

第3部：『魔方陣の新研究』： 撰田 寛二

第4章：六方陣の代数的研究 (2002年版清書稿)

新たに六方陣を研究対象に選び、補数対称方陣と汎魔方陣の親近性を確かめたい。
両方のタイプをなるべく統一的な方法で扱い、積極的に関連づけて研究する。
第1節と第2節をぜひ一緒に読んでいただきたい。

第1節：補数対称六方陣の代数的研究 (新)

「六方陣」とは、 6×6 に配列された数盤のことで、 $1 \sim 36$ の自然数を全個、重複なく欠落なく用いて、左右6列上下6行の和を全て等しく構成したものである。魔方陣らしくするために、加えて2本の主対角線6数の和も等しくする。

「補数対称六方陣」は、その上に方陣の幾何学的中心に関して点对称の位置にある全ての2数(18組ある)の和を等しくして配置したものだ。

基本ポジションと連立方程式を次のように定義する。

1. 基本ポジションの定義

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

2. 連立方程式

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 &= K && \dots\dots (1) \\ n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12} &= K && \dots\dots (2) \\ n_{13} + n_{14} + n_{15} + n_{16} + n_{17} + n_{18} &= K && \dots\dots (3) \\ n_{19} + n_{20} + n_{21} + n_{22} + n_{23} + n_{24} &= K && \dots\dots (4) \\ n_{25} + n_{26} + n_{27} + n_{28} + n_{29} + n_{30} &= K && \dots\dots (5) \\ n_{31} + n_{32} + n_{33} + n_{34} + n_{35} + n_{36} &= K && \dots\dots (6) \\ n_1 + n_7 + n_{13} + n_{19} + n_{25} + n_{31} &= K && \dots\dots (7) \\ n_2 + n_8 + n_{14} + n_{20} + n_{26} + n_{32} &= K && \dots\dots (8) \\ n_3 + n_9 + n_{15} + n_{21} + n_{27} + n_{33} &= K && \dots\dots (9) \\ n_4 + n_{10} + n_{16} + n_{22} + n_{28} + n_{34} &= K && \dots\dots (10) \\ n_5 + n_{11} + n_{17} + n_{23} + n_{29} + n_{35} &= K && \dots\dots (11) \\ n_6 + n_{12} + n_{18} + n_{24} + n_{30} + n_{36} &= K && \dots\dots (12) \\ n_1 + n_8 + n_{15} + n_{22} + n_{29} + n_{36} &= K && \dots\dots (13) \\ n_6 + n_{11} + n_{16} + n_{21} + n_{26} + n_{31} &= K && \dots\dots (14) \end{aligned}$$

(13), (14)式は、2本の主対角線上の6数の定和を定義している。
点对称の位置にある2数ずつの補数定和は、次の式で定義する。

$$\begin{aligned} n_1 + n_{36} = n_2 + n_{35} = n_3 + n_{34} = n_4 + n_{33} = n_5 + n_{32} = n_6 + n_{31} = \\ n_7 + n_{30} = n_8 + n_{29} = n_9 + n_{28} = n_{10} + n_{27} = n_{11} + n_{26} = n_{12} + n_{25} = \\ n_{13} + n_{24} = n_{14} + n_{23} = n_{15} + n_{22} = n_{16} + n_{21} = n_{17} + n_{20} = n_{18} + n_{19} = C &\dots\dots (15) \end{aligned}$$

K, Cの値を先に決めておこう。

(1)~(6)式の辺々を加えて、

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_3 + \dots\dots\dots + n_{35} + n_{36} &= 6 * K \\ 36 \times 37 \div 2 &= 6 * K \\ \text{ゆえに } K &= 111 && \dots\dots (16) \end{aligned}$$

(15)式から $n_1 + n_{36} = n_8 + n_{29} = n_{15} + n_{22} = C$ の辺々を加える。

$$\begin{aligned} n_1 + n_{36} + n_8 + n_{29} + n_{15} + n_{22} &= 3 * C \\ \text{左辺は(13)式と同じである。ゆえに } K &= 3 * C \\ \text{(14)式から } C &= 111 \div 3 = 37 && \dots\dots (17) \end{aligned}$$

(15)式の18組のペアは、「37の補数」群であることがわかった。

3. 計算と発見

(15)式は強力な式だ。任意に選んでいろいろ組み合わせると、対称方陣の様々な性質を表現することができる。例えば、

$$\begin{array}{r} n1 + n36 = C \\ n6 + n31 = C \quad (+) \end{array} \qquad \begin{array}{r} n8 + n29 = C \\ n11 + n26 = C \quad (+) \end{array}$$

$n1 + n6 + n31 + n36 = 2 * C$ から $n8 + n11 + n26 + n29 = 2 * C$
 また $n15 + n22 = n16 + n21 = C$ から $n15 + n16 + n21 + n22 = 2 * C$

これらは、方陣内部の大中小の正方形の頂点連結4数の定和を表している、と言える。

また、対角線6数の定和は、 $n1 + n8 + n15 + n22 + n29 + n36 = K \dots (13)$

左辺 = $(n1 + n36) + (n8 + n29) + (n15 + n22) = C + C + C = K$

(14)式も、 $n6 + n11 + n16 + n21 + n26 + n31 =$

$(n6 + n31) + (n11 + n26) + (n16 + n21) = C + C + C = K$ の構成になっている。

(15)式を仮定すれば、(13), (14)式は、わざわざ定義せずとも、常に成り立つわけだ。

4. 補数表現の導入

(15)式の補数ペアを用いて、基本ポジションおよび連立方程式の全てを次のように書き換える。何が覚えてくるであろうか。

原表現

→

補数表現に書き換える

n1	n2	n3	n4	n5	n6
n7	n8	n9	n10	n11	n12
n13	n14	n15	n16	n17	n18
n19	n20	n21	n22	n23	n24
n25	n26	n27	n28	n29	n30
n31	n32	n33	n34	n35	n36

n1	n2	n3	n4	n5	n6
n7	n8	n9	n10	n11	n12
n13	n14	n15	n16	n17	n18
<u>n18</u>	<u>n17</u>	<u>n16</u>	<u>n15</u>	<u>n14</u>	<u>n13</u>
<u>n12</u>	<u>n11</u>	<u>n10</u>	<u>n9</u>	<u>n8</u>	<u>n7</u>
<u>n6</u>	<u>n5</u>	<u>n4</u>	<u>n3</u>	<u>n2</u>	<u>n1</u>

右図で表しているのは、 $\underline{n1} = C - n1$, $\underline{n2} = C - n2$, $\underline{n3} = C - n3$,
 $\underline{n16} = C - n16$, $\underline{n17} = C - n17$, $\underline{n18} = C - n18$ すなわち、
 $n1 + \underline{n1} = n2 + \underline{n2} = n3 + \underline{n3} = \dots \dots n17 + \underline{n17} = n18 + \underline{n18} = C (=37)$

従って最下行の $\underline{n6} + \underline{n5} + \underline{n4} + \underline{n3} + \underline{n2} + \underline{n1} = K$ は、
 $(C - n6) + (C - n5) + (C - n4) + (C - n3) + (C - n2) + (C - n1)$
 $= 6 * C - (n6 + n5 + n4 + n3 + n2 + n1) = 222 - 111 = 111 = K$
 最上行の $n1 + n2 + n3 + n4 + n5 + n6 = 111$ が成り立てば、必ず成り立つ式である。
 同様にして第2行の $n7 + n8 + n9 + n10 + n11 + n12 = 111$ が成り立てば、
 第5行の $\underline{n12} + \underline{n11} + \underline{n10} + \underline{n9} + \underline{n8} + \underline{n7} = 111$ も必ず成り立つ。
 第3行が成り立てば、第4行も必ず成り立つ。

主対角線の式 $n1 + n8 + n15 + \underline{n15} + \underline{n8} + \underline{n1} = K$ も恒等的な式で、

左辺 = $(n1 + \underline{n1}) + (n8 + \underline{n8}) + (n15 + \underline{n15})$
 $= C + C + C = 3 * 37 = 111 = K$

同様に $n6 + n11 + n16 + \underline{n16} + \underline{n11} + \underline{n6}$
 $= (n6 + \underline{n6}) + (n11 + \underline{n11}) + (n16 + \underline{n16}) = 111 = K$

これらは、(15)式を仮定すれば、常に成り立つから、最初の仮定を減らせる効果がある。

ところが、縦の列和には多少問題があることがわかる。

$n1 + n7 + n13 + \underline{n18} + \underline{n12} + \underline{n6} = K \dots (1列)$
 $n2 + n8 + n14 + \underline{n17} + \underline{n11} + \underline{n5} = K \dots (2列)$
 $n3 + n9 + n15 + \underline{n16} + \underline{n10} + \underline{n4} = K \dots (3列)$

$$n_6 + n_{12} + n_{18} + \underline{n_{13}} + \underline{n_7} + \underline{n_1} = K \dots (6 \text{列})$$

これらは、いずれもが、「成り立ってほしい」方程式であっても、恒等式ではない。必ずしも成り立つ保証はないのである。成立させるためには、最初から定義しておかなければならない。

しかも、(1列)と(6列)をくらべると、 $n_1 + n_7 + n_{13} + \underline{n_{13}} + \underline{n_7} + \underline{n_1} = K$ から次の等式を認めなければならない。

同様に(2列)と(5列)をくらべて、
(3列)と(4列)をくらべて、
上下を入れ替えて式を比較すれば、

$$\begin{aligned} \underline{n_{18}} + \underline{n_{12}} + \underline{n_6} &= \underline{n_{13}} + \underline{n_7} + \underline{n_1} \\ \underline{n_{17}} + \underline{n_{11}} + \underline{n_5} &= \underline{n_{14}} + \underline{n_8} + \underline{n_2} \\ \underline{n_{16}} + \underline{n_{10}} + \underline{n_4} &= \underline{n_{15}} + \underline{n_9} + \underline{n_3} \\ n_1 + n_7 + n_{13} &= n_6 + n_{12} + n_{18} \\ n_2 + n_8 + n_{14} &= n_5 + n_{11} + n_{17} \\ n_3 + n_9 + n_{15} &= n_4 + n_{10} + n_{16} \\ n_4 + n_5 + n_6 &= \underline{n_3} + \underline{n_2} + \underline{n_1} \\ n_1 + n_2 + n_3 &= \underline{n_6} + \underline{n_5} + \underline{n_4} \\ n_7 + n_8 + n_9 &= \underline{n_{12}} + \underline{n_{11}} + \underline{n_{10}} \\ n_{10} + n_{11} + n_{12} &= \underline{n_9} + \underline{n_8} + \underline{n_7} \\ n_{13} + n_{14} + n_{15} &= \underline{n_{18}} + \underline{n_{17}} + \underline{n_{16}} \\ n_{16} + n_{17} + n_{18} &= \underline{n_{15}} + \underline{n_{14}} + \underline{n_{13}} \end{aligned}$$

また
また縦と横を入れ替えれば、

などが全て成り立つことを受け入れなければならない。

はたして1~36の自然数36個を重複なく用いて、元々の定義式の他にこれらの全ての等式を同時に満たすことができるであろうか。

対称六方陣の理念は、自然数36個の集合に過酷な条件を突き付けては居ないだろうか。どうもそう思えてならないのである。

高速プログラムで長時間かけて探索しても、いっこうに解が見つからないからだ。

5. ブロック和の計算

ブロックA	ブロックB	ブロックA	ブロックB																																				
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"><tr><td>n1</td><td>n2</td><td>n3</td></tr><tr><td>n7</td><td>n8</td><td>n9</td></tr><tr><td>n13</td><td>n14</td><td>n15</td></tr></table>	n1	n2	n3	n7	n8	n9	n13	n14	n15	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"><tr><td>n4</td><td>n5</td><td>n6</td></tr><tr><td>n10</td><td>n11</td><td>n12</td></tr><tr><td>n16</td><td>n17</td><td>n18</td></tr></table>	n4	n5	n6	n10	n11	n12	n16	n17	n18	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"><tr><td>n1</td><td>n2</td><td>n3</td></tr><tr><td>n7</td><td>n8</td><td>n9</td></tr><tr><td>n13</td><td>n14</td><td>n15</td></tr></table>	n1	n2	n3	n7	n8	n9	n13	n14	n15	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"><tr><td>n4</td><td>n5</td><td>n6</td></tr><tr><td>n10</td><td>n11</td><td>n12</td></tr><tr><td>n16</td><td>n17</td><td>n18</td></tr></table>	n4	n5	n6	n10	n11	n12	n16	n17	n18
n1	n2	n3																																					
n7	n8	n9																																					
n13	n14	n15																																					
n4	n5	n6																																					
n10	n11	n12																																					
n16	n17	n18																																					
n1	n2	n3																																					
n7	n8	n9																																					
n13	n14	n15																																					
n4	n5	n6																																					
n10	n11	n12																																					
n16	n17	n18																																					
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"><tr><td>n19</td><td>n20</td><td>n21</td></tr><tr><td>n25</td><td>n26</td><td>n27</td></tr><tr><td>n31</td><td>n32</td><td>n33</td></tr></table>	n19	n20	n21	n25	n26	n27	n31	n32	n33	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"><tr><td>n22</td><td>n23</td><td>n24</td></tr><tr><td>n28</td><td>n29</td><td>n30</td></tr><tr><td>n34</td><td>n35</td><td>n36</td></tr></table>	n22	n23	n24	n28	n29	n30	n34	n35	n36	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"><tr><td><u>n18</u></td><td><u>n17</u></td><td><u>n16</u></td></tr><tr><td><u>n12</u></td><td><u>n11</u></td><td><u>n10</u></td></tr><tr><td><u>n6</u></td><td><u>n5</u></td><td><u>n4</u></td></tr></table>	<u>n18</u>	<u>n17</u>	<u>n16</u>	<u>n12</u>	<u>n11</u>	<u>n10</u>	<u>n6</u>	<u>n5</u>	<u>n4</u>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%; height: 100%;"><tr><td><u>n15</u></td><td><u>n14</u></td><td><u>n13</u></td></tr><tr><td><u>n9</u></td><td><u>n8</u></td><td><u>n7</u></td></tr><tr><td><u>n3</u></td><td><u>n2</u></td><td><u>n1</u></td></tr></table>	<u>n15</u>	<u>n14</u>	<u>n13</u>	<u>n9</u>	<u>n8</u>	<u>n7</u>	<u>n3</u>	<u>n2</u>	<u>n1</u>
n19	n20	n21																																					
n25	n26	n27																																					
n31	n32	n33																																					
n22	n23	n24																																					
n28	n29	n30																																					
n34	n35	n36																																					
<u>n18</u>	<u>n17</u>	<u>n16</u>																																					
<u>n12</u>	<u>n11</u>	<u>n10</u>																																					
<u>n6</u>	<u>n5</u>	<u>n4</u>																																					
<u>n15</u>	<u>n14</u>	<u>n13</u>																																					
<u>n9</u>	<u>n8</u>	<u>n7</u>																																					
<u>n3</u>	<u>n2</u>	<u>n1</u>																																					
ブロックC	ブロックD	ブロックC'	ブロックD'																																				

六方陣を上図のように4つのブロックに分け、ブロックどうしの和を調べてみよう。

$$\begin{aligned} \text{ブロックA} + \text{ブロックB} &= (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6) + (n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12}) \\ &\quad + (n_{13} + n_{14} + n_{15} + n_{16} + n_{17} + n_{18}) = K + K + K = 333 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ブロックA} + \text{ブロックC} &= (n_1 + n_7 + n_{13} + n_{19} + n_{25} + n_{31}) + (n_2 + n_8 + n_{14} + n_{20} + n_{26} + n_{32}) \\ &\quad + (n_3 + n_9 + n_{15} + n_{21} + n_{27} + n_{33}) = K + K + K = 333 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ブロックA} + \text{ブロックD}' &= (n_1 + n_2 + n_3) + (\underline{n_3} + \underline{n_2} + \underline{n_1}) + (n_7 + n_8 + n_9) + (\underline{n_9} + \underline{n_8} + \underline{n_7}) \\ &\quad + (n_{13} + n_{14} + n_{15}) + (\underline{n_{15}} + \underline{n_{14}} + \underline{n_{13}}) = (n_1 + \underline{n_1}) + (n_2 + \underline{n_2}) + (n_3 + \underline{n_3}) + (n_7 + \underline{n_7}) \\ &\quad + \dots + (n_{13} + \underline{n_{13}}) + (n_{14} + \underline{n_{14}}) + (n_{15} + \underline{n_{15}}) = 9 \times C = 9 \times 37 = 333 \end{aligned}$$

.....

