 |33 6---16-20---30-57---51-47
 55 13 | 26 27 12 36 37 54 |
 |11 28 29 53 38 39 |52 10
 18-14-| 8-35---45-49---59 32 |
 23 50 44 40 58 31 5 9
 43 | 61 24 2 |
 46-----17-----3-----64

295980/

1-----62-----44-----23
 |63 4 24 |39
 54 60 16 28 50 17 10 25
 |19 6---47-36---13-45---51-43
 53 30 | 32 9 7 34 38 57 |
 | 8 27 31 58 56 33 |35 12
 22-14-| 20-52---29-18---59 46 |
 40 55 48 15 37 49 5 11
 26 | 41 61 2 |
 42-----21-----3-----64

313610/

1-----62-----37-----30
 |63 33 7 |27
 52 60 19 11 36 25 23 34
 |21 6---9-24---57-61---43-39
 51 10 | 45 53 16 17 18 50 |
 |15 47 48 49 12 20 |55 14
 26-22-| 4-8---41-56---59 44 |
 31 42 40 29 54 46 5 13
 38 | 58 32 2 |
 35-----28-----3-----64

318868/

1-----62-----38-----29
 |63 11 12 |44
 51 60 34 9 35 41 10 20
 | 4 6---52-48---16-39---58-37
 50 42 | 8 19 40 22 32 47 |
 |18 33 43 25 46 57 |23 15
 28- 7-|---26-49---17-13---59 61 |
 45 55 24 30 56 31 5 14
 21 | 53 54 2 |
 36-----27-----3-----64

326126/

1-----62-----29-----38
 |63 14 25 |28
 49 60 11 24 57 15 13 31
 |10 6---44-30---18-61---58-33
 48 26 | 53 19 9 43 20 42 |
 |23 45 22 56 46 12 |39 17
 32- 7-|---4-47---35-21---59 55 |
 34 52 50 8 41 54 5 16
 37 | 40 51 2 |
 27-----36-----3-----64

330452/

1-----62-----27-----40
 |63 12 35 |20
 47 60 16 22 44 7 23 41
 |11 6---51-34---13-61---55-29
 46 15 | 48 26 28 56 8 33 |
 |32 57 9 37 39 17 |50 19
 36-10-|---4-52---31-14---59 54 |
 24 42 58 21 43 49 5 18
 45 | 30 53 2 |
 25-----38-----3-----64

332315/

1-----62-----19-----48
 |63 7 37 |23
 45 60 16 14 57 22 12 34
 |27 6---30-47---32-52---41-25
 44 4 | 39 55 36 15 11 56 |
 | 9 54 50 29 10 26 |61 21
 40-24-|---13-33---18-35---59 38 |
 31 53 43 8 51 49 5 20
 42 | 28 58 2 |
 17-----46-----3-----64

333389/

1-----61-----20-----48
 |63 3 28 |36
 43 60 19 12 58 33 10 25
 | 9 6---57-54---14-49---50-21
 42 26 | 34 30 41 27 13 47 |
 |18 52 38 24 35 31 |39 23
 44-15-|---16-51---11- 8---59 56 |
 40 55 32 7 53 46 5 22
 29 | 37 62 2 |
 17-----45-----4-----64

322890/

1-----62-----26-----41
 |63 9 25 |33
 50 60 47 22 23 27 10 21
 | 4 6---54-37---14-52---58-35
 49 31 | 8 17 53 36 20 46 |
 |19 45 29 12 48 57 |34 16
 30- 7-|---13-51---28-11---59 61 |
 44 55 38 42 43 18 5 15
 32 | 40 56 2 |
 24-----39-----3-----64

328982/

1-----62-----32-----35
 |63 25 4 |38
 48 60 10 7 49 37 23 26
 | 9 6---24-36---54-57---43-31
 47 21 | 50 51 20 12 13 46 |
 |19 52 53 45 14 15 |44 18
 34-22-|---8-11---29-41---59 56 |
 39 42 28 16 58 55 5 17
 27 | 61 40 2 |
 30-----33-----3-----64

331563/

1-----62-----28-----39
 |63 15 9 |43
 46 60 41 17 18 32 25 21
 |12 6---30-36---57-61---31-27
 45 14 | 23 49 55 13 7 54 |
 |11 58 52 10 16 42 |51 20
 38-34-|---4- 8---29-35---59 53 |
 44 40 33 47 48 24 5 19
 22 | 56 50 2 |
 26-----37-----3-----64

