

第4章：解説「魔方陣研究の諸技法」Ⅱ： 撰田 寛二

第1節：N進法表記と『オイラー方陣』

0. 魔方陣研究の歴史は古いが、近代的な研究方法とは言えば、第一に数学的手法の採用があげられよう。特にN進法表記が重要だと思われる。方法としてはもはや古典的だが、これによって方陣の構造解析が大いなる進捗を見せた。

1. 先ずN進法が何かを説明しよう。昔は中学校数学でも習えた概念だが、今時は履修が省略されることが多いと聞いている。

五進法を例に採ろう。数字の使用を {0, 1, 2, 3, 4} の5個に制限した記数法だ。0~24の連続する整数を表す時に、{00, 01, 02, 03, 04, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, ..., 42, 43, 44} を用いる。十進法の5になった時に桁上がりして10(五)となる。10(+)になった時に桁上がりして20(五)となる。では、23(+)は、五進法では幾つか。

2. 十進数を五進数に直すやり方は、連続的に5で割算をして余りを次々と下位から埋めて行く。最後に5より小さくなった商を最上位に書き入れる。

5) 23(+)
 4 あまり 3
 左図の例で言えば、23(+)=43(五)
 では、五進数を十進数に直す時には、どうするか。
 $43(五) = 4 \times 5 + 3 = 23(+)$ とすればよい。

十進数を二進数に変換する時は、次のようにする。

2) 49
 2) 24 ... 1
 2) 12 ... 0
 2) 6 ... 0
 2) 3 ... 0
 2) 1 ... 1
 0 ... 1 / 49(+)=110001(二)

最後の商が0になるまで連除法を実行する。そうすれば、
 割り算の剰余だけで答が作れる。
 剰余は、出て来た順に最下位から埋めて行く。

<逆変換>は $((([1] \times 2 + [1]) \times 2 + [0]) \times 2 + [0]) \times 2 + [1] = 49(+)$
 あるいは $[1] \times 2^5 + [1] \times 2^4 + [0] \times 2^3 + [0] \times 2^2 + [0] \times 2^1 + [1] \times 2^0 = 49(+)$

3. こう書くと、随分と面倒に感じられる人も居るかと思うが、どんな時に使うと便利か。方陣研究では、意外と身近に例がある。

座標 0 1 2 3 4 ←下位座標

0	00	01	02	03	04
1	10	11	12	13	14
2	20	21	22	23	24
3	30	31	32	33	34
4	40	41	42	43	44

↑上位座標

左図は、00~44(五)の連続する整数を正方配列に順に入れたものだが、この数値が入っている場所を二次元配列の座標で呼べば、それぞれ
 00(五) は、(0, 0) に入っている。
 01(五) は、(0, 1) に入っている。
 02(五) は、(0, 2) に入っている。

 10(五) は、(1, 0) に入っている。

 43(五) は、(4, 3) に入っている。
 44(五) は、(4, 4) に入っている。

かくのごとく、配列座標を二次元形で言う時には五進数と同じ内容になるのである。

そして、配列座標と同じ数値をその場所に入れるのは、極めて自然なのだ。そうすることで、魔方陣の分析・構成に多大の恩恵をこうむる効果がある。

かくして、近代的研究法では、大抵が五方陣を構成する時には五進数を使い、 $0 \sim 44_{(5)}$ を入れた数盤を使う。

もちろん、これが $1 \sim 25_{(+)}$ を用いる古典的な数盤と一対一対応していることは、言うまでもない。ただし、五進法数盤では、どの数も古典的な数盤より 1 だけ値が小さい。従って、行和・列和も各々 5 だけ小さいことに注意する。

$$11+12+13+14+15=65_{(+)} \quad \text{が} \quad 20+21+22+23+24=220_{(5)}=60_{(+)} \quad \text{となる。}$$

$$3+8+13+18+23=65_{(+)} \quad \text{が} \quad 02+12+22+32+42=220_{(5)}=60_{(+)} \quad \text{となる。}$$

↑ [古典的な数盤]

↑ [五進法数盤]

.....

対角線の和も 5 小さい。補数のペアも和も古典的な数盤より 2 小さい。

$$5+9+13+17+21=65_{(+)} \quad \text{が} \quad 04+13+22+31+40=220_{(5)}=60_{(+)}$$

$$1+25=26_{(+)} \quad \text{が} \quad 00+44=44_{(5)}=24_{(+)} \quad \text{となる。}$$

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

$$2+24=26_{(+)} \quad \text{が} \quad 01+43=44_{(5)}$$

$$3+23=26_{(+)} \quad \text{が} \quad 02+42=44_{(5)}$$

.....

$$10+16=26_{(+)} \quad \text{が} \quad 14+30=44_{(5)}$$

$$11+15=26_{(+)} \quad \text{が} \quad 20+24=44_{(5)}$$

$$12+14=26_{(+)} \quad \text{が} \quad 21+23=44_{(5)}$$

$$\text{また } 13+13=26_{(+)} \quad \text{も} \quad 22+22=44_{(5)}$$

となり、補数和も 2 小さい。

頭を切り換えるのに少し慣れが要る。

← [古典的な数盤]

4. N進法を用いた魔方陣の具体例を示そう。まずはわかりやすい奇数次の方陣から。

* 対称三方陣の各表記法 *

/古典的 /数学的 /三進法 /三進法分解図

$$2 \ 7 \ 6 \ 1 \ 6 \ 5 \ 01 \ 20 \ 12 \ 0 \ 2 \ 1 \ 1 \ 0 \ 2$$

$$9 \ 5 \ 1 \ 8 \ 4 \ 0 \ 22 \ 11 \ 00 \ 2 \ 1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0$$

$$4 \ 3 \ 8 \ 3 \ 2 \ 7 \ 10 \ 02 \ 21 \ 1 \ 0 \ 2 \ 0 \ 2 \ 1$$

* 各行列の和を計算 *

上位/ 下位/

$$1+6+5= (0+2+1)*3+(1+0+2)= 12 \dots \text{rw1} \quad | \quad 1+8+3= (0+2+1)*3+(1+2+0)= 12 \dots \text{cl1}$$

$$8+4+0= (2+1+0)*3+(2+1+0)= 12 \dots \text{rw2} \quad | \quad 6+4+2= (2+1+0)*3+(0+1+2)= 12 \dots \text{cl2}$$

$$3+2+7= (1+0+2)*3+(0+2+1)= 12 \dots \text{rw3} \quad | \quad 5+0+7= (1+0+2)*3+(2+0+1)= 12 \dots \text{cl3}$$

$$1+4+7= (0+1+2)*3+(1+1+1)= 12 \dots \text{pd1} \quad | \quad 5+4+3= (1+1+1)*3+(2+1+0)= 12 \dots \text{pb1}$$

* 汎五方陣の各表記法 *

/古典的表記 /数学的表記 /五進法表記 /五進法分解図

$$1 \ 23 \ 20 \ 14 \ 7 \ 0 \ 22 \ 19 \ 13 \ 6 \ 00 \ 42 \ 34 \ 23 \ 11 \ 0 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 2 \ 4 \ 3 \ 1$$

$$15 \ 9 \ 2 \ 21 \ 18 \ 14 \ 8 \ 1 \ 20 \ 17 \ 24 \ 13 \ 01 \ 40 \ 32 \ 2 \ 1 \ 0 \ 4 \ 3 \ 4 \ 3 \ 1 \ 0 \ 2$$

$$22 \ 16 \ 13 \ 10 \ 4 \ 21 \ 15 \ 12 \ 9 \ 3 \ 41 \ 30 \ 22 \ 14 \ 03 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2 \ 4 \ 3$$

$$8 \ 5 \ 24 \ 17 \ 11 \ 7 \ 4 \ 23 \ 16 \ 10 \ 12 \ 04 \ 43 \ 31 \ 20 \ 1 \ 0 \ 4 \ 3 \ 2 \ 2 \ 4 \ 3 \ 1 \ 0$$

$$19 \ 12 \ 6 \ 3 \ 25 \ 18 \ 11 \ 5 \ 2 \ 24 \ 33 \ 21 \ 10 \ 02 \ 44 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 \ 4 \ 3 \ 1 \ 0 \ 2 \ 4$$