同じブロックAに、ブロックBを足してもCを足してもD'を足しても、どれもが333になるのだから、 $\text{ブロックB} = \text{ブロックC} = \text{ブロックD}' \dots (BS)$ が言える。

6. 対称六方陣が構成不可能であることの証明へ

ところが、ブロックC+ブロックD=3×K=333

また DとD' は、補数表現かどうかの違いがあるだけで、本来同じものだ。

これと(BS)式から、和に関して ブロックC=ブロックD=333÷2 となる。

この商は、整数にはなり得ない。しかし、ブロック和は整数の和であるから、本来整数でなければならない。これは不合理である。どちらを信じたら良いのだろうか。

ここで「背理法」が使える。かかる不合理な結果になった原因は、(15)式を含む対称方陣の仮定そのものにあるのだから、「対称六方陣は構成不可能である」と結論付ける。

この論証を私が考えた時、最初はもう少し回りくどかったのであるが、鈴木教授の指導を得て、現在のスッキリした形に整理された。教授に、あらためて感謝申し上げたい。教授によると、10次、14次、... などの次数では、対称型の魔方陣は構成不可能だと言う。

伝説のオイラー先生も、それを既に知っていたそうだ。

解が無い訳はわかった。だが、何だか少し寂しい気もする。

7. 対称六方陣から完全六方陣への変換

試みに補数対称六方陣と完全六方陣との対応関係を調べ、変換構成法を探る。

次のようなものが見つかった。

*** 対称六方陣から完全六方陣への変換構成法 ***

原型： → 左右の [4-6] 交換： → 上下の [4-6] 交換：

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

[対称六方陣]

1	2	3	6	5	4
7	8	9	12	11	10
13	14	15	18	17	16
19	20	21	24	23	22
25	26	27	30	29	28
31	32	33	36	35	34

* *

1	2	3	6	5	4
7	8	9	12	11	10
13	14	15	18	17	16
31	32	33	36	35	34
25	26	27	30	29	28
19	20	21	24	23	22

[完全六方陣]

【補数表現形】

原型： → 左右の [4-6] 交換： → 上下の [4-6] 交換：

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
18	17	16	15	14	13
12	11	10	9	8	7
6	5	4	3	2	1

[対称六方陣]

1	2	3	6	5	4
7	8	9	12	11	10
13	14	15	18	17	16
18	17	16	13	14	15
12	11	10	7	8	9
6	5	4	1	2	3

* *

1	2	3	6	5	4
7	8	9	12	11	10
13	14	15	18	17	16
6	5	4	1	2	3
12	11	10	7	8	9
18	17	16	13	14	15

[完全六方陣]

(1) 補数対称六方陣の左右方向第4列と第6列の内容をそっくり交換する。

(2) 次に上下方向第4行と第6行の内容をそっくり交換する。

(1)と(2)の順序を入れ替えてもかまわない。この2つの操作を必ず行えば、それだけで対称六方陣を完全六方陣に作り換えることができる。

下に完全方陣の**拡張空間**を示す。汎対角線6数の定和が成り立つことが確かめられる。

2	3	6	5	4	1	2	3	6	5	4	1	2	3	6	5
8	9	12	11	10	7	8	9	12	11	10	7	8	9	12	11
14	15	18	17	16	13	14	15	18	17	16	13	14	15	18	17
<u>5</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>6</u>	<u>5</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>6</u>	<u>5</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>2</u>
<u>11</u>	<u>10</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>12</u>	<u>11</u>	<u>10</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>12</u>	<u>11</u>	<u>10</u>	<u>7</u>	<u>8</u>
<u>17</u>	<u>16</u>	<u>13</u>	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>18</u>	<u>17</u>	<u>16</u>	<u>13</u>	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>18</u>	<u>17</u>	<u>16</u>	<u>13</u>	<u>14</u>

(例えば, $n_2 + n_9 + n_{18} + n_2 + n_9 + n_{18} = K$ などだ。)

この変換構成法は, 逆にも使える。つまり, 元の対称方陣に戻すことができる。

従って, 37 の補数セットを持った完全六方陣が存在することが別途に確かめられれば, それに対応する点对称六方陣もまた存在することを示せることになる。

この変換構成法によって1対1に対応付けられる対称六方陣と完全六方陣は, 同数だけ存在する。

一方に解が0個存在するならば, 他方にも解は0個存在する。

つまり, 一方に解が存在しないならば, 他方にも解は存在しないと, 言えるわけだ。

第2節：汎六方陣の代数的研究（新）

0. 基本条件

「汎六方陣」とは, 行列の逐次移動が左右上下に可能な六方陣を言う。仮想の対角線が何本もあって, どれもが定和に等しいという要請がある。昔は「完全六方陣」と言った。

汎魔方陣を研究する時には, 方陣空間を下図のように拡張して考えるとわかりやすい。汎対角線が良く見えるようになる。派生形の考察の時にも, 役立つ。行列を移動して新しい方陣を構成する時に, ただ方陣枠を左右上下斜め方向に移動させるだけで済むから。

1. 基本ポジションと変数名の定義

[汎六方陣基本図]

35	36	31	32	33	34	35	36	31	32	33
5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3
11	12	7	8	9	10	11	12	7	8	9
17	18	13	14	15	16	17	18	13	14	15
23	24	19	20	21	22	23	24	19	20	21
29	30	25	26	27	28	29	30	25	26	27
35	36	31	32	33	34	35	36	31	32	33
5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3
11	12	7	8	9	10	11	12	7	8	9
17	18	13	14	15	16	17	18	13	14	15

[拡張空間図]

(↑ 変数名 n_N の n を省いて書いてある。)

2. 連立方程式

$$\begin{aligned}
 n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 &= K \dots (1) \\
 n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12} &= K \dots (2) \\
 n_{13} + n_{14} + n_{15} + n_{16} + n_{17} + n_{18} &= K \dots (3) \\
 n_{19} + n_{20} + n_{21} + n_{22} + n_{23} + n_{24} &= K \dots (4) \\
 n_{25} + n_{26} + n_{27} + n_{28} + n_{29} + n_{30} &= K \dots (5) \\
 n_{31} + n_{32} + n_{33} + n_{34} + n_{35} + n_{36} &= K \dots (6) \\
 n_1 + n_7 + n_{13} + n_{19} + n_{25} + n_{31} &= K \dots (7) \\
 n_2 + n_8 + n_{14} + n_{20} + n_{26} + n_{32} &= K \dots (8) \\
 n_3 + n_9 + n_{15} + n_{21} + n_{27} + n_{33} &= K \dots (9) \\
 n_4 + n_{10} + n_{16} + n_{22} + n_{28} + n_{34} &= K \dots (10) \\
 n_5 + n_{11} + n_{17} + n_{23} + n_{29} + n_{35} &= K \dots (11) \\
 n_6 + n_{12} + n_{18} + n_{24} + n_{30} + n_{36} &= K \dots (12) \\
 n_1 + n_8 + n_{15} + n_{22} + n_{29} + n_{36} &= K \dots (13) \\
 n_1 + n_{12} + n_{17} + n_{22} + n_{27} + n_{32} &= K \dots (14) \\
 n_2 + n_9 + n_{16} + n_{23} + n_{30} + n_{31} &= K \dots (15) \\
 n_2 + n_7 + n_{18} + n_{23} + n_{28} + n_{33} &= K \dots (16) \\
 n_3 + n_{10} + n_{17} + n_{24} + n_{25} + n_{32} &= K \dots (17) \\
 n_3 + n_8 + n_{13} + n_{24} + n_{29} + n_{34} &= K \dots (18) \\
 n_4 + n_{11} + n_{18} + n_{19} + n_{26} + n_{33} &= K \dots (19) \\
 n_4 + n_9 + n_{14} + n_{19} + n_{30} + n_{35} &= K \dots (20) \\
 n_5 + n_{12} + n_{13} + n_{20} + n_{27} + n_{34} &= K \dots (21) \\
 n_5 + n_{10} + n_{15} + n_{20} + n_{25} + n_{36} &= K \dots (22) \\
 n_6 + n_7 + n_{14} + n_{21} + n_{28} + n_{35} &= K \dots (23) \\
 n_6 + n_{11} + n_{16} + n_{21} + n_{26} + n_{31} &= K \dots (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6) \\
n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_{35} + n_{36} = 6 * K \\
36 \times 37 \div 2 = 6 * K \\
\therefore K = 111 \qquad \dots (25)
\end{aligned}$$

3. 計算と発見

先ず汎対角線の特性を調べておこう。

n_1 を通る汎対角線上の 6 数は、次の 2 式で定義されている。

$$\lceil n_1 + n_8 + n_{15} + n_{22} + n_{29} + n_{36} = K \dots (13)$$

$$\lfloor n_1 + n_{12} + n_{17} + n_{22} + n_{27} + n_{32} = K \dots (14)$$

n_{22} で交差するので、左辺には共通項として n_1 , n_{22} を含む。これを右辺に移項すると、

$$\lceil n_8 + n_{15} + n_{29} + n_{36} = K - (n_1 + n_{22}) \dots (13)'$$

$$\lfloor n_{12} + n_{17} + n_{27} + n_{32} = K - (n_1 + n_{22}) \dots (14)'$$

よって、

$$n_8 + n_{15} + n_{29} + n_{36} = n_{12} + n_{17} + n_{27} + n_{32} = K - (n_1 + n_{22}) \dots (26)$$

同様に n_2, n_3, \dots, n_6 を通る汎対角線の 2 式から、

$$\lceil n_9 + n_{16} + n_{30} + n_{31} = K - (n_2 + n_{23}) \dots (15)'$$

$$\lfloor n_7 + n_{18} + n_{28} + n_{33} = K - (n_2 + n_{23}) \dots (16)'$$

$$n_9 + n_{16} + n_{30} + n_{31} = n_7 + n_{18} + n_{28} + n_{33} = K - (n_2 + n_{23}) \dots (27)$$

$$n_{10} + n_{17} + n_{25} + n_{32} = n_8 + n_{13} + n_{29} + n_{34} = K - (n_3 + n_{24}) \dots (28)$$

$$n_{11} + n_{18} + n_{26} + n_{33} = n_9 + n_{14} + n_{30} + n_{35} = K - (n_4 + n_{19}) \dots (29)$$

$$n_{12} + n_{13} + n_{27} + n_{34} = n_{10} + n_{15} + n_{25} + n_{36} = K - (n_5 + n_{20}) \dots (30)$$

$$n_7 + n_{14} + n_{28} + n_{35} = n_{11} + n_{16} + n_{26} + n_{31} = K - (n_6 + n_{21}) \dots (31)$$

次に汎対角線の 2 式の辺々を加える。

$$n_1 + n_8 + n_{15} + n_{22} + n_{29} + n_{36} = K \dots (13)$$

$$+) n_1 + n_{12} + n_{17} + n_{22} + n_{27} + n_{32} = K \dots (14)$$

$$n_1 + n_1 + n_8 + n_{12} + n_{15} + n_{17} + n_{22} + n_{22} + n_{27} + n_{29} + n_{32} + n_{36} = 2 * K$$

$$\{n_8 + n_{12} + n_{32} + n_{36}\} + \{n_{15} + n_{17} + n_{27} + n_{29}\} = 2 * \{K - (n_1 + n_{22})\} \dots (32)$$

この式は、 n_1, n_{22} を対角線の交点とする大小の正方形の連結 4 数の和に関連する。

$$\text{同様に } n_2 + n_9 + n_{16} + n_{23} + n_{30} + n_{31} = K \dots (15)$$

$$+) n_2 + n_7 + n_{18} + n_{23} + n_{28} + n_{33} = K \dots (16)$$

$$\{n_7 + n_9 + n_{31} + n_{33}\} + \{n_{16} + n_{18} + n_{28} + n_{30}\} = 2 * \{K - (n_2 + n_{23})\} \dots (33)$$

$$\{n_8 + n_{10} + n_{32} + n_{34}\} + \{n_{13} + n_{17} + n_{25} + n_{29}\} = 2 * \{K - (n_3 + n_{24})\} \dots (33)$$

$$\{n_9 + n_{11} + n_{33} + n_{35}\} + \{n_{14} + n_{18} + n_{26} + n_{30}\} = 2 * \{K - (n_4 + n_{19})\} \dots (34)$$