332944/

1-----61-----18-----50
 |63 11 24 |32
 44 60 17 9 62 36 7 25
 | 8 6---37-49---30-52---55-23
 43 27 | 39 45 34 12 14 46 |
 |19 51 53 31 20 26 |38 22
 42-10-|---13-35---16-28---59 57 |
 40 58 29 3 56 48 5 21
 33 | 41 54 2 |
 15-----47-----4-----64

333734/

1-----61-----20-----48
 |63 8 30 |29
 42 60 25 3 54 33 9 34
 |15 6---52-58---10-47---53-19
 41 22 | 26 37 49 27 14 44 |
 |21 51 38 16 28 39 |43 24
 46-12-|---18-55--- 7-13---59 50 |
 31 56 32 11 62 40 5 23
 36 | 35 57 2 |
 17-----45-----4-----64

334046/

1-----58-----19-----52
 |63 10 18 |39
 41 60 33 11 53 37 3 22
 | 4 6---42-51---27-56---57-17
 40 36 | 30 34 44 15 16 45 |
 |20 49 50 21 31 35 |29 25
 48- 8-| 9-38---14-23---59 61 |
 43 62 28 12 54 32 5 24
 26 | 47 55 2 |
 13-----46-----7-----64

334393/

1-----61-----15-----53
 |63 9 25 |33
 39 60 23 11 58 28 10 31
 |14 6---48-49---21-62---47-13
 38 20 | 43 35 41 29 8 46 |
 |19 57 36 24 30 22 |45 27
 52-18-| 3-44---16-17---59 51 |
 34 55 37 7 54 42 5 26
 32 | 40 56 2 |
 12-----50-----4-----64

334428/

1-----45-----26-----58
 |63 23 13 |31
 37 60 43 8 40 30 10 32
 |16 6---24-54---46-61---44- 9
 36 15 | 38 51 53 17 3 47 |
 |18 62 48 12 14 27 |50 29
 56-21-| 4-19---11-41---59 49 |
 33 55 35 25 57 22 5 28
 34 | 52 42 2 |
 7-----39-----20-----64

340793/

1-----62-----56-----11
 |63 10 29 |28
 61 59 14 18 32 19 23 34
 |20 7---44-40---13-26---53-57
 60 22 | 15 24 17 35 38 49 |
 |16 27 30 48 41 50 |43 5
 8-12-| 39-52---25-21---58 45 |
 31 42 46 33 47 51 6 4
 37 | 36 55 2 |
 54-----9-----3-----64

334317/

1-----57-----16-----56
 |63 14 31 |22
 40 60 41 12 38 21 11 37
 |19 6---30-47---33-62---48-15
 39 10 | 29 52 58 23 4 45 |
 |20 61 42 7 13 36 |55 26
 50-17-| 3-32---18-35---59 46 |
 28 54 44 27 53 24 5 25
 43 | 34 51 2 |
 9-----49-----8-----64

334421/

1-----47-----26-----56
 |63 10 14 |43
 38 60 46 21 34 29 12 20
 | 7 6---35-52---48-61---40-11
 37 23 | 33 41 57 16 3 50 |
 |15 62 49 8 24 32 |42 28
 54-25-| 4-17---13-30---59 58 |
 45 53 36 31 44 19 5 27
 22 | 51 55 2 |
 9-----39-----18-----64

334431/

1-----61-----56-----12
 |63 22 11 |34
 62 59 35 28 13 14 20 29
 |26 7---24-19---38-49---42-55
 57 17 | 18 21 15 32 40 60 |
 | 5 25 33 50 44 47 |48 8
 10-23-| 16-27---46-41---58 39 |
 36 45 51 52 37 30 6 3
 31 | 54 43 2 |
 53-----9-----4-----64

346454/

1-----62-----54-----13
 |63 20 30 |17
 60 59 15 14 23 10 32 47
 |28 7---16-34---40-36---46-53
 57 4 | 24 56 22 26 27 44 |
 |21 38 39 43 9 41 |61 8
 12-19-| 29-25---31-49---58 37 |
 18 33 55 42 51 50 6 5
 48 | 35 45 2 |
 52-----11-----3-----64

.....