*5/ *1/

* 各行列・汎対角線の和を計算 *

$$0+22+19+13+6= (0+4+3+2+1)*5+(0+2+4+3+1)=60 \dots \text{rw1}$$

$$14+8+1+20+17= (2+1+0+4+3)*5+(4+3+1+0+2)=60 \dots \text{rw2}$$

$$21+15+12+9+3= (4+3+2+1+0)*5+(1+0+2+4+3)=60 \dots \text{rw3}$$

$$7+4+23+16+10= (1+0+4+3+2)*5+(2+4+3+1+0)=60 \dots \text{rw4}$$

$$18+11+5+2+24= (3+2+1+0+4)*5+(3+1+0+2+4)=60 \dots \text{rw5}$$

$$\begin{aligned}
0+14+21+7+18 &= (0+2+4+1+3) * 5 + (0+4+1+2+3) = 60 \dots cl1 \\
22+8+15+4+11 &= (4+1+3+0+2) * 5 + (2+3+0+4+1) = 60 \dots cl2 \\
19+1+12+23+5 &= (3+0+2+4+1) * 5 + (4+1+2+3+0) = 60 \dots cl3 \\
13+20+9+16+2 &= (2+4+1+3+0) * 5 + (3+0+4+1+2) = 60 \dots cl4 \\
6+17+3+10+24 &= (1+3+0+2+4) * 5 + (1+2+3+0+4) = 60 \dots cl5 \\
0+8+12+16+24 &= (0+1+2+3+4) * 5 + (0+3+2+1+4) = 60 \dots pd1 \\
22+1+9+10+18 &= (4+0+1+2+3) * 5 + (2+1+4+0+3) = 60 \dots pd2 \\
19+20+3+7+11 &= (3+4+0+1+2) * 5 + (4+0+3+2+1) = 60 \dots pd3 \\
13+17+21+4+5 &= (2+3+4+0+1) * 5 + (3+2+1+4+0) = 60 \dots pd4 \\
6+14+15+23+2 &= (1+2+3+4+0) * 5 + (1+4+0+3+2) = 60 \dots pd5 \\
0+17+9+23+11 &= (0+3+1+4+2) * 5 + (0+2+4+3+1) = 60 \dots pb1 \\
22+14+3+16+5 &= (4+2+0+3+1) * 5 + (2+4+3+1+0) = 60 \dots pb2 \\
19+8+21+10+2 &= (3+1+4+2+0) * 5 + (4+3+1+0+2) = 60 \dots pb3 \\
13+1+15+7+24 &= (2+0+3+1+4) * 5 + (3+1+0+2+4) = 60 \dots pb4 \\
6+20+12+4+18 &= (1+4+2+0+3) * 5 + (1+0+2+4+3) = 60 \dots pb5
\end{aligned}$$

* 汎七方陣の各表記法 *

/古典的表記

1 48 39 30 28 19 10
18 9 7 47 38 29 27
35 26 17 8 6 46 37
45 36 34 25 16 14 5
13 4 44 42 33 24 15
23 21 12 3 43 41 32
40 31 22 20 11 2 49

/七進法表記

00 65 53 41 36 24 12
23 11 06 64 52 40 35
46 34 22 10 05 63 51
62 50 45 33 21 16 04
15 03 61 56 44 32 20
31 26 14 02 60 55 43
54 42 30 25 13 01 66

/数学的表記

0 47 38 29 27 18 9
17 8 6 46 37 28 26
34 25 16 7 5 45 36
44 35 33 24 15 13 4
12 3 43 41 32 23 14
22 20 11 2 42 40 31
39 30 21 19 10 1 48

/七進法分解図

0 6 5 4 3 2 1 0 5 3 1 6 4 2
2 1 0 6 5 4 3 3 1 6 4 2 0 5
4 3 2 1 0 6 5 6 4 2 0 5 3 1
6 5 4 3 2 1 0 2 0 5 3 1 6 4
1 0 6 5 4 3 2 5 3 1 6 4 2 0
3 2 1 0 6 5 4 1 6 4 2 0 5 3
5 4 3 2 1 0 6 4 2 0 5 3 1 6

*7/

*1/

* 各行列・汎対角線の和を計算 *

$$\begin{aligned}
0+47+38+29+27+18+9 &= (0+6+5+4+3+2+1) * 7 + (0+5+3+1+6+4+2) = 168 \dots rw1 \\
17+8+6+46+37+28+26 &= (2+1+0+6+5+4+3) * 7 + (3+1+6+4+2+0+5) = 168 \dots rw2 \\
34+25+16+7+5+45+36 &= (4+3+2+1+0+6+5) * 7 + (6+4+2+0+5+3+1) = 168 \dots rw3 \\
44+35+33+24+15+13+4 &= (6+5+4+3+2+1+0) * 7 + (2+0+5+3+1+6+4) = 168 \dots rw4 \\
12+3+43+41+32+23+14 &= (1+0+6+5+4+3+2) * 7 + (5+3+1+6+4+2+0) = 168 \dots rw5 \\
22+20+11+2+42+40+31 &= (3+2+1+0+6+5+4) * 7 + (1+6+4+2+0+5+3) = 168 \dots rw6 \\
39+30+21+19+10+1+48 &= (5+4+3+2+1+0+6) * 7 + (4+2+0+5+3+1+6) = 168 \dots rw7 \\
0+17+34+44+12+22+39 &= (0+2+4+6+1+3+5) * 7 + (0+3+6+2+5+1+4) = 168 \dots cl1 \\
47+8+25+35+3+20+30 &= (6+1+3+5+0+2+4) * 7 + (5+1+4+0+3+6+2) = 168 \dots cl2 \\
38+6+16+33+43+11+21 &= (5+0+2+4+6+1+3) * 7 + (3+6+2+5+1+4+0) = 168 \dots cl3 \\
29+46+7+24+41+2+19 &= (4+6+1+3+5+0+2) * 7 + (1+4+0+3+6+2+5) = 168 \dots cl4 \\
27+37+5+15+32+42+10 &= (3+5+0+2+4+6+1) * 7 + (6+2+5+1+4+0+3) = 168 \dots cl5 \\
18+28+45+13+23+40+1 &= (2+4+6+1+3+5+0) * 7 + (4+0+3+6+2+5+1) = 168 \dots cl6 \\
9+26+36+4+14+31+48 &= (1+3+5+0+2+4+6) * 7 + (2+5+1+4+0+3+6) = 168 \dots cl7 \\
0+8+16+24+32+40+48 &= (0+1+2+3+4+5+6) * 7 + (0+1+2+3+4+5+6) = 168 \dots pd1 \\
47+6+7+15+23+31+39 &= (6+0+1+2+3+4+5) * 7 + (5+6+0+1+2+3+4) = 168 \dots pd2 \\
38+46+5+13+14+22+30 &= (5+6+0+1+2+3+4) * 7 + (3+4+5+6+0+1+2) = 168 \dots pd3 \\
29+37+45+4+12+20+21 &= (4+5+6+0+1+2+3) * 7 + (1+2+3+4+5+6+0) = 168 \dots pd4 \\
27+28+36+44+3+11+19 &= (3+4+5+6+0+1+2) * 7 + (6+0+1+2+3+4+5) = 168 \dots pd5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
18+26+34+35+43+2+10 &= (2+3+4+5+6+0+1)*7+(4+5+6+0+1+2+3) = 168 \dots \text{pd6} \\
9+17+25+33+41+42+1 &= (1+2+3+4+5+6+0)*7+(2+3+4+5+6+0+1) = 168 \dots \text{pd7} \\
0+26+45+15+41+11+30 &= (0+3+6+2+5+1+4)*7+(0+5+3+1+6+4+2) = 168 \dots \text{pb1} \\
47+17+36+13+32+2+21 &= (6+2+5+1+4+0+3)*7+(5+3+1+6+4+2+0) = 168 \dots \text{pb2} \\
38+8+34+4+23+42+19 &= (5+1+4+0+3+6+2)*7+(3+1+6+4+2+0+5) = 168 \dots \text{pb3} \\
29+6+25+44+14+40+10 &= (4+0+3+6+2+5+1)*7+(1+6+4+2+0+5+3) = 168 \dots \text{pb4} \\
27+46+16+35+12+31+1 &= (3+6+2+5+1+4+0)*7+(6+4+2+0+5+3+1) = 168 \dots \text{pb5} \\
18+37+7+33+3+22+48 &= (2+5+1+4+0+3+6)*7+(4+2+0+5+3+1+6) = 168 \dots \text{pb6} \\
9+28+5+24+43+20+39 &= (1+4+0+3+6+2+5)*7+(2+0+5+3+1+6+4) = 168 \dots \text{pb7}
\end{aligned}$$