次に行列の定和式 4 本と汎対角線の定和式 4 本を選んで辺々を加える。

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = K \dots (1)$$

$$n_1 + n_7 + n_{13} + n_{19} + n_{25} + n_{31} = K \dots (7)$$

$$n_1 + n_8 + n_{15} + n_{22} + n_{29} + n_{36} = K \dots (13)$$

$$n_1 + n_{12} + n_{17} + n_{22} + n_{27} + n_{32} = K \dots (14)$$

$$n_{19} + n_{20} + n_{21} + n_{22} + n_{23} + n_{24} = K \dots (4)$$

$$n_4 + n_{10} + n_{16} + n_{22} + n_{28} + n_{34} = K \dots (10)$$

$$n_4 + n_{11} + n_{18} + n_{19} + n_{26} + n_{33} = K \dots (19)$$

$$n_4 + n_9 + n_{14} + n_{19} + n_{30} + n_{35} = K \dots (20) (+$$

$$3 * (n_1 + n_4 + n_{19} + n_{22}) + \{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12} + n_{13} + n_{14} + n_{15} + n_{16} + n_{17} + n_{18} + n_{19} + n_{20} + n_{21} + n_{23} + n_{24} + n_{25} + n_{26} + n_{27} + n_{28} + n_{29} + n_{30} + n_{31} + n_{32} + n_{33} + n_{34} + n_{35} + n_{36}\} = 8 * K$$

$$3 * (n_1 + n_4 + n_{19} + n_{22}) + \{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \cdots + n_{35} + n_{36}\} = 8 * K$$

$$3 * (n_1 + n_4 + n_{19} + n_{22}) + 36 \times 37 \div 2 = 8 \times 111$$

$$(n_1 + n_4 + n_{19} + n_{22}) = (888 - 666) \div 3 = 222 \div 3$$

$$\therefore n_1 + n_4 + n_{19} + n_{22} = 74 \dots (35)$$

また、別の組合せで、

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 &= K \dots (1) \\ n_{19} + n_{20} + n_{21} + n_{22} + n_{23} + n_{24} &= K \dots (4) \\ n_2 + n_8 + n_{14} + n_{20} + n_{26} + n_{32} &= K \dots (8) \\ n_5 + n_{11} + n_{17} + n_{23} + n_{29} + n_{35} &= K \dots (11) \\ n_2 + n_9 + n_{16} + n_{23} + n_{30} + n_{31} &= K \dots (15) \\ n_2 + n_7 + n_{18} + n_{23} + n_{28} + n_{33} &= K \dots (16) \\ n_5 + n_{12} + n_{13} + n_{20} + n_{27} + n_{34} &= K \dots (21) \\ n_5 + n_{10} + n_{15} + n_{20} + n_{25} + n_{36} &= K \dots (22) \end{aligned}$$

$$3 * (n_2 + n_5 + n_{20} + n_{23}) + \{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{35} + n_{36}\} = 8 * K$$

$$3 * (n_2 + n_5 + n_{20} + n_{23}) + 666 = 888$$

$$\therefore n_2 + n_5 + n_{20} + n_{23} = 74 \dots (36)$$

同様に $n_3 + n_6 + n_{21} + n_{24} = 74 \dots (37)$

繰り返して $n_7 + n_{10} + n_{25} + n_{28} = 74 \dots (38)$

$$n_8 + n_{11} + n_{26} + n_{29} = 74 \dots (39)$$

$$n_9 + n_{12} + n_{27} + n_{30} = 74 \dots (40)$$

$$n_{13} + n_{16} + n_{31} + n_{34} = 74 \dots (41)$$

$$n_{14} + n_{17} + n_{32} + n_{35} = 74 \dots (42)$$

$$n_{15} + n_{18} + n_{33} + n_{36} = 74 \dots (43) \text{ も言える。}$$

六方陣内部に含まれる 4*4 の正方形 9 個の頂点連結 4 数の和は 74 に等しい。

(1) ~ (24), (35) ~ (43) の等式だけでも、汎六方陣を具体的に構成することが可能であるはずだが、結果は必ずしも芳しくない。全式を成り立たせることが実際的に難しい。

高速プログラムで探索・計数させても、いっこうに解が見つからない。あまりに時間がかかり過ぎて、いつも途中で諦めざるを得ない。

4. 「準」汎六方陣の構成

何も無いのは寂しいことだから、条件を少し緩めて「準汎魔方陣」を作ってみよう。

行列の定和が成り立つ。主対角線 2 本の定和も成り立つ。その上で、汎対角線の何本かも、定和が成り立つ。全部成り立っても良いが、それでは解が全然出て来ないので、この際全部成り立たなくても良しとするのである。そんな六方陣を作ってみたのが、次のリストである。各部の和をチェックして定和値 111 との差を掲げている。

** 六次の準汎魔方陣の構成 : **

(n1=1 の時の標準解のリスト (部分) : チェック・サム・エラー付き)

1# Row\Pd1\							13# Row\Pd1\							45# Row\Pd1\						
1	14	27	35	19	15	0\ 0\	1	15	27	35	21	12	0\ 0\	1	20	27	35	15	13	0\ 0\
31	3	30	17	4	26	0\ -5\	31	3	26	18	4	29	0\ -9\	30	3	31	17	4	26	0\ 11\
28	25	5	8	24	21	0\ 0\	30	24	5	9	23	20	0\ 0\	28	25	5	10	24	19	0\ 4\
2	23	22	36	18	10	0\ 0\	2	22	25	36	16	10	0\ 0\	2	16	22	36	23	12	0\ 0\
20	33	11	6	34	7	0\ 5\	19	33	11	6	34	8	0\ 9\	21	33	8	6	34	9	0\ -11\
29	13	16	9	12	32	0\ 0\	28	14	17	7	13	32	0\ 0\	29	14	18	7	11	32	0\ -4\
	0	0	0	0	0	0 Column		0	0	0	0	0 Column		0	0	0	0	0	0 Column	
/	0/	-5/	0/	0/	5/	0/ Pd2Sum	/	3/	-6/	0/	-3/	6/	0/ Pd2Sum	/	-2/	5/	0/	2/	-5/	0/ Pd2Sum

69# Row\Pd1\							105# Row\Pd1\							127# Row\Pd1\						
1	16	27	35	17	15	0\ 0\	1	16	25	35	21	13	0\ 0\	1	19	25	35	18	13	0\ 0\
31	3	30	14	4	29	0\ -1\	31	3	26	18	4	29	0\ -9\	30	3	28	17	4	29	0\ -3\
28	25	5	11	24	18	0\ 0\	30	27	5	9	23	17	0\ -4\	31	23	5	10	26	16	0\ 0\
2	21	22	36	20	10	0\ 0\	2	22	24	36	15	12	0\ 0\	2	22	24	36	15	12	0\ 0\
23	33	8	6	34	7	0\ 1\	19	33	11	6	34	8	0\ 9\	20	33	8	7	34	9	0\ 3\
26	13	19	9	12	32	0\ 0\	28	10	20	7	14	32	0\ 4\	27	11	21	6	14	32	0\ 0\
	0	0	0	0	0	0 Column		0	0	0	0	0 Column		0	0	0	0	0	0 Column	
/	0/	-1/	0/	0/	1/	0/ Pd2Sum	/	-1/	-6/	0/	1/	6/	0/ Pd2Sum	/	0/	-3/	0/	0/	3/	0/ Pd2Sum

141# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -7\ 0\ 0\ 0\ 7\ 0\ 0\ Column Pd2Sum							161# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -3\ 0\ 0\ 0\ 0\ Column Pd2Sum							171# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 0\ 0\ Column Pd2Sum									
1	16	24	35	21	14	0	0	1	18	25	35	17	15	0	0	1	17	23	35	20	15	0	0
31	3	26	18	4	29	0	-7	31	3	28	16	4	29	0	0	31	3	28	16	4	29	0	-3
30	27	5	9	25	15	0	0	30	27	5	11	24	14	0	-3	30	27	5	11	25	13	0	0
2	20	23	36	17	13	0	0	2	20	22	36	19	12	0	0	2	19	22	36	18	14	0	0
19	33	11	6	34	8	0	7	21	33	8	6	34	9	0	0	21	33	9	6	34	8	0	3
28	12	22	7	10	32	0	0	26	10	23	7	13	32	0	3	26	12	24	7	10	32	0	0
0 0 0 0 0 0 0 0 Column / 3/ -4/ 0/ -3/ 4/ 0/ Pd2Sum	0 0 0 0 0 0 0 0 Column / -3/ 0/ 0/ 3/ 0/ 0/ Pd2Sum	0 0 0 0 0 0 0 0 Column / 1/ -2/ 0/ -1/ 2/ 0/ Pd2Sum																					

189# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -6\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 6\ 0\ -1\ Column Pd2Sum							201# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ 4\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ -4\ 0\ -3\ Column Pd2Sum							227# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -2\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ -3\ Column Pd2Sum									
1	14	29	35	21	11	0	0	1	20	29	35	17	9	0	0	1	16	29	35	21	9	0	0
32	3	27	19	4	26	0	-6	32	3	30	16	4	26	0	4	32	3	27	15	4	30	0	-2
28	23	6	9	20	25	0	1	27	19	6	12	23	24	0	3	26	24	6	12	20	23	0	3
2	22	24	36	17	10	0	0	2	22	25	36	15	11	0	0	2	18	25	36	19	11	0	0
18	33	13	5	34	8	0	6	21	33	8	5	34	10	0	-4	22	33	10	5	34	7	0	2
30	16	12	7	15	31	0	-1	28	14	13	7	18	31	0	-3	28	17	14	8	13	31	0	-3
0 0 0 0 0 0 0 0 Column / 1/ -6/ 0/ -1/ 6/ 0/ Pd2Sum	0 0 0 0 0 0 0 0 Column / -3/ -2/ 0/ 3/ 2/ 0/ Pd2Sum	0 0 0 0 0 0 0 0 Column / 3/ -2/ 0/ -3/ 2/ 0/ Pd2Sum																					

271# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -4\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 4\ 0\ -3\ Column Pd2Sum							323# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -5\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 5\ 0\ 0\ Column Pd2Sum							379# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -3\ Column Pd2Sum									
1	19	29	35	18	9	0	0	1	18	29	35	17	11	0	0	1	18	29	35	19	9	0	0
32	3	26	16	4	30	0	-4	32	3	27	15	4	30	0	-5	32	3	27	15	4	30	0	0
27	20	6	12	24	22	0	3	28	20	6	13	23	21	0	0	26	23	6	12	24	20	0	3
2	23	25	36	14	11	0	0	2	25	24	36	14	10	0	0	2	21	25	36	16	11	0	0
21	33	10	5	34	8	0	4	22	33	9	5	34	8	0	5	22	33	7	5	34	10	0	0
28	13	15	7	17	31	0	-3	26	12	16	7	19	31	0	0	28	13	17	8	14	31	0	-3
0 0 0 0 0 0 0 0 Column / 3/ -4/ 0/ -3/ 4/ 0/ Pd2Sum	0 0 0 0 0 0 0 0 Column / 0/ -5/ 0/ 0/ 5/ 0/ Pd2Sum	0 0 0 0 0 0 0 0 Column / 0/ -3/ 0/ 0/ 3/ 0/ Pd2Sum																					

469# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -15\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 15\ 0\ 0\ Column Pd2Sum							529# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -5\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 5\ 0\ 0\ Column Pd2Sum							645# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ 5\ 0\ 6\ 0\ 0\ 0\ -5\ 0\ -6\ Column Pd2Sum									
1	11	28	35	21	15	0	0	1	14	29	35	15	17	0	0	1	21	27	35	13	14	0	0
32	3	25	17	4	30	0	-15	32	3	26	16	4	30	0	-5	32	3	24	18	4	30	0	5
29	24	6	10	23	19	0	0	28	25	6	10	24	18	0	0	29	23	6	10	26	17	0	6
2	26	22	36	16	9	0	0	2	23	20	36	22	8	0	0	2	15	22	36	25	11	0	0
20	33	12	5	34	7	0	15	21	33	11	5	34	7	0	5	19	33	12	5	34	8	0	-5
27	14	18	8	13	31	0	0	27	13	19	9	12	31	0	0	28	16	20	7	9	31	0	-6
0 0 0 0 0 0 0 0 Column / 5/ -10/ 0/ -5/ 10/ 0/ Pd2Sum	0 0 0 0 0 0 0 0 Column / 4/ -1/ 0/ -4/ 1/ 0/ Pd2Sum	0 0 0 0 0 0 0 0 Column / 10/ 9/ 0/ -10/ -9/ 0/ Pd2Sum																					

683# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ Column Pd2Sum							809# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -2\ 0\ -3\ 0\ 0\ 0\ 2\ 0\ 3\ Column Pd2Sum							851# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 0\ 0\ Column Pd2Sum									
1	14	29	35	15	17	0	0	1	16	26	35	19	14	0	0	1	15	26	35	18	16	0	0
32	3	26	18	4	28	0	-1	32	3	25	20	4	27	0	-2	29	3	28	17	4	30	0	-3
30	25	6	10	24	16	0	0	30	28	6	8	24	15	0	-3	32	25	6	10	24	14	0	0
2	23	20	36	22	8	0	0	2	21	23	36	18	11	0	0	2	22	21	36	19	11	0	0
19	33	9	5	34	11	0	1	17	33	9	5	34	13	0	2	20	33	7	8	34	9	0	3
27	13	21	7	12	31	0	0	29	10	22	7	12	31	0	3	27	13	23	5	12	31	0	0
0 0 0 0 0 0 0 0 Column / 0/ -1/ 0/ 0/ 1/ 0/ Pd2Sum	0 0 0 0 0 0 0 0 Column / -4/ -3/ 0/ 4/ 3/ 0/ Pd2Sum	0 0 0 0 0 0 0 0 Column / 0/ -3/ 0/ 0/ 3/ 0/ Pd2Sum																					

901# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 2\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ -2\ Column Pd2Sum							911# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ Column Pd2Sum							945# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -7\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 7\ 0\ 0\ Column Pd2Sum									
1	17	21	35	23	14	0	0	1	16	23	35	21	15	0	0	1	14	26	35	23	12	0	0
32	3	30	15	4	27	0	-1	32	3	26	18	4	28	0	-1	32	3	31	17	4	24	0	-7
26	29	6	12	25	13	0	2	30	29	6	10	24	12	0	0	27	22	7	8	19	28	0	0
2	18	20	36	16	19	0	0	2	17	22	36	20	14	0	0	2	21	25	36	16	11	0	0
22	33	10	5	34	7	0	1	19	33	9	5	34	11	0	1	20	33	13	5	34	6	0	7
28	11	24	8	9	31	0	-2	27	13	25	7	8	31	0	0	29	18	9	10	15	30	0	0
0 0 0 0 0 0 0 0 Column / -1/ -4/ 0/ 1/ 4/ 0/ Pd2Sum	0 0 0 0 0 0 0 0 Column / 0/ -1/ 0/ 0/ 1/ 0/ Pd2Sum	0 0 0 0 0 0 0 0 Column / 0/ -7/ 0/ 0/ 7/ 0/ Pd2Sum																					