こういう図に慣れた人でないとわかりにくいかもしれないが、実は上の三例は各々が非常に珍しい特徴を持った魔方陣なのである。

分解図を見てほしい。上位も下位も、各行各列・各汎対角線の中身を見ると、

(1-1) 三方陣では (0, 1, 2) [汎対角線だけは例外]

(2-1) 五方陣では (0, 1, 2, 3, 4)

(3-1) 七方陣では (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)

となっていて、いずれにも重複が無い。全数字が各々1度ずつ均等に使われている (図1の三方陣では、汎対角線に例外はあるが)。また、N進法表記図を見ると、

(1-2) 三方陣では (00, 01, 02, ..., 21, 22(三)) の全数が使われている。

(2-2) 五方陣では (00, 01, 02, ..., 43, 44(五)) の全数が使われている。

(3-2) 七方陣では (00, 01, 02, ..., 65, 66(七)) の全数が使われている。

いずれの場合にも連続する整数が重複無く各々1度ずつ均等に使われている。

そのために有る場所に関係なく、各行各列の和が、みな同じ計算式で求められる。

$$(0+1+2) \times 3 + (0+1+2) = 9+3=12(+)$$

$$(0+1+2+3+4) \times 5 + (0+1+2+3+4) = 50+10=60(+)$$

$$(0+1+2+3+4+5+6) \times 7 + (0+1+2+3+4+5+6) = 147+21=168(+)$$

五方陣と七方陣では、行列の和に加えて汎対角線の和も同じ計算式になり、みな等しい。

だから、こういう特徴を見て取れば、もう次からは一々計算して確かめるまでもなく、全行全列全汎対角線の定和が成り立つことがわかるのである。

鈴木教授に教わった話では、魔方陣のこういう特徴に早く気付いて数学的解析を試みた人は、あの伝説の大数学者オイラー : Leonhard Euler (1707-1783) だそうで、そのためにこういう珍しい特徴を持った方陣のことを『オイラー方陣』と言う慣例になっているそうだ (上位でも下位でも、数字の重複が無く全数が各々1度ずつ使われていて、上位と下位の数の組み合わせにも重複が無いもの。オイラー先生は、ただ行和列和について言うのみで、汎対角線にまでは条件を付けていなかったと言う)。

三方陣では、惜しくも汎対角線がオイラー型になっていないが、主対角線の片面までは成り立つから、大したものなのである (広義の「オイラー方陣」)。

こういう個性的な特徴は、今まで通り十進数で普通に魔方陣を作っていたのでは、永久にわからない。古典的表記ではもともと何の変哲も無い魔方陣なのだから。

これは、三進法・五進法・七進法で表わして見て初めて気付く特徴である。N進法の知識と技術が必要な所以である。

次はこういう方陣を作ってみようかという気になる。そのためにどうすれば良いかを考えて実験している内に、様々な工夫・研究が実って来て、知識・成果が蓄積する。……

5. 次は偶数次の方陣を見てみよう。まず汎四方陣を四進法で表してみる。

1/古典的表記	数学的表記	四進法表記	四進法分解図
1 8 13 12	0 7 12 11	00 13 30 23	0 1 3 2 0 3 0 3
14 11 2 7	13 10 1 6	31 22 01 12	3 2 0 1 1 2 1 2
4 5 16 9	3 4 15 8	03 10 33 20	0 1 3 2 3 0 3 0
15 10 3 6	14 9 2 5	32 21 02 11	3 2 0 1 2 1 2 1

* 各行列・汎対角線の和を計算 *

$$\begin{aligned}
 0+7+12+11 &= (0+1+3+2) *4+ (0+3+0+3) = 30 \dots \text{rw1} \\
 13+10+1+6 &= (3+2+0+1) *4+ (1+2+1+2) = 30 \dots \text{rw2} \\
 3+4+15+8 &= (0+1+3+2) *4+ (3+0+3+0) = 30 \dots \text{rw3} \\
 14+9+2+5 &= (3+2+0+1) *4+ (2+1+2+1) = 30 \dots \text{rw4} \\
 0+13+3+14 &= (0+3+0+3) *4+ (0+1+3+2) = 30 \dots \text{cl1} \\
 7+10+4+9 &= (1+2+1+2) *4+ (3+2+0+1) = 30 \dots \text{cl2} \\
 12+1+15+2 &= (3+0+3+0) *4+ (0+1+3+2) = 30 \dots \text{cl3} \\
 11+6+8+5 &= (2+1+2+1) *4+ (3+2+0+1) = 30 \dots \text{cl4} \\
 0+10+15+5 &= (0+2+3+1) *4+ (0+2+3+1) = 30 \dots \text{pd1} \\
 7+1+8+14 &= (1+0+2+3) *4+ (3+1+0+2) = 30 \dots \text{pd2} \\
 12+6+3+9 &= (3+1+0+2) *4+ (0+2+3+1) = 30 \dots \text{pd3} \\
 11+13+4+2 &= (2+3+1+0) *4+ (3+1+0+2) = 30 \dots \text{pd4} \\
 0+6+15+9 &= (0+1+3+2) *4+ (0+2+3+1) = 30 \dots \text{pb1} \\
 7+13+8+2 &= (1+3+2+0) *4+ (3+1+0+2) = 30 \dots \text{pb2} \\
 12+10+3+5 &= (3+2+0+1) *4+ (0+2+3+1) = 30 \dots \text{pb3} \\
 11+1+4+14 &= (2+0+1+3) *4+ (3+1+0+2) = 30 \dots \text{pb4}
 \end{aligned}$$

四進法分解図で見ると、上の例では、全行列・汎対角線の和の全てが定和に等しいのに、一部に $\{0, 3, 0, 3\}$ や $\{1, 2, 1, 2\}$ の組み合わせが見られて、必ずしもオイラー型ではない。ところが、同じ汎四方陣を、二進法で見ると、次のようになる。