2671# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -4\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 4\ 0\ -3\ Column Pd2Sum							6291# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -8\ 0\ -3\ 0\ 0\ 0\ 8\ 0\ 3\ Column Pd2Sum							12191# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -9\ 0\ -2\ 0\ 0\ 0\ 9\ 0\ 2\ Column Pd2Sum									
1	17	27	35	18	13	0	0	1	14	26	35	23	12	0	0	1	13	28	35	22	12	0	0
31	3	32	15	4	26	0	-4	32	3	31	17	4	24	0	-8	32	3	29	18	4	25	0	-9
30	14	8	12	19	28	0	3	27	21	9	8	16	30	0	-3	26	21	10	8	16	30	0	-2
2	23	24	36	16	10	0	0	2	22	25	36	15	11	0	0	2	24	23	36	15	11	0	0
22	33	11	6	34	5	0	4	20	33	13	5	34	6	0	8	19	33	14	5	34	6	0	9
25	21	9	7	20	29	0	-3	29	18	7	10	19	28	0	3	31	17	7	9	20	27	0	2
0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0																					
/ 3/ -4/ 0/ -3/ 4/ 0/ Pd2Sum	/ -3/ -8/ 0/ 3/ 8/ 0/ Pd2Sum	/ -2/ -9/ 0/ 2/ 9/ 0/ Pd2Sum																					

18738# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -8\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 8\ 0\ -1\ Column Pd2Sum							26010# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -6\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 6\ 0\ -3\ Column Pd2Sum							35300# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -3\ Column Pd2Sum									
1	15	29	35	22	9	0	0	1	14	29	35	21	11	0	0	1	22	28	35	17	8	0	0
32	3	27	17	4	28	0	-8	32	3	27	19	4	26	0	-6	32	3	27	16	4	29	0	0
25	19	11	10	16	30	0	1	28	16	12	9	15	31	0	3	25	14	13	10	18	31	0	3
2	23	24	36	14	12	0	0	2	22	24	36	17	10	0	0	2	20	26	36	15	12	0	0
20	33	13	5	34	6	0	8	18	33	13	5	34	8	0	6	21	33	11	5	34	7	0	0
31	18	7	8	21	26	0	-1	30	23	6	7	20	25	0	-3	30	19	6	9	23	24	0	-3
0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0																					
/ 1/ -8/ 0/ -1/ 8/ 0/ Pd2Sum	/ 3/ -6/ 0/ -3/ 6/ 0/ Pd2Sum	/ 3/ 0/ 0/ -3/ 0/ 0/ Pd2Sum																					

45492# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ -3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 3\ Column Pd2Sum							56547# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ Column Pd2Sum							66677# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 4\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ -4\ Column Pd2Sum									
1	17	29	35	16	13	0	0	1	16	29	35	17	13	0	0	1	17	27	35	20	11	0	0
32	3	27	19	4	26	0	0	32	3	26	19	4	27	0	-1	30	3	31	15	4	28	0	1
30	15	14	9	12	31	0	-3	30	14	15	9	12	31	0	0	26	14	16	10	13	32	0	4
2	21	24	36	20	8	0	0	2	20	24	36	21	8	0	0	2	19	24	36	18	12	0	0
18	33	11	5	34	10	0	0	18	33	11	5	34	10	0	1	23	33	8	6	34	7	0	-1
28	22	6	7	25	23	0	3	28	25	6	7	23	22	0	0	29	25	5	9	22	21	0	-4
0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0																					
/ -3/ 0/ 0/ 3/ 0/ 0/ Pd2Sum	/ 1/ 0/ 0/ -1/ 0/ 0/ Pd2Sum	/ 0/ -3/ 0/ 0/ 3/ 0/ Pd2Sum																					

77246# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -9\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 9\ 0\ 0\ Column Pd2Sum							87039# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -7\ 0\ 6\ 0\ 0\ 0\ 7\ 0\ -6\ Column Pd2Sum							97865# Row\Pd1\ 0\ 0\ 0\ -5\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 5\ 0\ 0\ Column Pd2Sum									
1	15	27	35	21	12	0	0	1	15	27	35	20	13	0	0	1	16	27	35	20	12	0	0
31	3	26	18	4	29	0	-9	30	3	29	17	4	28	0	-7	30	3	28	17	4	29	0	-5
28	14	17	7	13	32	0	0	26	11	18	8	16	32	0	6	26	14	19	7	13	32	0	0
2	22	25	36	16	10	0	0	2	25	22	36	14	12	0	0	2	23	24	36	15	11	0	0
19	33	11	6	34	8	0	9	21	33	10	6	34	7	0	7	21	33	8	6	34	9	0	5
30	24	5	9	23	20	0	0	31	24	5	9	23	19	0	-6	31	22	5	10	25	18	0	0
0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0																					
/ 3/ -6/ 0/ -3/ 6/ 0/ Pd2Sum	/ 4/ -9/ 0/ -4/ 9/ 0/ Pd2Sum	/ -2/ -7/ 0/ 2/ 7/ 0/ Pd2Sum																					

** Calculated and Listed by Kanji Setsuda
on Mar. 16, 2013 with MacOSX 10.8.3 and Xcode 4.6.1 **

中には、もう少しで「汎六方阵」というような近似解が見られる。
だが、汎対角線 12 本の定和が全て成り立つ汎六方阵は、かつて作れた経験が無い。

5. 「完全方阵」を目指す

そこで探索する範囲を絞り、目標を変更して、特別な型の汎六方阵を調べよう。
37 の補数 18 ペアを持った**完全六方阵**を作るのである。

(35)～(43)の等式を、

$$(n_1 + n_{22}) + (n_4 + n_{19}) = 74 \dots\dots (35)$$

$$(n_2 + n_{23}) + (n_5 + n_{20}) = 74 \dots\dots (36)$$

$$(n_3 + n_{24}) + (n_6 + n_{21}) = 74 \dots\dots (37)$$

$$(n_7 + n_{28}) + (n_{10} + n_{25}) = 74 \dots\dots (38)$$

$$(n_8 + n_{29}) + (n_{11} + n_{26}) = 74 \dots\dots (39)$$

$$(n_9 + n_{30}) + (n_{12} + n_{27}) = 74 \dots\dots (40)$$

$$(n_{13} + n_{34}) + (n_{16} + n_{31}) = 74 \dots\dots (41)$$

$$(n_{14}+n_{35}) + (n_{17}+n_{32})=74 \dots\dots (42)$$

$$(n_{15}+n_{36}) + (n_{18}+n_{33})=74 \dots\dots (43)$$

というふうに2項ずつの和の形に組み合わせ、さらに分解して

$$n_1 + n_{22} = n_2 + n_{23} = n_3 + n_{24} = n_4 + n_{19} = n_5 + n_{20} = n_6 + n_{21} =$$

$$n_7 + n_{28} = n_8 + n_{29} = n_9 + n_{30} = n_{10} + n_{25} = n_{11} + n_{26} = n_{12} + n_{27} =$$

$$n_{13} + n_{34} = n_{14} + n_{35} = n_{15} + n_{36} = n_{16} + n_{31} = n_{17} + n_{32} = n_{18} + n_{33} = 37 \dots\dots (44)$$

と置くのである。

補数表現で表すと、拡張空間は、次図のようになる。

全ての汎対角線6数の定和が成り立つことを確かめてほしい。立派な完全魔方陣である。

こうすれば、36個の自然数を18組のペアに組み合わせ、いつでも一緒に動かせる。

調べる場合の数を劇的に減らせる。探索がしやすくなるはずである。

しかも、このタイプの完全六魔方陣ならば、左右・上下の(4-6)交換を行うことで、いつでも点対称六魔方陣に作り換えることができる。つまり2種類の六魔方陣の解に一対一対応を付けることができるわけで、この補数型の完全六魔方陣の解を全数求めることで、同時に点対称六魔方陣の解全数を求めることができるようになる(対称六魔方陣の項を参照)。

[完全六魔方陣概念図]

2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
8	9	10	11	12	7	8	9	10	11	12	7	8	9	10	11
14	15	16	17	18	13	14	15	16	17	18	13	14	15	16	17
<u>5</u>	<u>6</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>1</u>	<u>2</u>
<u>11</u>	<u>12</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	<u>11</u>	<u>12</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	<u>11</u>	<u>12</u>	<u>7</u>	<u>8</u>
<u>17</u>	<u>18</u>	<u>13</u>	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>16</u>	<u>17</u>	<u>18</u>	<u>13</u>	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>16</u>	<u>17</u>	<u>18</u>	<u>13</u>	<u>14</u>

ただし、(44)式のような等式群を無理に付け加えてしまったから、解の数は当然少なくなる。

また、上の補数表現の図を見てもわかるように、縦の列和の式

$$n_1 + n_7 + n_{13} + n_4 + n_{10} + n_{16} = K \dots\dots (1列)$$

$$n_4 + n_{10} + n_{16} + n_1 + n_7 + n_{13} = K \dots\dots (4列)$$

および $n_1 + n_7 + n_{13} + n_1 + n_7 + n_{13} = K$ から、

$$n_1 + n_7 + n_{13} = n_4 + n_{10} + n_{16}, \quad n_1 + n_7 + n_{13} = n_4 + n_{10} + n_{16} \quad \text{が言える。}$$

同様にして $n_2 + n_8 + n_{14} = n_5 + n_{11} + n_{17}, \quad n_2 + n_8 + n_{14} = n_5 + n_{11} + n_{17}$

$$n_3 + n_9 + n_{15} = n_6 + n_{12} + n_{18}, \quad n_3 + n_9 + n_{15} = n_6 + n_{12} + n_{18}$$

横の行でも $n_1 + n_2 + n_3 = n_4 + n_5 + n_6, \quad n_1 + n_2 + n_3 = n_4 + n_5 + n_6$

$$n_7 + n_8 + n_9 = n_{10} + n_{11} + n_{12}, \quad n_7 + n_8 + n_9 = n_{10} + n_{11} + n_{12}$$

$$n_{13} + n_{14} + n_{15} = n_{16} + n_{17} + n_{18}, \quad n_{13} + n_{14} + n_{15} = n_{16} + n_{17} + n_{18}$$

が成り立つことを認めなければならない。

等式の数がどんどん増えるので、解の数はどんどん減る心配がある。

6. 解が見つからない

かくしてパソコンに調べさせたが、結果は必ずしも芳しくなかった。時間を食うばかりで、いっこうに解を見つけ出せない。予想は、悲観的である。つまり、解は無いらしい。

鈴木教授のホームページを見ると、解の全数計数の表がある。そこでも、汎六魔方陣の解は0個とある。

補数型の完全六魔方陣の解の集合は一般的な汎六魔方陣の解集合の部分集合を成すはずであるから、汎六魔方陣の解が無いと言うことは、補数型も無いということの意味する。とすると、対応する点対称六魔方陣の解もまた0個ということになる。

補数対称六魔方陣のタイプは1種類しか無いから、よって解の全数は0個である。六魔方陣では、点対称型も完全型も不可能となってしまった。

7. 完全六方陣が構成不可能であることの証明

補数 37 型の完全六方陣の構成が不可能なことを「背理法」を用いて証明しよう。おなじみの拡張空間に書いた補数表現の表を用い、ブロック和の計算を試みる。

					ブロックA											ブロックB										
2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	12	7	8	9	10	11
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	13	14	15	16	17	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2
14	15	16	17	18	10	11	12	7	8	9	10	11	12	7	8	16	17	18	13	14	15	16	17	18	13	14
5	6	1	2	3																						
11	12	7	8	9																						
17	18	13	14	15																						
					ブロックC						ブロックD															

ブロック毎に演算して、

$$A + B = 3 \times K, \quad A + C = 3 \times K, \quad B + D = 3 \times K \text{ は、完全方陣でなくても成り立つ。}$$

$$A + D =$$

$$\{n_1 + n_2 + n_3 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{13} + n_{14} + n_{15}\} + \{n_1 + n_2 + n_3 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{13} + n_{14} + n_{15}\}$$

$$= (n_1 + n_1) + (n_2 + n_2) + (n_3 + n_3) + (n_7 + n_7) + \dots + (n_{14} + n_{14}) + (n_{15} + n_{15}) = 9 \times 37 = 333$$

ゆえに $A = B = C = D$ である。

ところが、 $A + B + C + D = 666$ であった。したがって、 $A = B = C = D = 666 \div 4$

しかし、666 は、4 では割り切れない。しかるに、どのブロックも 1~36 の自然数のみで成り立っているので、9 数の和が整数以外の例えば 166.5 になるなどはあり得ない。これは不合理である。この不合理は、そもそも補数 37 型完全六方陣が (44) 式などを仮定したために起きた。よって、この仮定を排除する。つまり補数 37 型完全六方陣は、構成不可能である。(Q. E. D.)