1/古典的表記	2/数学的表記	3/二進法表記	4/二進法分解図
1 8 13 12	0 7 12 11	0000 0111 1100 1011	0011 0110 0101 0101
14 11 2 7	13 10 1 6	1101 1010 0001 0110	1100 1001 0101 1010
4 5 16 9	3 4 15 8	0011 0100 1111 1000	0011 0110 1010 1010
15 10 3 6	14 9 2 5	1110 1001 0010 0101	1100 1001 1010 0101
		*8/ *4/ *2/ *1/	*8/ *4/ *2/ *1/

* 各行列・汎対角線の和を計算 *

$$\begin{aligned}
 0+7+12+11 &= (0+0+1+1) *8+ (0+1+1+0) *4+ (0+1+0+1) *2+ (0+1+0+1) = 30 \dots \text{rw1} \\
 13+10+1+6 &= (1+1+0+0) *8+ (1+0+0+1) *4+ (0+1+0+1) *2+ (1+0+1+0) = 30 \dots \text{rw2} \\
 3+4+15+8 &= (0+0+1+1) *8+ (0+1+1+0) *4+ (1+0+1+0) *2+ (1+0+1+0) = 30 \dots \text{rw3} \\
 14+9+2+5 &= (1+1+0+0) *8+ (1+0+0+1) *4+ (1+0+1+0) *2+ (0+1+0+1) = 30 \dots \text{rw4} \\
 0+13+3+14 &= (0+1+0+1) *8+ (0+1+0+1) *4+ (0+0+1+1) *2+ (0+1+1+0) = 30 \dots \text{cl1} \\
 7+10+4+9 &= (0+1+0+1) *8+ (1+0+1+0) *4+ (1+1+0+0) *2+ (1+0+0+1) = 30 \dots \text{cl2} \\
 12+1+15+2 &= (1+0+1+0) *8+ (1+0+1+0) *4+ (0+0+1+1) *2+ (0+1+1+0) = 30 \dots \text{cl3} \\
 11+6+8+5 &= (1+0+1+0) *8+ (0+1+0+1) *4+ (1+1+0+0) *2+ (1+0+0+1) = 30 \dots \text{cl4} \\
 0+10+15+5 &= (0+1+1+0) *8+ (0+0+1+1) *4+ (0+1+1+0) *2+ (0+0+1+1) = 30 \dots \text{pd1} \\
 7+1+8+14 &= (0+0+1+1) *8+ (1+0+0+1) *4+ (1+0+0+1) *2+ (1+1+0+0) = 30 \dots \text{pd2} \\
 12+6+3+9 &= (1+0+0+1) *8+ (1+1+0+0) *4+ (0+1+1+0) *2+ (0+0+1+1) = 30 \dots \text{pd3} \\
 11+13+4+2 &= (1+1+0+0) *8+ (0+1+1+0) *4+ (1+0+0+1) *2+ (1+1+0+0) = 30 \dots \text{pd4} \\
 0+6+15+9 &= (0+0+1+1) *8+ (0+1+1+0) *4+ (0+1+1+0) *2+ (0+0+1+1) = 30 \dots \text{pb1} \\
 7+13+8+2 &= (0+1+1+0) *8+ (1+1+0+0) *4+ (1+0+0+1) *2+ (1+1+0+0) = 30 \dots \text{pb2} \\
 12+10+3+5 &= (1+1+0+0) *8+ (1+0+0+1) *4+ (0+1+1+0) *2+ (0+0+1+1) = 30 \dots \text{pb3} \\
 11+1+4+14 &= (1+0+0+1) *8+ (0+0+1+1) *4+ (1+0+0+1) *2+ (1+1+0+0) = 30 \dots \text{pb4}
 \end{aligned}$$

二進法では、全てを (0, 1) だけで表すので、必然的に桁が多くなる。しかし、全てをより単純に表すことができる。上の分解図を見ると、

- (1) 各面とも (0, 1) が同数ずつある。
- (2) しかも、どの面のどの行列を細かく見ても、(0, 1) が2つずつある。
- (3) しかも、どの面のどの汎対角線を細かく見ても、(0, 1) が2つずつある。

これは、この種の魔方陣の特徴と考えて良い。

その数学的意味は、各行・各列・各汎対角線の和の計算式が

$$\begin{aligned}
 (0+0+1+1) \times 8 + (0+0+1+1) \times 4 + (0+0+1+1) \times 2 + (0+0+1+1) \times 1 \\
 = 16 + 8 + 4 + 2 = 30(+) = 11110(二) \dots (CS1)
 \end{aligned}$$

で、全部同じ。つまり和が一定と言うことだ。

もう次からは、この特徴を見るだけで「汎四方陣」だとわかってしまう。
次の例を見てみよう。

2/古典的表記	/数学的表記	/二進法表記	/二進法分解図
1 8 11 14	0 7 10 13	0000 0111 1010 1101	0011 0101 0110 0101
12 13 2 7	11 12 1 6	1011 1100 0001 0110	1100 0101 1001 1010
6 3 16 9	5 2 15 8	0101 0010 1111 1000	0011 1010 0110 1010
15 10 5 4	14 9 4 3	1110 1001 0100 0011	1100 1010 1001 0101
			*8/ *4/ *2/ *1/

3/古典的表記	/数学的表記	/二進法表記	/二進法分解図
1 12 7 14	0 11 6 13	0000 1011 0110 1101	0101 0011 0110 0101
8 13 2 11	7 12 1 10	0111 1100 0001 1010	0101 1100 1001 1010
10 3 16 5	9 2 15 4	1001 0010 1111 0100	1010 0011 0110 1010
15 6 9 4	14 5 8 3	1110 0101 1000 0011	1010 1100 1001 0101
			*8/ *4/ *2/ *1/

二進法分解図で見れば、どれも「汎四方陣」だとわかる。つまり、汎四方陣の識別と
点に関しては、四進法よりも二進法分解図の方が広範囲に効く。より有能と言うわけだ。

例えば、汎四方陣では正方連結四数の定和と言う性質も成り立つが、およそ四方陣で「定和」と言う条件は、みな上の (CS1) 式で表されるのである。試みに 2×2 の内包二方陣を任意に選んで、その四数の定和をチェックしてみたい。

鈴木教授の話では、多くの偶数次魔方陣の解析で、二進法分解図が一番強力だと言う。

次は、正方連結型の完全八方陣の例題解を八進法・四進法・二進法によって分解し、どれが一番強力か調べてみよう。

* 正方連結完全八方陣のN進法分解図 *

#1/古典的表記	/数学的表記		
1 63 4 62 8 58 5 59	0 62 3 61 7 57 4 58		
56 10 53 11 49 15 52 14	55 9 52 10 48 14 51 13		
25 39 28 38 32 34 29 35	24 38 27 37 31 33 28 34		
48 18 45 19 41 23 44 22	47 17 44 18 40 22 43 21		
57 7 60 6 64 2 61 3	56 6 59 5 63 1 60 2		
16 50 13 51 9 55 12 54	15 49 12 50 8 54 11 53		
33 31 36 30 40 26 37 27	32 30 35 29 39 25 36 26		
24 42 21 43 17 47 20 46	23 41 20 42 16 46 19 45		
/八進法表記	/八進法分解図		
00 76 03 75 07 71 04 72	0 7 0 7 0 7 0 7	0 6 3 5 7 1 4 2	
67 11 64 12 60 16 63 15	6 1 6 1 6 1 6 1	7 1 4 2 0 6 3 5	
30 46 33 45 37 41 34 42	3 4 3 4 3 4 3 4	0 6 3 5 7 1 4 2	
57 21 54 22 50 26 53 25	5 2 5 2 5 2 5 2	7 1 4 2 0 6 3 5	
70 06 73 05 77 01 74 02	7 0 7 0 7 0 7 0	0 6 3 5 7 1 4 2	
17 61 14 62 10 66 13 65	1 6 1 6 1 6 1 6	7 1 4 2 0 6 3 5	
40 36 43 35 47 31 44 32	4 3 4 3 4 3 4 3	0 6 3 5 7 1 4 2	
27 51 24 52 20 56 23 55	2 5 2 5 2 5 2 5	7 1 4 2 0 6 3 5	
/四進法表記	/四進法分解図		
000 332 003 331 013 321 010 322	0 3 0 3 0 3 0 3	0 3 0 3 1 2 1 2	0 2 3 1 3 1 0 2
313 021 310 022 300 032 303 031	3 0 3 0 3 0 3 0	1 2 1 2 0 3 0 3	3 1 0 2 0 2 3 1
120 212 123 211 133 201 130 202	1 2 1 2 1 2 1 2	2 1 2 1 3 0 3 0	0 2 3 1 3 1 0 2
233 101 230 102 220 112 223 111	2 1 2 1 2 1 2 1	3 0 3 0 2 1 2 1	3 1 0 2 0 2 3 1
320 012 323 011 333 001 330 002	3 0 3 0 3 0 3 0	2 1 2 1 3 0 3 0	0 2 3 1 3 1 0 2
033 301 030 302 020 312 023 311	0 3 0 3 0 3 0 3	3 0 3 0 2 1 2 1	3 1 0 2 0 2 3 1
200 132 203 131 213 121 210 122	2 1 2 1 2 1 2 1	0 3 0 3 1 2 1 2	0 2 3 1 3 1 0 2
113 221 110 222 100 232 103 231	1 2 1 2 1 2 1 2	1 2 1 2 0 3 0 3	3 1 0 2 0 2 3 1

/二進法表記

```
000000 111110 000011 111101 000111 111001 000100 111010
110111 001001 110100 001010 110000 001110 110011 001101
011000 100110 011011 100101 011111 100001 011100 100010
101111 010001 101100 010010 101000 010110 101011 010101
111000 000110 111011 000101 111111 000001 111100 000010
001111 110001 001100 110010 001000 110110 001011 110101
100000 011110 100011 011101 100111 011001 100100 011010
010111 101001 010100 101010 010000 101110 010011 101101
```

/二進法分解図

```
01010101 01010101 01010101 01011010 01101001 00111100
10101010 10101010 01010101 10100101 10010110 11000011
01010101 10101010 10101010 01011010 01101001 00111100
10101010 01010101 10101010 10100101 10010110 11000011
10101010 10101010 10101010 01011010 01101001 00111100
01010101 01010101 10101010 10100101 10010110 11000011
10101010 01010101 01010101 01011010 01101001 00111100
01010101 10101010 01010101 10100101 10010110 11000011
```

八進法・四進法ではそう見えなくても、二進法分解図に限って、各行各列、各汎対角線の定和と正方連結四数定和が必ず直視できることにお気づきだろうか。

各面とも (0, 1) が同数ずつあり、各行各列、各汎対角線とも (0, 1) が同数ずつある。つまり、その8数の和の計算式は、どれも

$$(0+0+0+0+1+1+1+1) \times (32+16+8+4+2+1) = 252(+)=1111100(-) \dots (CS2)$$

で、全部同じなのである。この特徴を知ってしまえば、次からは観察して識別するだけで済む。一々計算しなくてもよいのだ。一方、正方連結四数の定和は、

$$(0+0+1+1) \times (32+16+8+4+2+1) = 126(+)=1111110(-) \dots (CS3)$$

かくして「正方連結完全八方陣」だとすぐに見て取れてしまう。

そして、次はこういう方陣を作ってみようかという気になる。そのためにどうすれば良いかを考えて実験している内に、様々な工夫・研究が実ってくる。例えば、こういう並び方が何通り可能かというような計算法までが発見される。知識がどんどん蓄積する。……

私自身の研究成果については、後日に書いた諸報告を読んでほしい。

6. 同じ偶数次でも、六次や十次の魔方陣では、事情がだいぶ違う。同じように二進法で説明することができない。じつは、そもそも補数対称型も完全型の汎対角線魔方陣も構成することができない。それで、良いサンプルをお見せすることがどうしてもできない。

#4/基本図

/二進法表記図

```
1 2 3 4 5 6 000000 000001 000010 000011 000100 000101
7 8 9 10 11 12 000110 000111 001000 001001 001010 001011
13 14 15 16 17 18 001100 001101 001110 001111 010000 010001
19 20 21 22 23 24 010010 010011 010100 010101 010110 010111
25 26 27 28 29 30 011000 011001 011010 011011 011100 011101
31 32 33 34 35 36 011110 011111 100000 100001 100010 100011
```

/数学的表記図

/二進法分解図

```
0 1 2 3 4 5 000000 000000 000000 000011 001100 010101
6 7 8 9 10 11 000000 000000 001111 110000 110011 010101
12 13 14 15 16 17 000000 000011 111100 111100 001100 010101
18 19 20 21 22 23 000000 111111 000000 001111 110011 010101
24 25 26 27 28 29 000000 111111 111111 000011 001100 010101
30 31 32 33 34 35 001111 110000 110000 110000 110011 010101
*32/ *16/ *8/ *4/ *2/ *1/
```

上の六方陣基本図・分解図で理由を考えてみよう。

六方陣で用いる最大数は、 $6^2-1=35(+)=55(六)=1022(三)=100011(二)$

これでは、三進法表記でも二進法表記でも、分解図最上位の面が全部埋まらない。同数個の{0, 1}で最上位面が埋まらないのである。

最上位の面が全部埋まるためには、三進法では $3^4-1=2222(三)=80(+)$ ；二進法では $3^6-1=111111(二)=63(+)$ までの数が要る(古典的表記では、それぞれ81と64。つまり、 $9^2=3^4$ ； $8^2=2^6$ ；という等式が成り立つ必要がある)。

要するに、六方陣の全体的特徴を論じるには、三進法や二進法表記は不向きなのである。オイラー方陣を構成することができない。六進法を用いる以外に方策は無い。

これは、十次でも同じだ。十進法以外でオイラー方陣を構成することはできない。

ところが、誰が何度トライしようとも、汎六方陣を六進法で作る試みは、必ず失敗する。今は、行列と2本の主対角線のみが定和の普通の六方陣を六進法分解して調べてみよう。

1/古典的表記

/数学的表記(拡張空間)

1 34 9 33 32 2	32 31 1 0 33 8 32 31 1	0 33 8
31 16 20 12 14 18	11 13 17 30 15 19 11 13 17	30 15 19
7 21 27 13 24 19	12 23 18 6 20 26 12 23 18	6 20 26
26 10 22 8 15 30	7 14 29 25 9 21 7 14 29	25 9 21
11 25 29 17 23 6	16 22 5 10 24 28 16 22 5	10 24 28
35 5 4 28 3 36	27 2 35 34 4 3 27 2 35	34 4 3