これで、対称六方陣と補数 37 型完全六方陣の解の数は 0 個と確定してしまった。

だが、だからといって、一般的な汎六方陣の解も 0 個であるかどうかはまだわからない。補数 37 型以外の汎対角線型六方陣が存在するかも知れないからである。

コンピュータによる探索では、まだ解は 1 つも出てはいないけれども、探索が終わったわけではない。物凄い時間がかかるので、いつも途中で計数を中断せざるを得ない。

一般的な汎六方陣でも、

$$n_1 + n_4 + n_{19} + n_{22} = 74, \quad n_2 + n_5 + n_{20} + n_{23} = 74, \quad n_3 + n_6 + n_{21} + n_{24} = 74,$$

$$n_7 + n_{10} + n_{25} + n_{28} = 74, \quad n_8 + n_{11} + n_{26} + n_{29} = 74, \quad \dots\dots$$

などの正方形の頂点連結 4 数の定和 (=74) は、成り立つ。

ところが、ここから

$$n_1 + n_{22} = n_2 + n_{23} = n_3 + n_{24} = n_4 + n_{19} = \dots\dots = n_{14} + n_{35} = n_{15} + n_{36} = \dots\dots = 37$$

までの必然的なリンクがまだ発見されていない。

またブロック間の $A = B = C = D$ を一般的な非補数型の汎六方陣が必ず要求するのかどうか、まだわかっていない。

8. コメント

ここで来し方を振り返る。三方陣では、対称型が 1 個のみ存在した。

平面四方陣では、点対称型も完全型(補数 17 型)も、基本解が 3 個ずつあった。そして、その各々を 1 対 1 対応に関連付ける変換構成法が存在した。立体の四方陣でも、点対称型と完全型(補数 65 型)の解の各々を 1 対 1 に対応付ける変換構成法が見つかった。従って、両方とも解は無数にあるけれども、同数あると考えられる。

平面の五方陣では、補数対称型の基本解は 3 千以上あり、汎型(非補数型)の基本解は 144 個存在する。そして、論理的積集合が存在し、対称型で同時に汎型でもある解が 16 個も見つかった。

そして、今回の六方陣では、補数対称型も完全型も、どちらの解も 0 個となった。

対称型と完全型が意外に近しい関係にあるらしいとは感じていたが、ここまで近しいとは思ってもよらなかった。それこそ「いつも同じ運命を共有している」という感を深くする。

そして、六方陣では、今までの蜜月神話がついに極まってしまい、ともに心中死してしまった。…… まったく何と言ったらよいのだろう。

立体の五方陣や六方陣でも、同様のことが起きているのであろうか。調べてみる必要がある。ただし、5の3乗は、125である。6の3乗は、216である。調べる場合の数が急激に増えるので、とても今のパソコンでは、全数計数は歯が立ちそうにない。

平面の七方陣ならば何とかかなりそうだが、果たしてどういう世界が待っているのだろうか。

対称性と汎対角線性が復活再生して新次元の世界が開けるのだろうか、それともアナーキーな展開が待ち受けているのだろうか。期待と不安が微妙に交錯する。

(Oct. 16, 2000 (初稿) ; Mar. 16, 2013 (清書稿) by 撰田 寛二(Kanji Setsuda))

9. N進法分解図による論証

一般に奇数次の魔方陣では、n進法分解して「オイラー方陣」かどうかをチェックするのが有効な方法だが、偶数次では必ずしも有効ではない。例えば、汎四方陣や汎八方陣では、四進法や八進法分解しても、必ずしも期待するパターンには出あえない。

** 汎四方陣の基本解を四進法分解する **

[1]	/N4i	High/D4i	Low/D4i
1 15 4 14	00 32 03 31	0 3 0 3	0 2 3 1
12 6 9 7	23 11 20 12	2 1 2 1	3 1 0 2
13 3 16 2	30 02 33 01	3 0 3 0	0 2 3 1
8 10 5 11	13 21 10 22	1 2 1 2	3 1 0 2
[2]	/N4i	/D4i	
1 15 6 12	00 32 11 23	0 3 1 2	0 2 1 3
14 4 9 7	31 03 20 12	3 0 2 1	1 3 0 2
11 5 16 2	22 10 33 01	2 1 3 0	2 0 3 1
8 10 3 13	13 21 02 30	1 2 0 3	3 1 2 0
[3]	/N4i	/D4i	
1 15 10 8	00 32 21 13	0 3 2 1	0 2 1 3
14 4 5 11	31 03 10 22	3 0 1 2	1 3 0 2
7 9 16 2	12 20 33 01	1 2 3 0	2 0 3 1
12 6 3 13	23 11 02 30	2 1 0 3	3 1 2 0

オイラー方陣ならば、分解図の上位／下位面ともどの行列にも(0, 1, 2, 3)の組み合わせが無ければならないのに、一部の行列や主対角線に(0, 0, 3, 3)の組み合わせが現れたりして、完全な「ギリシャ・ラテン方陣」の形にはなり得ていない。

** 汎八方陣を八進法分解する **

[1]	High/D8i	Low/D8i
1 63 6 60 38 28 33 31	0 7 0 7 4 3 4 3	0 6 5 3 5 3 0 6
62 4 57 7 25 39 30 36	7 0 7 0 3 4 3 4	5 3 0 6 0 6 5 3
11 53 16 50 48 18 43 21	1 6 1 6 5 2 5 2	2 4 7 1 7 1 2 4
56 10 51 13 19 45 24 42	6 1 6 1 2 5 2 5	7 1 2 4 2 4 7 1
27 37 32 34 64 2 59 5	3 4 3 4 7 0 7 0	2 4 7 1 7 1 2 4
40 26 35 29 3 61 8 58	4 3 4 3 0 7 0 7	7 1 2 4 2 4 7 1
17 47 22 44 54 12 49 15	2 5 2 5 6 1 6 1	0 6 5 3 5 3 0 6
46 20 41 23 9 55 14 52	5 2 5 2 1 6 1 6	5 3 0 6 0 6 5 3

[2]	H/D8i	L/D8i
1 63 10 56 42 24 33 31	0 7 1 6 5 2 4 3	0 6 1 7 1 7 0 6
62 4 53 11 21 43 30 36	7 0 6 1 2 5 3 4	5 3 4 2 4 2 5 3
7 57 16 50 48 18 39 25	0 7 1 6 5 2 4 3	6 0 7 1 7 1 6 0
60 6 51 13 19 45 28 38	7 0 6 1 2 5 3 4	3 5 2 4 2 4 3 5
23 41 32 34 64 2 55 9	2 5 3 4 7 0 6 1	6 0 7 1 7 1 6 0
44 22 35 29 3 61 12 54	5 2 4 3 0 7 1 6	3 5 2 4 2 4 3 5
17 47 26 40 58 8 49 15	2 5 3 4 7 0 6 1	0 6 1 7 1 7 0 6
46 20 37 27 5 59 14 52	5 2 4 3 0 7 1 6	5 3 4 2 4 2 5 3

汎八方阵を八進法分解しても、どの行列にもどの汎対角線にも (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) があるとは限らない。同様に四進法分解してみても、どの行列にもどの汎対角線にも (0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3) があるとは限らない。

上位・下位ともに「ラテン方阵」でなくても、汎魔方陣には成れるのである。つまり、n進法ギリシャ・ラテン型は、汎魔方陣の必要十分条件ではない。

**** 汎八方阵を四進法分解する ****

[1]	High/D4i	Mid/D4i	Low/D4i
1 63 6 60 38 28 33 31	0 3 0 3 2 1 2 1	0 3 1 2 1 2 0 3	0 2 1 3 1 3 0 2
62 4 57 7 25 39 30 36	3 0 3 0 1 2 1 2	3 0 2 1 2 1 3 0	1 3 0 2 0 2 1 3
11 53 16 50 48 18 43 21	0 3 0 3 2 1 2 1	2 1 3 0 3 0 2 1	2 0 3 1 3 1 2 0
56 10 51 13 19 45 24 42	3 0 3 0 1 2 1 2	1 2 0 3 0 3 1 2	3 1 2 0 2 0 3 1
27 37 32 34 64 2 59 5	1 2 1 2 3 0 3 0	2 1 3 0 3 0 2 1	2 0 3 1 3 1 2 0
40 26 35 29 3 61 8 58	2 1 2 1 0 3 0 3	1 2 0 3 0 3 1 2	3 1 2 0 2 0 3 1
17 47 22 44 54 12 49 15	1 2 1 2 3 0 3 0	0 3 1 2 1 2 0 3	0 2 1 3 1 3 0 2
46 20 41 23 9 55 14 52	2 1 2 1 0 3 0 3	3 0 2 1 2 1 3 0	1 3 0 2 0 2 1 3

[2]	H/D4i	M/D4i	L/D4i
1 63 10 56 42 24 33 31	0 3 0 3 2 1 2 1	0 3 2 1 2 1 0 3	0 2 1 3 1 3 0 2
62 4 53 11 21 43 30 36	3 0 3 0 1 2 1 2	3 0 1 2 1 2 3 0	1 3 0 2 0 2 1 3
7 57 16 50 48 18 39 25	0 3 0 3 2 1 2 1	1 2 3 0 3 0 1 2	2 0 3 1 3 1 2 0
60 6 51 13 19 45 28 38	3 0 3 0 1 2 1 2	2 1 0 3 0 3 2 1	3 1 2 0 2 0 3 1
23 41 32 34 64 2 55 9	1 2 1 2 3 0 3 0	1 2 3 0 3 0 1 2	2 0 3 1 3 1 2 0
44 22 35 29 3 61 12 54	2 1 2 1 0 3 0 3	2 1 0 3 0 3 2 1	3 1 2 0 2 0 3 1
17 47 26 40 58 8 49 15	1 2 1 2 3 0 3 0	0 3 2 1 2 1 0 3	0 2 1 3 1 3 0 2
46 20 37 27 5 59 14 52	2 1 2 1 0 3 0 3	3 0 1 2 1 2 3 0	1 3 0 2 0 2 1 3

では、二進法分解してみてもどうか？

汎四方陣に関して、二進法表記図と二進法分解図を下に示そう。汎八方阵には、二進法分解図を下に示そう。

**** 汎四方陣の大基本解3個を二進法分解する ****

[1]	/N2i	/D2i				
1 15 4 14	0000 1110 0011 1101	0 1 0 1	0 1 0 1	0 1 1 0	0 0 1 1	
12 6 9 7	1011 0101 1000 0110	1 0 1 0	0 1 0 1	1 0 0 1	1 1 0 0	
13 3 16 2	1100 0010 1111 0001	1 0 1 0	1 0 1 0	0 1 1 0	0 0 1 1	
8 10 5 11	0111 1001 0100 1010	0 1 0 1	1 0 1 0	1 0 0 1	1 1 0 0	
		2^3	2^2	2^1	2^0	

[2]	/N2i	/D2i				
1 15 6 12	0000 1110 0101 1011	0 1 0 1	0 1 1 0	0 1 0 1	0 0 1 1	
14 4 9 7	1101 0011 1000 0110	1 0 1 0	1 0 0 1	0 1 0 1	1 1 0 0	
11 5 16 2	1010 0100 1111 0001	1 0 1 0	0 1 1 0	1 0 1 0	0 0 1 1	
8 10 3 13	0111 1001 0010 1100	0 1 0 1	1 0 0 1	1 0 1 0	1 1 0 0	

で、みな同じなのである。ゆえに定和の証明に使うことができる。

汎八方陣でも、

$$(0+0+0+0+1+1+1+1) \times 2^5 + (0+0+0+0+1+1+1+1) \times 2^4 + (0+0+0+0+1+1+1+1) \times 2^3 + (0+0+0+0+1+1+1+1) \times 2^2 + (0+0+0+0+1+1+1+1) \times 2^1 + (0+0+0+0+1+1+1+1) \times 2^0 = (0+0+0+0+1+1+1+1) \times (32+16+8+4+2+1) = 4 \times 63 = 252(+)$$

この美しい構造は、各面が同数の (0, 1) によって成り立っているからこそ出来る。しかも、この二進法分解の構造は、汎魔方陣、特に正方連結型のその必要十分条件になっているみたいなのだ。

これは私の直感だが、正方連結型汎魔方陣ならば、必ずこの構造を有する。

またこの構造を有すれば、必ず正方連結型汎魔方陣である。

この論証は、実はまだ出来ていないが、直感的に言って正しいように思われる。

では、わが汎六方陣の場合は、どうだろうか？ この構造を有するか？
 先ず基本図から、六進法と二進法で分解して調べてみよう。次図を見てほしい。

頼みは二進法だが、とても分解図の各面に (0, 1) を同数置けるとは言い難い。

**** 六方陣基本図を六進法分解する ****

[0]		/N6i		/D6i	High/Low																		
1	2	3	4	5	6	00	01	02	03	04	05	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4	5
7	8	9	10	11	12	10	11	12	13	14	15	1	1	1	1	1	1	0	1	2	3	4	5
13	14	15	16	17	18	20	21	22	23	24	25	2	2	2	2	2	2	0	1	2	3	4	5
19	20	21	22	23	24	30	31	32	33	34	35	3	3	3	3	3	3	0	1	2	3	4	5
25	26	27	28	29	30	40	41	42	43	44	45	4	4	4	4	4	4	0	1	2	3	4	5
31	32	33	34	35	36	50	51	52	53	54	55	5	5	5	5	5	5	0	1	2	3	4	5

**** 六方陣基本図を二進法分解する ****

[0]		/D2i									
1	2	3	4	5	6	000000	000000	000000	000011	001100	010101
7	8	9	10	11	12	000000	000000	001111	110000	110011	010101
13	14	15	16	17	18	000000	000011	111100	111100	001100	010101
19	20	21	22	23	24	000000	111111	000000	001111	110011	010101
25	26	27	28	29	30	000000	111111	111111	000011	001100	010101
31	32	33	34	35	36	001111	110000	110000	110000	110011	010101
						2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

問題は最上位面にある。面が未完成なのである。

1 がもともと 4 個しかない。それは、最上位が 32 以上の数値を表す面で、0 ~ 35 の整数中には 32, 33, 34, 35 の 4 数しかないからだ。これでは、例の美しい構造を作りようがない。定和を意味する「同じ計算式」を求めようがない。

分解図の最上位面を同数の (0, 1) でうめ尽くすには、32 ~ 63 の連続する整数が要る。2 のべき乗で構成される面は、16, 32, 64, 128, 256, ... という最大値 (正確にはそれから 1 減じた数値) を扱う。つまり、四方陣, 八方陣・十六方陣・... のみが、例の美しい構造を持ち得る。

それ以外の次数では、この美しい構造を持ちようがない。

すなわち、六次のラテン型魔方陣は構成のしようがない。

オイラー先生御自身は、250 年も前に既にこのことを知っていたのではあるまいか？

最後に正方連結準汎六方陣の解を二進法分解した例をいくつか示して終わる。

* * 正方連結準汎六方陣の解を二進法分解した例 * *

[1]	/D2i									
1 36 4 33 7 30	010100	000001	000001	000011	011010	011001				
35 2 32 5 29 8	100000	001010	001010	001111	101001	011001				
3 34 6 31 9 28	010000	000101	000111	001100	100101	011001				
26 11 23 14 20 17	000000	101011	110100	001100	011010	100110				
21 16 24 13 27 10	000000	101010	010111	111100	011010	011001				
25 12 22 15 19 18	000000	101011	110100	001100	010110	011001				
		2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0			
[2]	/D2i									
1 36 4 33 7 30	010100	000001	000001	000011	011010	011001				
35 2 32 5 29 8	100000	001010	001010	001111	101001	011001				
3 34 6 31 9 28	010000	000101	000111	001100	100101	011001				
27 10 24 13 21 16	000000	101010	110101	001111	101001	011001				
19 18 22 15 25 12	000000	111010	000111	001100	100101	011001				
26 11 23 14 20 17	000000	101011	110100	001100	011010	100110				
		2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0			
[3]	/D2i									
1 36 4 33 7 30	010100	000001	000001	000011	011010	011001				
35 2 32 5 29 8	100000	001010	001010	001111	101001	011001				
3 34 6 31 9 28	010000	000101	000111	001100	100101	011001				
27 10 24 13 21 16	000000	101010	110101	001111	101001	011001				
20 17 23 14 26 11	000000	111010	000111	001100	101001	100110				
25 12 22 15 19 18	000000	101011	110100	001100	010110	011001				
[4]	/D2i									
1 36 4 33 7 30	010100	000001	000001	000011	011010	011001				
35 2 32 5 29 8	100000	001010	001010	001111	101001	011001				
19 18 22 15 25 12	000000	111010	000111	001100	100101	011001				
26 11 23 14 20 17	000000	101011	110100	001100	011010	100110				
21 16 24 13 27 10	000000	101010	010111	111100	011010	011001				
9 28 6 31 3 34	000001	010100	110100	001100	010110	011001				
.....										