/六進法表記

/六進法分解図

00 53 12 52 51 01	0 5 1 5 5 0	0 3 2 2 1 1
50 23 31 15 21 25	5 2 3 1 2 2	0 3 1 5 1 5
10 32 42 20 35 30	1 3 4 2 3 3	0 2 2 0 5 0
41 13 33 11 22 45	4 1 3 1 2 4	1 3 3 1 2 5
14 40 44 24 34 05	1 4 4 2 3 0	4 0 4 4 4 5
54 04 03 43 02 55	5 0 0 4 0 5	4 4 3 3 2 5
	*6/	*1/

* 行列と2本の主対角線の定和が成り立っているかどうか調べる *

0+33+8+32+31+1=	(0+5+1+5+5+0)*6+(0+3+2+2+1+1)=	105 ... rw1
30+15+19+11+13+17=	(5+2+3+1+2+2)*6+(0+3+1+5+1+5)=	105 ... rw2
6+20+26+12+23+18=	(1+3+4+2+3+3)*6+(0+2+2+0+5+0)=	105 ... rw3
25+9+21+7+14+29=	(4+1+3+1+2+4)*6+(1+3+3+1+2+5)=	105 ... rw4
10+24+28+16+22+5=	(1+4+4+2+3+0)*6+(4+0+4+4+4+5)=	105 ... rw5
34+4+3+27+2+35=	(5+0+0+4+0+5)*6+(4+4+3+3+2+5)=	105 ... rw6
0+30+6+25+10+34=	(0+5+1+4+1+5)*6+(0+0+0+1+4+4)=	105 ... cl1
33+15+20+9+24+4=	(5+2+3+1+4+0)*6+(3+3+2+3+0+4)=	105 ... cl2
8+19+26+21+28+3=	(1+3+4+3+4+0)*6+(2+1+2+3+4+3)=	105 ... cl3
32+11+12+7+16+27=	(5+1+2+1+2+4)*6+(2+5+0+1+4+3)=	105 ... cl4
31+13+23+14+22+2=	(5+2+3+2+3+0)*6+(1+1+5+2+4+2)=	105 ... cl5
1+17+18+29+5+35=	(0+2+3+4+0+5)*6+(1+5+0+5+5+5)=	105 ... cl6
0+15+26+7+22+35=	(0+2+4+1+3+5)*6+(0+3+2+1+4+5)=	105 ... pd1
1+13+12+21+24+34=	(0+2+2+3+4+5)*6+(1+1+0+3+0+4)=	105 ... pb6

... 確かに、これは六次の標準型魔方陣である。

... しかし、これは汎対角線魔方陣ではない。

0+35=35 ... cp1;	33+2=35 ... cp2;	8+27=35 ... cp3;	32+3=35 ... cp4;
31+4=35 ... cp5;	1+34=35 ... cp6;	30+5=35 ... cp7;	15+22=37 ... cp8;
19+16=35 ... cp9;	11+28=39 ... cp10;	13+24=37 ... cp11;	17+10=27 ... cp12;
6+29=35 ... cp13;	20+14=34 ... cp14;	26+7=33 ... cp15;	12+21=33 ... cp16;
23+9=32 ... cp17;	18+25=43 ... cp18;		

... これは、補数対称型六方陣ではない。

こういう普通の六方陣は、それこそ無数にあるが、どれも皆「非オイラー型」だ。

たとえ六進法でも十進法でもオイラー型には絶対にならない。偶数次で一番強力なはずの二進法でもできないのだから、オイラー方陣を構成する方策は皆無ということだ。

六次では、汎魔方陣そのものがもともと構成できない。それは、既に証明されている。そのためもあって、N進法で完全オイラー六方陣を構成することは絶対に不可能なのである。

要するに、六次や十次では、N進法は使えないのだ。どうか万能とは思わないでほしい。

7. 九次の魔方陣はどうだろうか。九次ならば、九進法と三進法を使えるチャンスがある。実際に調べて見よう。汎九方陣の例題解をN進法分解してみよう。

*** 多重三方陣型の対称汎九方陣の例を九進法分解する ***

1/古典的表記

1 42 80 65 22 36 48 59 16
50 61 12 6 44 73 67 27 29
72 20 31 52 57 14 8 37 78
7 39 77 71 19 33 54 56 13
47 58 18 3 41 79 64 24 35
69 26 28 49 63 11 5 43 75
4 45 74 68 25 30 51 62 10
53 55 15 9 38 76 70 21 32
66 23 34 46 60 17 2 40 81

/九進法表記

00 45 87 71 23 38 52 64 16
54 66 12 05 47 80 73 28 31
78 21 33 56 62 14 07 40 85
06 42 84 77 20 35 58 61 13
51 63 18 02 44 86 70 25 37
75 27 30 53 68 11 04 46 82
03 48 81 74 26 32 55 67 10
57 60 15 08 41 83 76 22 34
72 24 36 50 65 17 01 43 88

/数学的表記

0 41 79 64 21 35 47 58 15
49 60 11 5 43 72 66 26 28
71 19 30 51 56 13 7 36 77
6 38 76 70 18 32 53 55 12
46 57 17 2 40 78 63 23 34
68 25 27 48 62 10 4 42 74
3 44 73 67 24 29 50 61 9
52 54 14 8 37 75 69 20 31
65 22 33 45 59 16 1 39 80

/九進法分解図

0 4 8 7 2 3 5 6 1 0 5 7 1 3 8 2 4 6
5 6 1 0 4 8 7 2 3 4 6 2 5 7 0 3 8 1
7 2 3 5 6 1 0 4 8 8 1 3 6 2 4 7 0 5
0 4 8 7 2 3 5 6 1 6 2 4 7 0 5 8 1 3
5 6 1 0 4 8 7 2 3 1 3 8 2 4 6 0 5 7
7 2 3 5 6 1 0 4 8 5 7 0 3 8 1 4 6 2
0 4 8 7 2 3 5 6 1 3 8 1 4 6 2 5 7 0
5 6 1 0 4 8 7 2 3 7 0 5 8 1 3 6 2 4
7 2 3 5 6 1 0 4 8 2 4 6 0 5 7 1 3 8

*** 同じ例を三進法分解する ***

1/古典的表記

1 42 80 65 22 36 48 59 16
50 61 12 6 44 73 67 27 29
72 20 31 52 57 14 8 37 78
7 39 77 71 19 33 54 56 13
47 58 18 3 41 79 64 24 35
69 26 28 49 63 11 5 43 75
4 45 74 68 25 30 51 62 10
53 55 15 9 38 76 70 21 32
66 23 34 46 60 17 2 40 81

/三進法表記

0000 1112 2221 2101 0210 1022 1202 2011 0120
1211 2020 0102 0012 1121 2200 2110 0222 1001
2122 0201 1010 1220 2002 0111 0021 1100 2212
0020 1102 2211 2121 0200 1012 1222 2001 0110
1201 2010 0122 0002 1111 2220 2100 0212 1021
2112 0221 1000 1210 2022 0101 0011 1120 2202
0010 1122 2201 2111 0220 1002 1212 2021 0100
1221 2000 0112 0022 1101 2210 2120 0202 1011
2102 0211 1020 1200 2012 0121 0001 1110 2222

/数学的表記

0 41 79 64 21 35 47 58 15
49 60 11 5 43 72 66 26 28
71 19 30 51 56 13 7 36 77
6 38 76 70 18 32 53 55 12
46 57 17 2 40 78 63 23 34
68 25 27 48 62 10 4 42 74
3 44 73 67 24 29 50 61 9
52 54 14 8 37 75 69 20 31
65 22 33 45 59 16 1 39 80

/三進法分解図

012201120 012120201 012012012 021102210
120012201 201012120 120120120 102210021
201120012 120201012 201201201 210021102
012201120 012120201 201201201 021102210
120012201 201012120 012012012 102210021
201120012 120201012 120120120 210021102
012201120 012120201 120120120 021102210
120012201 201012120 201201201 102210021
201120012 120201012 012012012 210021102

*27/ *9/ *3/ *1/

* Check Line-Sums *

$$\begin{aligned}
 &0+41+79+64+21+35+47+58+15= \\
 &\quad (0+1+2+2+0+1+1+2+0) *27+ (0+1+2+1+2+0+2+0+1) *9+ \\
 &\quad (0+1+2+0+1+2+0+1+2) *3+ (0+2+1+1+0+2+2+1+0) = 360 \dots \text{rw1} \\
 &49+60+11+5+43+72+66+26+28= \\
 &\quad (1+2+0+0+1+2+2+0+1) *27+ (2+0+1+0+1+2+1+2+0) *9+ \\
 &\quad (1+2+0+1+2+0+1+2+0) *3+ (1+0+2+2+1+0+0+2+1) = 360 \dots \text{rw2} \\
 &71+19+30+51+56+13+7+36+77= \\
 &\quad (2+0+1+1+2+0+0+1+2) *27+ (1+2+0+2+0+1+0+1+2) *9+ \\
 &\quad (2+0+1+2+0+1+2+0+1) *3+ (2+1+0+0+2+1+1+0+2) = 360 \dots \text{rw3} \\
 &6+38+76+70+18+32+53+55+12= \\
 &\quad (0+1+2+2+0+1+1+2+0) *27+ (0+1+2+1+2+0+2+0+1) *9+ \\
 &\quad (2+0+1+2+0+1+2+0+1) *3+ (0+2+1+1+0+2+2+1+0) = 360 \dots \text{rw4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &0+49+71+6+46+68+3+52+65= \\
 &\quad (0+1+2+0+1+2+0+1+2) *27+ (0+2+1+0+2+1+0+2+1) *9+ \\
 &\quad (0+1+2+2+0+1+1+2+0) *3+ (0+1+2+0+1+2+0+1+2) = 360 \dots \text{cl1} \\
 &41+60+19+38+57+25+44+54+22= \\
 &\quad (1+2+0+1+2+0+1+2+0) *27+ (1+0+2+1+0+2+1+0+2) *9+ \\
 &\quad (1+2+0+0+1+2+2+0+1) *3+ (2+0+1+2+0+1+2+0+1) = 360 \dots \text{cl2} \\
 &79+11+30+76+17+27+73+14+33= \\
 &\quad (2+0+1+2+0+1+2+0+1) *27+ (2+1+0+2+1+0+2+1+0) *9+ \\
 &\quad (2+0+1+1+2+0+0+1+2) *3+ (1+2+0+1+2+0+1+2+0) = 360 \dots \text{cl3} \\
 &64+5+51+70+2+48+67+8+45= \\
 &\quad (2+0+1+2+0+1+2+0+1) *27+ (1+0+2+1+0+2+1+0+2) *9+ \\
 &\quad (0+1+2+2+0+1+1+2+0) *3+ (1+2+0+1+2+0+1+2+0) = 360 \dots \text{cl4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &0+60+30+70+40+10+50+20+80= \\
 &\quad (0+2+1+2+1+0+1+0+2) *27+ (0+0+0+1+1+1+2+2+2) *9+ \\
 &\quad (0+2+1+2+1+0+1+0+2) *3+ (0+0+0+1+1+1+2+2+2) = 360 \dots \text{pd1} \\
 &41+11+51+18+78+4+61+31+65= \\
 &\quad (1+0+1+0+2+0+2+1+2) *27+ (1+1+2+2+2+0+0+0+1) *9+ \\
 &\quad (1+0+2+0+2+1+2+1+0) *3+ (2+2+0+0+0+1+1+1+2) = 360 \dots \text{pd2} \\
 &79+5+56+32+63+42+9+52+22= \\
 &\quad (2+0+2+1+2+1+0+1+0) *27+ (2+0+0+0+1+1+1+2+2) *9+ \\
 &\quad (2+1+0+1+0+2+0+2+1) *3+ (1+2+2+2+0+0+0+1+1) = 360 \dots \text{pd3} \\
 &64+43+13+53+23+74+3+54+33= \\
 &\quad (2+1+0+1+0+2+0+2+1) *27+ (1+1+1+2+2+2+0+0+0) *9+ \\
 &\quad (0+2+1+2+1+0+1+0+2) *3+ (1+1+1+2+2+2+0+0+0) = 360 \dots \text{pd4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &35+43+51+76+57+68+9+20+1= \\
 &\quad (1+1+1+2+2+2+0+0+0) *27+ (0+1+2+2+0+1+1+2+0) *9+ \\
 &\quad (2+2+2+1+1+1+0+0+0) *3+ (2+1+0+1+0+2+0+2+1) = 360 \dots \text{pb6} \\
 &47+72+56+70+17+25+3+31+39= \\
 &\quad (1+2+2+2+0+0+0+1+1) *27+ (2+2+0+1+1+2+0+0+1) *9+ \\
 &\quad (0+0+0+2+2+2+1+1+1) *3+ (2+0+2+1+2+1+0+1+0) = 360 \dots \text{pb7} \\
 &58+66+13+18+2+27+44+52+80= \\
 &\quad (2+2+0+0+0+1+1+1+2) *27+ (0+1+1+2+0+0+1+2+2) *9+ \\
 &\quad (1+1+1+0+0+0+2+2+2) *3+ (1+0+1+0+2+0+2+1+2) = 360 \dots \text{pb8} \\
 &15+26+7+32+40+48+73+54+65= \\
 &\quad (0+0+0+1+1+1+2+2+2) *27+ (1+2+0+0+1+2+2+0+1) *9+ \\
 &\quad (2+2+2+1+1+1+0+0+0) *3+ (0+2+1+2+1+0+1+0+2) = 360 \dots \text{pb9}
 \end{aligned}$$

どうやら三進法分解図の方が、この例題の希有の性質を説明できているようだ。どの行列もどの汎対角線も、次の等式を満たすことによって定和という特性を獲得している。

$$(0+0+0+1+1+1+2+2+2) *27+ (0+0+0+1+1+1+2+2+2) *9+ (0+0+0+1+1+1+2+2+2) *3+ (0+0+0+1+1+1+2+2+2) = 360$$

$$\text{あるいは, } (0+0+0+1+1+1+2+2+2) * (27+9+3+1) = 9*40 = 360$$

しかも、分解図のどの面も {0, 1, 2} の3数が同数個ずつある。三進法表記図で見ても、{0000, 0001, 0002, 0010, 0011, 0012, 0020, 0021, 0022, ..., 2220, 2221, 2222} の全数個が

各1回ずつ重複無く欠落無く使われている。

要するに、上の例題解は、**完全オイラー九方陣**なのである（汎対角線まで上の性質が成り立つオイラー方陣を、小生はあえて「完全オイラー方陣」と呼んでいる）。

8. 高次の魔方陣には、しかし、ひとつ厄介な問題がある。「**ノン・オイラー方陣**」の存在だ（「非オイラー方陣」とも「非グレコ・ラテン方陣」とも言う）。

四次や五次では、全ての汎対角線魔方陣が「完全オイラー型」であった。つまり、完全オイラー方陣でない汎魔方陣は存在しないことが、わかっている。

ところが、七次・八次・九次の平面魔方陣には、完全オイラー方陣でない汎魔方陣が少なからず存在する。いや、断然多数個存在する。完全オイラー方陣の存在は、どんどん少なくなり、反比例して稀少価値がどんどん高くなる。特殊性が増す。