(改定稿 : Sep. 17, 2002; 清書稿 : Mar. 16, 2013; 撰田 寛二 (Kanji Setsuda))

第3節 : 正方連結六方陣の代数的研究 (新)

○. 正方連結六方陣とは、方陣内部から任意の 2×2 の隣り合う4数をとって加えた時にある定数に等しくなる六方陣を言う。例えば、右図で $1 + 36 + 35 + 2 = 74$ ばかりでなく、
 $12 + 22 + 17 + 23 = 74$, $29 + 8 + 9 + 28 = 74$,
 が成り立つ。

1 36 4 33 7 30
35 2 32 5 29 8
3 34 6 31 9 28
25 12 22 15 19 18
20 17 23 14 26 11
27 10 24 13 21 16

例によって、基本条件を次のように図と式で定義する。

1. 基本ポジションと変数名 2. 連立方程式

[nNの n を省略]

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

[(13), (14)式は, 対角線の定和を表す]

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 &= K \dots (1) \\ n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12} &= K \dots (2) \\ n_{13} + n_{14} + n_{15} + n_{16} + n_{17} + n_{18} &= K \dots (3) \\ n_{19} + n_{20} + n_{21} + n_{22} + n_{23} + n_{24} &= K \dots (4) \\ n_{25} + n_{26} + n_{27} + n_{28} + n_{29} + n_{30} &= K \dots (5) \\ n_{31} + n_{32} + n_{33} + n_{34} + n_{35} + n_{36} &= K \dots (6) \\ n_1 + n_7 + n_{13} + n_{19} + n_{25} + n_{31} &= K \dots (7) \\ n_2 + n_8 + n_{14} + n_{20} + n_{26} + n_{32} &= K \dots (8) \\ n_3 + n_9 + n_{15} + n_{21} + n_{27} + n_{33} &= K \dots (9) \\ n_4 + n_{10} + n_{16} + n_{22} + n_{28} + n_{34} &= K \dots (10) \\ n_5 + n_{11} + n_{17} + n_{23} + n_{29} + n_{35} &= K \dots (11) \\ n_6 + n_{12} + n_{18} + n_{24} + n_{30} + n_{36} &= K \dots (12) \\ n_1 + n_8 + n_{15} + n_{22} + n_{29} + n_{36} &= K \dots (13)* \\ n_6 + n_{11} + n_{16} + n_{21} + n_{26} + n_{31} &= K \dots (14)* \end{aligned}$$

という一般的な六方陣の条件を満たした上で, 次の条件も成り立たせなければならない。

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_7 + n_8 &= S \dots (15) & n_2 + n_3 + n_8 + n_9 &= S \dots (16) \\ n_3 + n_4 + n_9 + n_{10} &= S \dots (17) & n_4 + n_5 + n_{10} + n_{11} &= S \dots (18) \\ n_5 + n_6 + n_{11} + n_{12} &= S \dots (19) & & \\ n_7 + n_8 + n_{13} + n_{14} &= S \dots (20) & n_8 + n_9 + n_{14} + n_{15} &= S \dots (21) \\ n_9 + n_{10} + n_{15} + n_{16} &= S \dots (22) & n_{10} + n_{11} + n_{16} + n_{17} &= S \dots (23) \\ n_{11} + n_{12} + n_{17} + n_{18} &= S \dots (24) & & \\ n_{13} + n_{14} + n_{19} + n_{20} &= S \dots (25) & n_{14} + n_{15} + n_{20} + n_{21} &= S \dots (26) \\ n_{15} + n_{16} + n_{21} + n_{22} &= S \dots (27) & n_{16} + n_{17} + n_{22} + n_{23} &= S \dots (28) \\ n_{17} + n_{18} + n_{23} + n_{24} &= S \dots (29) & & \\ n_{19} + n_{20} + n_{25} + n_{26} &= S \dots (30) & n_{20} + n_{21} + n_{26} + n_{27} &= S \dots (31) \\ n_{21} + n_{22} + n_{27} + n_{28} &= S \dots (32) & n_{22} + n_{23} + n_{28} + n_{29} &= S \dots (33) \\ n_{23} + n_{24} + n_{29} + n_{30} &= S \dots (34) & & \\ n_{25} + n_{26} + n_{31} + n_{32} &= S \dots (35) & n_{26} + n_{27} + n_{32} + n_{33} &= S \dots (36) \\ n_{27} + n_{28} + n_{33} + n_{34} &= S \dots (37) & n_{28} + n_{29} + n_{34} + n_{35} &= S \dots (38) \\ n_{29} + n_{30} + n_{35} + n_{36} &= S \dots (39) & & \end{aligned}$$

隣り合う任意の正方連結四数 (= 2 × 2) の和が, いつでも等しくなければならない。

先ず K, S などの定数の値を求めておこう。

(1)~(6)の辺々を加えると,

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{35} + n_{36} = 6 * K$$

左辺には 1 ~ 36 の自然数が全個入るから, その総和は $37 \times 36 \div 2 = 666$

$$666 = 6 * K$$

ゆえに $K = 111 \dots (40)$

また (15) + (17) + (19)

$$n_1 + n_2 + n_7 + n_8 = S \dots (15)$$

$$n_3 + n_4 + n_9 + n_{10} = S \dots (17)$$

$$+) n_5 + n_6 + n_{11} + n_{12} = S \dots (19)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12} = 3 * S$$

左辺は (1) + (2) 式の左辺と同じだから, $3 * S = 2 * K$

$$\text{よって } 3 * S = 222$$

$$\therefore S = 74 \dots (41)$$

3. 正方連結四数の特徴

2 式ずつ組み合わせてわかることは,

$$\begin{array}{ll}
\lceil n_1 + n_7 + n_2 + n_8 = S \dots (15) \rceil & \\
\lfloor n_2 + n_8 + n_3 + n_9 = S \dots (16) \rfloor & n_1 + n_7 = n_3 + n_9 \quad (=P \text{ とおく}) \\
\lceil n_2 + n_8 + n_3 + n_9 = S \dots (16) \rceil & \\
\lfloor n_3 + n_9 + n_4 + n_{10} = S \dots (17) \rfloor & n_2 + n_8 = n_4 + n_{10} \quad (=Q \text{ とおく}) \\
\lceil n_3 + n_9 + n_4 + n_{10} = S \dots (17) \rceil & \\
\lfloor n_4 + n_{10} + n_5 + n_{11} = S \dots (18) \rfloor & n_3 + n_9 = n_5 + n_{11} = P \\
\lceil n_4 + n_{10} + n_5 + n_{11} = S \dots (18) \rceil & \\
\lfloor n_5 + n_{11} + n_6 + n_{12} = S \dots (19) \rfloor & n_4 + n_{10} = n_6 + n_{12} = Q
\end{array}$$

まとめると,

$$n_1 + n_7 = n_3 + n_9 = n_5 + n_{11} = P \dots (42)$$

$$n_2 + n_8 = n_4 + n_{10} = n_6 + n_{12} = Q \dots (43)$$

そして, $P + Q = S$ (=74)

だから, $n_1 + n_7 + n_6 + n_{12} = P + Q = S$

よって, 左端の列を右端に移動しても, 正方連結四数の定和が成り立つ。

これは, 完全方陣の特徴の1つに似ている。

同様にして,

$$\begin{array}{ll}
\lceil n_7 + n_{13} = n_9 + n_{15} = n_{11} + n_{17} = P_2 \dots (44) \rceil & \\
\lfloor n_8 + n_{14} = n_{10} + n_{16} = n_{12} + n_{18} = Q_2 \dots (45) \rfloor & P_2 + Q_2 = S \\
\lceil n_{13} + n_{19} = n_{15} + n_{21} = n_{17} + n_{23} = P_3 \dots (46) \rceil & \\
\lfloor n_{14} + n_{20} = n_{16} + n_{22} = n_{18} + n_{24} = Q_3 \dots (47) \rfloor & P_3 + Q_3 = S \\
\lceil n_{19} + n_{25} = n_{21} + n_{27} = n_{23} + n_{29} = P_4 \dots (48) \rceil & \\
\lfloor n_{20} + n_{26} = n_{22} + n_{28} = n_{24} + n_{30} = Q_4 \dots (49) \rfloor & P_4 + Q_4 = S \\
\lceil n_{25} + n_{31} = n_{27} + n_{33} = n_{29} + n_{35} = P_5 \dots (50) \rceil & \\
\lfloor n_{26} + n_{32} = n_{28} + n_{34} = n_{30} + n_{36} = Q_5 \dots (51) \rfloor & P_5 + Q_5 = S
\end{array}$$

P, Q, P_2, Q_2 の式から

$$n_1 + n_7 + n_6 + n_{12} = S \rightarrow n_1 + n_6 + n_7 + n_{12} = S$$

$$n_7 + n_{13} + n_{12} + n_{18} = S \rightarrow n_7 + n_{12} + n_{13} + n_{18} = S$$

ゆえに $n_1 + n_6 = n_{13} + n_{18}$ (= P_6 とおく)

同様の考察から

$$\begin{array}{ll}
\lceil n_1 + n_6 = n_{13} + n_{18} = n_{25} + n_{30} = P_6 \dots (52) \rceil & \\
\lfloor n_7 + n_{12} = n_{19} + n_{24} = n_{31} + n_{36} = Q_6 \dots (53) \rfloor & P_6 + Q_6 = S
\end{array}$$

なども言える。

また

$$\begin{array}{ll}
\lceil n_1 + n_2 + n_7 + n_8 = S \dots (15) \rceil & \\
\lfloor n_7 + n_8 + n_{13} + n_{14} = S \dots (20) \rfloor & n_1 + n_2 = n_{13} + n_{14} \quad (=M \text{ とおく}) \\
\lceil n_7 + n_8 + n_{13} + n_{14} = S \dots (20) \rceil & \\
\lfloor n_{13} + n_{14} + n_{19} + n_{20} = S \dots (25) \rfloor & n_7 + n_8 = n_{19} + n_{20} \quad (=N \text{ とおく}) \\
\lceil n_{13} + n_{14} + n_{19} + n_{20} = S \dots (25) \rceil & \\
\lfloor n_{19} + n_{20} + n_{25} + n_{26} = S \dots (30) \rfloor & n_{13} + n_{14} = n_{25} + n_{26} = M \\
\lceil n_{19} + n_{20} + n_{25} + n_{26} = S \dots (30) \rceil & \\
\lfloor n_{25} + n_{26} + n_{31} + n_{32} = S \dots (35) \rfloor & n_{19} + n_{20} = n_{31} + n_{32} = N
\end{array}$$

まとめると,

$$n_1 + n_2 = n_{13} + n_{14} = n_{25} + n_{26} = M \dots (54) \rceil$$

$$n_7 + n_8 = n_{19} + n_{20} = n_{31} + n_{32} = N \dots (55) \rfloor \quad M + N = S$$

同様にして

$$\begin{array}{ll}
\lceil n_2 + n_3 = n_{14} + n_{15} = n_{26} + n_{27} = M_2 \dots (56) \rceil & \\
\lfloor n_8 + n_9 = n_{20} + n_{21} = n_{32} + n_{33} = N_2 \dots (57) \rfloor & M_2 + N_2 = S \\
\lceil n_3 + n_4 = n_{15} + n_{16} = n_{27} + n_{28} = M_3 \dots (58) \rceil & \\
\lfloor n_9 + n_{10} = n_{21} + n_{22} = n_{33} + n_{34} = N_3 \dots (59) \rfloor & M_3 + N_3 = S \\
\lceil n_4 + n_5 = n_{16} + n_{17} = n_{28} + n_{29} = M_4 \dots (60) \rceil & \\
\lfloor n_{10} + n_{11} = n_{22} + n_{23} = n_{34} + n_{35} = N_4 \dots (61) \rfloor & M_4 + N_4 = S \\
\lceil n_5 + n_6 = n_{17} + n_{18} = n_{29} + n_{30} = M_5 \dots (62) \rceil & \\
\lfloor n_{11} + n_{12} = n_{23} + n_{24} = n_{35} + n_{36} = N_5 \dots (63) \rfloor & M_5 + N_5 = S
\end{array}$$

これによって例えば最上行を最下行に移しても、正方連結四数の定和が成り立つことがわかる。
 $[n_1 + n_2 + n_{31} + n_{32} = M + N = S, \dots, n_5 + n_6 + n_{35} + n_{36} = M_5 + N_5 = S \text{ などから}]$

また $n_1 + n_2 + n_{31} + n_{32} = S \rightarrow n_1 + n_{31} + n_2 + n_{32} = S$
 $n_2 + n_3 + n_{32} + n_{33} = S \rightarrow n_2 + n_{32} + n_3 + n_{33} = S$
 ゆえに $n_1 + n_{31} = n_3 + n_{33} (=M_6 \text{ とおく})$

同様の考察をくり返すと、

$\lceil n_1 + n_{31} = n_3 + n_{33} = n_5 + n_{35} = M_6 \dots (64) \rceil$
 $\lfloor n_2 + n_{32} = n_4 + n_{34} = n_6 + n_{36} = N_6 \dots (65) \rfloor \quad M_6 + N_6 = S$

なども言えてしまう。

また (15)+(19)+(35)+(39)
 $n_1 + n_2 + n_7 + n_8 = S \dots (15)$
 $n_5 + n_6 + n_{11} + n_{12} = S \dots (19)$
 $n_{25} + n_{26} + n_{31} + n_{32} = S \dots (35)$
 +) $n_{29} + n_{30} + n_{35} + n_{36} = S \dots (39)$

$n_1 + n_2 + n_7 + n_8 + n_5 + n_6 + n_{11} + n_{12} + n_{25} + n_{26} + n_{31} + n_{32} + n_{29} + n_{30} + n_{35} + n_{36} = 4 * S$
 $\{n_1 + n_6 + n_{31} + n_{36}\} + \{n_2 + n_8 + n_5 + n_{11}\} + \{n_{26} + n_{32} + n_{29} + n_{35}\} + \{n_7 + n_{12} + n_{25} + n_{30}\} = 4 * S$

$\{n_1 + n_6 + n_{31} + n_{36}\} + \{Q + P\} + \{Q_5 + P_5\} + \{Q_6 + P_6\} = 4 * S$
 $\{n_1 + n_6 + n_{31} + n_{36}\} + S + S + S = 4 * S$
 ゆえに $n_1 + n_6 + n_{31} + n_{36} = S \dots (66)$

また

(44), (45)式から $n_8 + n_{14} + n_{11} + n_{17} = P_2 + Q_2 = S$
 (48), (49)式から $n_{20} + n_{26} + n_{23} + n_{29} = P_4 + Q_4 = S (+$

$n_8 + n_{14} + n_{11} + n_{17} + n_{20} + n_{26} + n_{23} + n_{29} = 2 * S$
 $\{n_8 + n_{11} + n_{26} + n_{29}\} + \{n_{14} + n_{20} + n_{17} + n_{23}\} = 2 * S$

ところが、 $n_{14} + n_{20} + n_{17} + n_{23} = P_3 + Q_3 = S$ だから

$\{n_8 + n_{11} + n_{26} + n_{29}\} + S = 2 * S$
 ゆえに $n_8 + n_{11} + n_{26} + n_{29} = S \dots (67)$

かくして(66), (67)および(27)式により、大中小の3サイズで正方連結四数の定和が言えることがわかった。

同様にして $n_1 + n_7 + n_4 + n_{10} = P + Q = S [(42), (43)より]$
 +) $n_{13} + n_{19} + n_{16} + n_{22} = P_3 + Q_3 = S [(46), (47)より]$

$n_1 + n_7 + n_4 + n_{10} + n_{13} + n_{19} + n_{16} + n_{22} = 2 * S$
 $\{n_1 + n_4 + n_{19} + n_{22}\} + \{n_7 + n_{13} + n_{10} + n_{16}\} = 2 * S$
 $\{n_1 + n_4 + n_{19} + n_{22}\} + \{P_2 + Q_2\} = 2 * S$
 $\{n_1 + n_4 + n_{19} + n_{22}\} + S = 2 * S$

ゆえに $n_1 + n_4 + n_{19} + n_{22} = S \dots (68)$

同様にして $n_2 + n_5 + n_{20} + n_{23} = S \dots (69)$

$n_3 + n_6 + n_{21} + n_{24} = S \dots (70)$

.....

$n_{15} + n_{18} + n_{33} + n_{36} = S \dots (76)$

なども言えてしまう。

これは、汎六方陣（完全六方陣）の考察の時に出て来た関係式と同じである。
 正方連結六方陣は、はたして汎六方陣たり得るのであろうか。

4. 対角線について

前節の考察から得た次の3式から始める。

(66)+(67)+(27)

$$\begin{aligned} n_1 + n_6 + n_{31} + n_{36} &= S = 74 \dots (66) \\ n_8 + n_{11} + n_{26} + n_{29} &= S = 74 \dots (67) \\ +) n_{15} + n_{16} + n_{21} + n_{22} &= S = 74 \dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1 + n_6 + n_{31} + n_{36} + n_8 + n_{11} + n_{26} + n_{29} + n_{15} + n_{16} + n_{21} + n_{22} &= 3 * S \\ (n_1 + n_8 + n_{15} + n_{22} + n_{29} + n_{36}) + (n_6 + n_{11} + n_{16} + n_{21} + n_{26} + n_{31}) &= 3 * S \dots (77) \end{aligned}$$

この式の左辺は、2本の対角線の和の形になっている。だから、

$$\lceil n_1 + n_8 + n_{15} + n_{22} + n_{29} + n_{36} = K = 111 \dots (13) \rceil$$

$$\lfloor n_6 + n_{11} + n_{16} + n_{21} + n_{26} + n_{31} = K = 111 \dots (14) \rfloor$$

の両式が成り立てば、

$$K + K = 3 * S$$

$$\text{つまり } 2 * K = 3 * S$$

これは、 $2 * 111 = 3 * 74 = 222$ だから、問題ない。

ところで我が正方連結六方陣では左端の1列を右端に移しても、正方連結などの諸条件が成り立つのであった。この点は、完全方陣の性質によく似ている。

だから、下図のような拡張空間を描くことが可能である。

ここでは、

$$\begin{aligned} n_1 + n_6 + n_7 + n_{12} &= S \\ n_7 + n_{12} + n_{13} + n_{18} &= S \\ n_{13} + n_{18} + n_{19} + n_{24} &= S \\ n_{19} + n_{24} + n_{25} + n_{30} &= S \\ n_{25} + n_{30} + n_{31} + n_{36} &= S \\ n_{31} + n_{36} + n_1 + n_6 &= S \quad \text{なども、言える。} \end{aligned}$$

[拡張空間]

36 31 32 33 34 35 36 31 32 33

6	1	2	3	4	5	6	1	2	3
12	7	8	9	10	11	12	7	8	9
18	13	14	15	16	17	18	13	14	15
24	19	20	21	22	23	24	19	20	21
30	25	26	27	28	29	30	25	26	27
36	31	32	33	34	35	36	31	32	33

6 1 2 3 4 5 6 1 2 3

12 7 8 9 10 11 12 7 8 9

また

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_{31} + n_{32} &= S \\ n_2 + n_3 + n_{32} + n_{33} &= S \\ n_3 + n_4 + n_{33} + n_{34} &= S \\ n_4 + n_5 + n_{34} + n_{35} &= S \\ n_5 + n_6 + n_{35} + n_{36} &= S \\ n_6 + n_1 + n_{36} + n_{31} &= S \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_{31} + n_{32} &= S \\ n_9 + n_{12} + n_{27} + n_{30} &= S \\ n_{16} + n_{17} + n_{22} + n_{23} &= S \quad (+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_{31} + n_{32} + n_9 + n_{12} + n_{27} + n_{30} + n_{16} + n_{17} + n_{22} + n_{23} &= 3 * S = 2 * K \\ (n_1 + n_{12} + n_{17} + n_{22} + n_{27} + n_{32}) + (n_2 + n_9 + n_{16} + n_{23} + n_{30} + n_{31}) &= 2 * K \dots (78) \end{aligned}$$

なども言えてしまう。

これは、元の対角線と1筋ずれた対角線(つまり汎対角線)の6数の和についての関係式になっている。他の汎対角線の6数の和に関しても、同様の式が得られる。

また次のような関係式も、既に得られている。

$$n_2 + n_8 = n_6 + n_{12} = Q \dots (43) \quad n_9 + n_{15} = n_{11} + n_{17} = P_2 \dots (44)$$

$$n_{21} + n_{27} = n_{23} + n_{29} = P_4 \dots (48) \quad n_{26} + n_{32} = n_{30} + n_{36} = Q_5 \dots (51)$$

$$\text{従って、 } n_1 + n_8 + n_{15} + n_{22} + n_{29} + n_{36} = K \dots (13)$$

$$n_6 + n_{11} + n_{16} + n_{21} + n_{26} + n_{31} = K \dots (14)$$

の両式が成り立てば、(78)式は均等に分割されて

$$n_1 + n_{12} + n_{17} + n_{22} + n_{27} + n_{32} = K$$

$$n_2 + n_9 + n_{16} + n_{23} + n_{30} + n_{31} = K \dots (79)$$

[この証明は、けっこう煩雑だ。

$$\begin{aligned} n_1 + n_{12} + n_{17} + n_{22} + n_{27} + n_{32} &= J \text{ とおく} \\ +) n_6 + n_{11} + n_{16} + n_{21} + n_{26} + n_{31} &= K \dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_1 + n_6 + n_{11} + n_{12} + n_{16} + n_{17} + n_{21} + n_{22} + n_{26} + n_{27} + n_{31} + n_{32} &= K + J \\ n_1 + (n_6 + n_{12}) + (n_{11} + n_{17}) + n_{16} + (n_{21} + n_{27}) + n_{22} + (n_{26} + n_{32}) + n_{31} &= K + J \\ \text{この式の} (\dots) \text{の部分を(43)~(51)式を利用して書き換える。} \\ n_1 + (n_2 + n_8) + (n_9 + n_{15}) + n_{16} + (n_{23} + n_{29}) + n_{22} + (n_{30} + n_{36}) + n_{31} &= K + J \\ \text{項を入れ替えて組みなおすと、} \\ (n_1 + n_8 + n_{15} + n_{22} + n_{29} + n_{36}) + (n_2 + n_9 + n_{16} + n_{23} + n_{30} + n_{31}) &= K + J \\ \text{ところが、} n_1 + n_8 + n_{15} + n_{22} + n_{29} + n_{36} &= K \\ \text{ゆえに} n_2 + n_9 + n_{16} + n_{23} + n_{30} + n_{31} &= J \\ \text{つまり} n_1 + n_{12} + n_{17} + n_{22} + n_{27} + n_{32} &= J \text{ と等しくなる。(78)式に戻して、} \\ n_1 + n_{12} + n_{17} + n_{22} + n_{27} + n_{32} &= n_2 + n_9 + n_{16} + n_{23} + n_{30} + n_{31} = K \quad] \end{aligned}$$

同様のことが他の汎対角線についても言えるから、我が正方連結六方陣は立派な汎魔方陣であるということになる。(13), (14)の2式を認めるかぎりには……。

5. 方陣の具体的な構成

通常の(1)~(14)式に(15)~(39)が加わるので、解の数はそう多くないはずである。かなり珍しい方陣が期待できそうだ。

汎魔方陣の1つなので、 $n_1 = 1$ の標準形で基本解を探索・構成する。反転を封じるために $n_2 > n_7$ の不等式を立て、異形・派生形の重複計数を抑えるために $n_2 > n_6$, $n_7 > n_{31}$ という不等式を立てる。

探索時には、条件式を積極的に活用して

$$\begin{aligned} n_8 = 74 - n_1 - n_2 - n_7, \quad n_9 = 74 - n_2 - n_3 - n_8, \quad n_{10} = 74 - n_3 - n_4 - n_9, \\ \dots \text{のように、途中で} \text{どんどん未知数を減らして行く。} \end{aligned}$$

全体として見ると、調べる場合の数がそう増えないで済みそうだ(そうは言っても四方陣の比ではないが……)。

6. 結果

ところが、ところがである。パソコンは、全然解を出して来ない。……しばらく待っていると、「解無し」とレポートして来た!

呆然とするが、考えてみれば、当然であった。既に考察したように、我が正方連結六方陣は、汎魔方陣のタイプの1つだったのだから……。

鈴木教授の一覧表にも、6次の汎魔方陣の解の総数は0個とあるではないか。

パソコン探索の途中をデバッグ操作で調べてみると、主対角線の定和が成り立たないことがわかる。(15)~(39)式を成り立たせると、肝心の(13), (14)式が成り立たない。

$$(n_1 + n_8 + n_{15} + n_{22} + n_{29} + n_{36}) + (n_6 + n_{11} + n_{16} + n_{21} + n_{26} + n_{31}) = 222 \dots (77)$$

は成り立つが、

$$\begin{aligned} \lceil n_1 + n_8 + n_{15} + n_{22} + n_{29} + n_{36} = 111 \dots (13) \rceil \\ \lfloor n_6 + n_{11} + n_{16} + n_{21} + n_{26} + n_{31} = 111 \dots (14) \rfloor \end{aligned}$$

にはどうしてもならない。他の汎対角線の6数定和も成り立たない。六方陣の構造そのものが、どうも汎性一般を拒絶しているとしか言い様がない。

六方陣には非補数型の汎魔方陣がそもそも存在しないことを示しているようだ。

試みに、(13), (14)式の対角線条件を外してみた。

解が出た。文末にそのリストの一部を示す。

もちろんこれらは「不満足な」六方陣である。主対角線の定和条件を欠くから「準六方陣」と言うことにしている。

それでも、行列の逐次移動が可能で、行列を反対側に移動しても正方連結四数の定和は変わらない。珍しい個性を持った方陣と言えよう。阿部楽方老師ほか古い世代の魔方陣研究者らが完全方陣に劣らず珍重して来た理由が、少しはわかるような気がする。

試みに「正方連結準六方陣」の解の総数を求めてみた。

これは、主対角線の定和条件を欠くから、無論「汎魔方陣」ではない。「魔方陣」でもない。従って、それらしく行列の移動を行うと、対角線6数の和の値がどんどん変わってしまう。別個の方陣になるしかないのだから、基本形を仮定することも例の不等式を立てることもできない。しかし、それでも作ってみる価値はあると思う。

構成時には、単純な回転・反転形の重複計数を封じるために、 $n_1 < n_36; n_1 < n_6; n_1 < n_31; n_2 > n_7$ という不等式を立てた。総数は、53136個。けっこう大きい数字になった。

ちなみに四方陣や八方陣では、正方連結型は汎魔方陣の1つのタイプとして存在し得る。

正方連結汎四方陣には、補数17型の完全方陣タイプの汎魔方陣しか存在しない。

正方連結汎八方陣には、補数65型の完全方陣タイプと非補数型汎魔方陣との2つのタイプが存在することが知られている。

(初稿 : Nov. 2, 2000; 清書稿 : Mar. 16, 2013; by 撰田 寛二 (Kanji Setsuda))

**** 正方連結準六方陣の解のリスト (抜粋) : チェック・サム付き ****

1# Row\PD1\ 1 36 4 33 7 30 111\ 64\ 35 2 32 5 29 8 111\158\ 3 34 6 31 9 28 111\ 64\ 27 10 24 13 21 16 111\158\ 19 18 22 15 25 12 111\ 64\ 26 11 23 14 20 17 111\158\ 111 111 111 111 111 111 Column / 64/158/ 64/158/ 64/158/ Pd2Sum						1969# Row\PD1\ 1 35 2 36 3 34 111\ 60\ 33 5 32 4 31 6 111\162\ 7 29 8 30 9 28 111\ 60\ 27 11 26 10 25 12 111\162\ 19 17 20 18 21 16 111\ 60\ 24 14 23 13 22 15 111\162\ 111 111 111 111 111 111 Column / 60/162/ 60/162/ 60/162/ Pd2Sum						3057# Row\PD1\ 1 34 2 36 3 35 111\ 60\ 33 6 32 4 31 5 111\162\ 7 28 8 30 9 29 111\ 60\ 27 12 26 10 25 11 111\162\ 19 16 20 18 21 17 111\ 60\ 24 15 23 13 22 14 111\162\ 111 111 111 111 111 111 Column / 60/162/ 60/162/ 60/162/ Pd2Sum					
3537# Row\PD1\ 1 33 3 35 15 24 111\ 62\ 32 8 30 6 18 17 111\160\ 5 29 7 31 19 20 111\ 62\ 36 4 34 2 22 13 111\160\ 9 25 11 27 23 16 111\ 62\ 28 12 26 10 14 21 111\160\ 111 111 111 111 111 111 Column / 62/160/ 62/160/ 62/160/ Pd2Sum						4337# Row\PD1\ 1 32 3 35 7 33 111\ 94\ 24 17 22 14 18 16 111\128\ 13 20 15 23 19 21 111\ 94\ 36 5 34 2 30 4 111\128\ 25 8 27 11 31 9 111\ 94\ 12 29 10 26 6 28 111\128\ 111 111 111 111 111 111 Column / 94/128/ 94/128/ 94/128/ Pd2Sum						4817# Row\PD1\ 1 31 3 35 8 33 111\ 96\ 24 18 22 14 17 16 111\126\ 13 19 15 23 20 21 111\ 96\ 36 6 34 2 29 4 111\126\ 25 7 27 11 32 9 111\ 96\ 12 30 10 26 5 28 111\126\ 111 111 111 111 111 111 Column / 96/126/ 96/126/ 96/126/ Pd2Sum					
5009# Row\PD1\ 1 30 4 36 7 33 111\ 64\ 27 16 24 10 21 13 111\158\ 3 28 6 34 9 31 111\ 64\ 35 8 32 2 29 5 111\158\ 19 12 22 18 25 15 111\ 64\ 26 17 23 11 20 14 111\158\ 111 111 111 111 111 111 Column / 64/158/ 64/158/ 64/158/ Pd2Sum						5393# Row\PD1\ 1 29 4 36 8 33 111\ 74\ 25 19 22 12 18 15 111\148\ 3 27 6 34 10 31 111\ 74\ 35 9 32 2 28 5 111\148\ 23 7 26 14 30 11 111\ 74\ 24 20 21 13 17 16 111\148\ 111 111 111 111 111 111 Column / 74/148/ 74/148/ 74/148/ Pd2Sum						5425# Row\PD1\ 1 28 5 36 9 32 111\ 62\ 24 21 20 13 16 17 111\160\ 3 26 7 34 11 30 111\ 62\ 35 10 31 2 27 6 111\160\ 15 14 19 22 23 18 111\ 62\ 33 12 29 4 25 8 111\160\ 111 111 111 111 111 111 Column / 62/160/ 62/160/ 62/160/ Pd2Sum					
5713# Row\PD1\ 1 27 7 35 8 33 111\104\ 24 22 18 14 17 16 111\118\ 13 15 19 23 20 21 111\104\ 36 10 30 2 29 4 111\118\ 25 3 31 11 32 9 111\104\ 12 34 6 26 5 28 111\118\ 111 111 111 111 111 111 Column / 104/118/104/118/104/118/ Pd2Sum						5905# Row\PD1\ 2 36 4 34 5 30 111\ 94\ 35 1 33 3 32 7 111\128\ 14 24 16 22 17 18 111\ 94\ 23 13 21 15 20 19 111\128\ 26 12 28 10 29 6 111\ 94\ 11 25 9 27 8 31 111\128\ 111 111 111 111 111 111 Column / 94/128/ 94/128/ 94/128/ Pd2Sum						7297# Row\PD1\ 2 35 5 32 8 29 111\ 64\ 34 3 31 6 28 9 111\158\ 10 27 13 24 16 21 111\ 64\ 36 1 33 4 30 7 111\158\ 11 26 14 23 17 20 111\ 64\ 18 19 15 22 12 25 111\158\ 111 111 111 111 111 111 Column / 64/158/ 64/158/ 64/158/ Pd2Sum					

8961# Row\PD1\						9969# Row\PD1\						10233# Row\PD1\					
2	34	1	36	3	35	2	32	5	35	8	29	2	31	6	35	10	27
32	6	33	4	31	5	18	22	15	19	12	25	22	19	18	15	14	23
8	28	7	30	9	29	10	24	13	27	16	21	4	29	8	33	12	25
26	12	27	10	25	11	36	4	33	1	30	7	36	5	32	1	28	9
20	16	19	18	21	17	11	23	14	26	17	20	13	20	17	24	21	16
23	15	24	13	22	14	34	6	31	3	28	9	34	7	30	3	26	11
111 111 111 111 111 111 Column						111 111 111 111 111 111 Column						111 111 111 111 111 111 Column					
/ 60/162/ 60/162/ 60/162/ Pd2Sum						/ 64/158/ 64/158/ 64/158/ Pd2Sum						/ 62/160/ 62/160/ 62/160/ Pd2Sum					
10485# Row\PD1\						10653# Row\PD1\						11073# Row\PD1\					
2	30	4	36	5	34	2	29	4	36	6	34	2	28	5	36	6	34
23	19	21	13	20	15	23	20	21	13	19	15	23	21	20	13	19	15
14	18	16	24	17	22	14	17	16	24	18	22	14	16	17	24	18	22
35	7	33	1	32	3	35	8	33	1	31	3	35	9	32	1	31	3
26	6	28	12	29	10	26	5	28	12	30	10	26	4	29	12	30	10
11	31	9	25	8	27	11	32	9	25	7	27	11	33	8	25	7	27
111 111 111 111 111 111 Column						111 111 111 111 111 111 Column						111 111 111 111 111 111 Column					
/ 94/128/ 94/128/ 94/128/ Pd2Sum						/ 96/126/ 96/126/ 96/126/ Pd2Sum						/ 98/124/ 98/124/ 98/124/ Pd2Sum					
11253# Row\PD1\						11505# Row\PD1\						11985# Row\PD1\					
2	27	6	35	10	31	3	36	1	35	2	34	3	35	1	33	7	32
22	23	18	15	14	19	31	4	33	5	32	6	34	2	36	4	30	5
4	25	8	33	12	29	9	30	7	29	8	28	15	23	13	21	19	20
36	9	32	1	28	5	25	10	27	11	26	12	22	14	24	16	18	17
13	16	17	24	21	20	21	18	19	17	20	16	27	11	25	9	31	8
34	11	30	3	26	7	22	13	24	14	23	15	10	26	12	28	6	29
111 111 111 111 111 111 Column						111 111 111 111 111 111 Column						111 111 111 111 111 111 Column					
/ 62/160/ 62/160/ 62/160/ Pd2Sum						/ 60/162/ 60/162/ 60/162/ Pd2Sum						/ 94/128/ 94/128/ 94/128/ Pd2Sum					
13377# Row\PD1\						15041# Row\PD1\						15377# Row\PD1\					
3	34	7	30	11	26	3	33	1	35	15	24	3	32	1	35	7	33
33	4	29	8	25	12	30	8	32	6	18	17	22	17	24	14	18	16
1	36	5	32	9	28	7	29	5	31	19	20	15	20	13	23	19	21
35	2	31	6	27	10	34	4	36	2	22	13	34	5	36	2	30	4
15	22	19	18	23	14	11	25	9	27	23	16	27	8	25	11	31	9
24	13	20	17	16	21	26	12	28	10	14	21	10	29	12	26	6	28
111 111 111 111 111 111 Column						111 111 111 111 111 111 Column						111 111 111 111 111 111 Column					
/ 62/160/ 62/160/ 62/160/ Pd2Sum						/ 62/160/ 62/160/ 62/160/ Pd2Sum						/ 94/128/ 94/128/ 94/128/ Pd2Sum					
15545# Row\PD1\						16073# Row\PD1\						16325# Row\PD1\					
3	31	6	34	9	28	3	30	7	34	11	26	3	28	6	34	9	31
27	13	24	10	21	16	24	17	20	13	16	21	27	16	24	10	21	13
1	33	4	36	7	30	1	32	5	36	9	28	1	30	4	36	7	33
35	5	32	2	29	8	35	6	31	2	27	10	35	8	32	2	29	5
19	15	22	18	25	12	15	18	19	22	23	14	19	12	22	18	25	15
26	14	23	11	20	17	33	8	29	4	25	12	26	17	23	11	20	14
111 111 111 111 111 111 Column						111 111 111 111 111 111 Column						111 111 111 111 111 111 Column					
/ 64/158/ 64/158/ 64/158/ Pd2Sum						/ 62/160/ 62/160/ 62/160/ Pd2Sum						/ 64/158/ 64/158/ 64/158/ Pd2Sum					
16661# Row\PD1\						16685# Row\PD1\						16937# Row\PD1\					
3	27	6	34	10	31	3	26	7	34	11	30	3	25	7	35	8	33
25	19	22	12	18	15	24	21	20	13	16	17	22	24	18	14	17	16
1	29	4	36	8	33	1	28	5	36	9	32	15	13	19	23	20	21
35	9	32	2	28	5	35	10	31	2	27	6	34	12	30	2	29	4
23	7	26	14	30	11	15	14	19	22	23	18	27	1	31	11	32	9
24	20	21	13	17	16	33	12	29	4	25	8	10	36	6	26	5	28
111 111 111 111 111 111 Column						111 111 111 111 111 111 Column						111 111 111 111 111 111 Column					
/ 74/148/ 74/148/ 74/148/ Pd2Sum						/ 62/160/ 62/160/ 62/160/ Pd2Sum						/ 108/114/108/114/108/114/ Pd2Sum					

17105# Row\PD1\ 4 36 2 34 5 30 111\ 94\ 33 1 35 3 32 7 111\128\ 16 24 14 22 17 18 111\ 94\ 21 13 23 15 20 19 111\128\ 28 12 26 10 29 6 111\ 94\ 9 25 11 27 8 31 111\128\ ----- 111 111 111 111 111 111 Column / 94/128/ 94/128/ 94/128/ Pd2Sum	22225# Row\PD1\ 5 36 2 34 4 30 111\ 94\ 32 1 35 3 33 7 111\128\ 17 24 14 22 16 18 111\ 94\ 20 13 23 15 21 19 111\128\ 28 12 26 10 28 6 111\ 94\ 8 25 11 27 9 31 111\128\ ----- 111 111 111 111 111 111 Column / 94/128/ 94/128/ 94/128/ Pd2Sum	27121# Row\PD1\ 6 36 2 34 4 29 111\ 96\ 31 1 35 3 33 8 111\126\ 18 24 14 22 16 17 111\ 96\ 19 13 23 15 21 20 111\126\ 28 12 26 10 28 5 111\ 96\ 7 25 11 27 9 32 111\126\ ----- 111 111 111 111 111 111 Column / 96/126/ 96/126/ 96/126/ Pd2Sum
---	---	---

31745# Row\PD1\ 7 36 1 33 4 30 111\ 64\ 29 2 35 5 32 8 111\158\ 9 34 3 31 6 28 111\ 64\ 21 10 27 13 24 16 111\158\ 25 18 19 15 22 12 111\ 64\ 20 11 26 14 23 17 111\158\ ----- 111 111 111 111 111 111 Column / 64/158/ 64/158/ 64/158/ Pd2Sum	35249# Row\PD1\ 8 36 1 33 4 29 111\ 74\ 28 2 35 5 32 9 111\148\ 10 34 3 31 6 27 111\ 74\ 18 12 25 15 22 19 111\148\ 30 14 23 11 26 7 111\ 74\ 17 13 24 16 21 20 111\148\ ----- 111 111 111 111 111 111 Column / 74/148/ 74/148/ 74/148/ Pd2Sum	38625# Row\PD1\ 9 36 1 32 5 28 111\ 62\ 27 2 35 6 31 10 111\160\ 11 34 3 30 7 26 111\ 62\ 25 4 33 8 29 12 111\160\ 23 22 15 18 19 14 111\ 62\ 16 13 24 17 20 21 111\160\ ----- 111 111 111 111 111 111 Column / 62/160/ 62/160/ 62/160/ Pd2Sum
---	---	---

41809# Row\PD1\ 10 36 2 34 11 18 111\ 64\ 27 1 35 3 26 19 111\158\ 13 33 5 31 14 15 111\ 64\ 24 4 32 6 23 22 111\158\ 16 30 8 28 17 12 111\ 64\ 21 7 29 9 20 25 111\158\ ----- 111 111 111 111 111 111 Column / 64/158/ 64/158/ 64/158/ Pd2Sum	44305# Row\PD1\ 11 36 2 34 10 18 111\ 64\ 26 1 35 3 27 19 111\158\ 14 33 5 31 13 15 111\ 64\ 23 4 32 6 24 22 111\158\ 17 30 8 28 16 12 111\ 64\ 20 7 29 9 21 25 111\158\ ----- 111 111 111 111 111 111 Column / 64/158/ 64/158/ 64/158/ Pd2Sum	46801# Row\PD1\ 12 36 2 34 10 17 111\ 66\ 25 1 35 3 27 20 111\156\ 15 33 5 31 13 14 111\ 66\ 22 4 32 6 24 23 111\156\ 18 30 8 28 16 11 111\ 66\ 19 7 29 9 21 26 111\156\ ----- 111 111 111 111 111 111 Column / 66/156/ 66/156/ 66/156/ Pd2Sum
---	---	---

49057# Row\PD1\ 13 36 2 34 4 22 111\ 62\ 24 1 35 3 33 15 111\160\ 17 32 6 30 8 18 111\ 62\ 20 5 31 7 29 19 111\160\ 21 28 10 26 12 14 111\ 62\ 16 9 27 11 25 23 111\160\ ----- 111 111 111 111 111 111 Column / 62/160/ 62/160/ 62/160/ Pd2Sum	50737# Row\PD1\ 14 36 2 34 4 21 111\ 64\ 23 1 35 3 33 16 111\158\ 18 32 6 30 8 17 111\ 64\ 19 5 31 7 29 20 111\158\ 22 28 10 26 12 13 111\ 64\ 15 9 27 11 25 24 111\158\ ----- 111 111 111 111 111 111 Column / 64/158/ 64/158/ 64/158/ Pd2Sum	51985# Row\PD1\ 15 35 1 33 3 24 111\ 62\ 22 2 36 4 34 13 111\160\ 19 31 5 29 7 20 111\ 62\ 14 10 28 12 26 21 111\160\ 23 27 9 25 11 16 111\ 62\ 18 6 32 8 30 17 111\160\ ----- 111 111 111 111 111 111 Column / 62/160/ 62/160/ 62/160/ Pd2Sum
---	---	---

52657# Row\PD1\ 16 35 1 33 3 23 111\ 64\ 21 2 36 4 34 14 111\158\ 20 31 5 29 7 19 111\ 64\ 13 10 28 12 26 22 111\158\ 24 27 9 25 11 15 111\ 64\ 17 6 32 8 30 18 111\158\ ----- 111 111 111 111 111 111 Column / 64/158/ 64/158/ 64/158/ Pd2Sum	52945# Row\PD1\ 17 32 5 8 29 20 111\ 94\ 24 1 36 25 12 13 111\128\ 14 35 2 11 26 23 111\ 94\ 22 3 34 27 10 15 111\128\ 16 33 4 9 28 21 111\ 94\ 18 7 30 31 6 19 111\128\ ----- 111 111 111 111 111 111 Column / 94/128/ 94/128/ 94/128/ Pd2Sum	[Count = 53136] OK!
---	---	---------------------

** Calculated and Listed by Kanji Setsuda
on Mar. 15, 2013 with MacOSX 10.8.3 and Xcode 4.6.1 **

(改定稿 : Jan. 17, 2001; 清書稿 : Mar. 16, 2013; by 撰田 寛二(Kanji Setsuda))

E-Mail Address: jag12001@nifty.com