したがって、四次・五次の場合は、完全オイラー方陣の構造を全ての汎魔方陣の本質的な構造あるいは「運命」として指し示すことができたのだが、七次以上ではそれができない。

あらためて、完全オイラー方陣とは何なのかを、考え直す必要に迫られる。

八次の汎魔方陣を数個例にとって説明しよう。最初の2例が「ノン・オイラー型」だ。分解図の各面で、幾つかの行列・汎対角線に {0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1} 以外のパターンが見られる。1が2つ、3つしか無かったり、6つも7つもあったりする。これでも汎魔方陣に変わりはないので、びっくりする。こんな例が、無数に見つかる。

#1/完全八方陣

/二進法分解図

1 62 5 59 2 61 12 58	01010101 01010101 01010111 01100100 00010010 01001011
57 14 50 48 9 18 45 19	10110010 10100101 11011010 01010010 00010001 01110100
10 27 34 25 54 33 36 41	00101111 01011000 11010001 00001000 01000010 10101010
49 30 26 23 52 21 22 37	10001001 11111110 01100000 01010111 00011000 01101010
63 4 53 7 64 3 60 6	10101010 10101010 10001010 10111001 11011110 01001011
56 47 20 46 8 51 15 17	11010100 10100101 01010010 11011010 11101110 10111000
11 32 29 24 55 38 31 40	00001101 01111010 11100010 01111111 11011011 01010101
13 44 43 28 16 35 39 42	01100111 00010000 11111001 10001010 01111110 01011001

#2/多重四方陣型完全八方陣

/二進法分解図

1 63 4 62 15 49 34 32	01010110 01010101 01011001 01011001 01101001 00110011
60 7 54 9 41 39 20 30	10101100 10100011 10011001 01100101 11000110 10100011
10 52 21 47 36 23 28 43	01011001 01100110 10010011 00110100 01011111 11001010
59 8 51 12 38 19 48 25	10101010 10100101 10010011 01001010 11110110 01011010
50 16 31 33 64 2 61 3	10011010 10101010 01101010 01101010 01101001 11001100
24 26 45 35 5 58 11 56	00110101 11000101 01100110 10101001 10010011 11000101
29 42 37 22 55 13 44 18	01101010 10011001 11000110 10111100 00001010 01010011
27 46 17 40 6 57 14 53	01010101 10100101 11000110 01011011 10010000 01011010

#3/正方連結型汎八方陣

/二進法分解図

1 64 3 62 7 58 5 60	01010101 01010101 01010101 01011010 01101001 01010101
63 2 61 4 57 8 59 6	10101010 10101010 10101010 10100101 10010110 01010101
25 40 27 38 31 34 29 36	01010101 10101010 10101010 01011010 01101001 01010101
39 26 37 28 33 32 35 30	10101010 01010101 01010101 10100101 10010110 01010101
50 15 52 13 56 9 54 11	10101010 10101010 01010101 01011010 01101001 10101010
16 49 14 51 10 55 12 53	01010101 01010101 10101010 10100101 10010110 10101010
42 23 44 21 48 17 46 19	10101010 01010101 10101010 01011010 01101001 10101010
24 41 22 43 18 47 20 45	01010101 10101010 01010101 10100101 10010110 10101010

#4/正方連結完全八方陣

/二進法分解図

1 63 5 59 14 52 10 56	01010101 01010101 01011010 01101001 01010101 00001111
62 4 58 8 49 15 53 11	10101010 10101010 10100101 10010110 01010101 11110000
17 47 21 43 30 36 26 40	01010101 10101010 01011010 01101001 01010101 00001111

46 20 42 24 33 31 37 27 10101010 01010101 10100101 10010110 01010101 11110000
 51 13 55 9 64 2 60 6 10101010 10101010 01011010 01101001 10101010 00001111
 16 50 12 54 3 61 7 57 01010101 01010101 10100101 10010110 10101010 11110000
 35 29 39 25 48 18 44 22 10101010 01010101 01011010 01101001 10101010 00001111
 32 34 28 38 19 45 23 41 01010101 10101010 10100101 10010110 10101010 11110000

#5/多重四方陣型正方連結完全八方陣 /二進法分解図

1 63 6 60 38 28 33 31 01011010 01010101 01010101 01101001 01010101 00111100
 62 4 57 7 25 39 30 36 10100101 10101010 10101010 10010110 01010101 11000011
 11 53 16 50 48 18 43 21 01011010 01010101 10101010 01101001 10101010 00111100
 56 10 51 13 19 45 24 42 10100101 10101010 01010101 10010110 10101010 11000011
 27 37 32 34 64 2 59 5 01011010 10101010 10101010 01101001 10101010 00111100
 40 26 35 29 3 61 8 58 10100101 01010101 01010101 10010110 10101010 11000011
 17 47 22 44 54 12 49 15 01011010 10101010 01010101 01101001 01010101 00111100
 46 20 41 23 9 55 14 52 10100101 01010101 10101010 10010110 01010101 11000011

後の3例は、どうやら完全オイラー型だ。どれもが、全面で各行各列、各汎対角線の内容が、{0,0,0,0,1,1,1,1}の組み合わせになっていて、次の式で定和を実現している。

$$(0+0+0+0+1+1+1+1) \times (32+16+8+4+2+1) = 252(+)=11111100(二) \dots (GS2)$$

後の3例は、どれもが「正方連結型」だ。一番条件の厳しい多重型正方連結完全八方陣でも、一番条件の緩い正方連結汎八方陣でも、どれもが「完全オイラー方陣」になっている。

正方連結型は、さいわい解の総数が少ないので、全数検査ができる。

「正方連結型の汎魔方陣」を二進法分解して調べて見たところ、全てが「完全オイラー方陣」になるようだ。ただし、二進法でなければだめで、四進法や八進法で分解しても「完全オイラー方陣」にはならない。

しかも、逆は必ずしも真ならず。つまり、完全オイラー方陣ならば、全てが正方連結型である、とは必ずしも言えない。期待を裏切って反例が幾つも見つかる。

九次の場合は、何でも数が多いので「完全オイラー方陣」はもともと調べ難い。中々見つからないので、もしかしたら無いのではないかと長いこと思っていた。

しかし、根気よく三進法分解しながら調べ続けて居たら、超立体四次元三方陣の研究中に「完全オイラー九方陣」の実物が幾つか見つかった。超立体を展開して多重三方陣型対称汎九方陣を作った中にそれが見つかったのである。

三進法による分解は、どうやら次元に関係なく三方陣のあるところで有効のようだ。だからこそ四次元から二次元に展開して得た多重型対称汎九方陣の中に見つかったのだろう。

完全オイラー方陣が必ず見つかる正方連結型の汎魔方陣は、本来が二次元二方陣を多数含む「多重型」である。しかも、正方連結汎八方陣は六次元超立体二方陣の申し子と言った存在だ。二方陣を内包するがゆえに二進法分解図が有効だったと考えられる。

多次元超立体魔方陣の展開形の中に完全オイラー方陣が多数見つかるのは、そういう構造的連関があるためと考えられる。

だが、逆に多重型の全てが完全オイラー方陣かという、どうもそうではないようだ。

七次以上の高次では、完全オイラー方陣は必ずしも一般的構造ではないのである。

低次の汎四方陣では、もともと全てのタイプが奇跡的に一致する。最初からそう定義しないで作っても、汎四方陣は必ず正方連結型になる。全てが完全オイラー方陣になる。四次元超立体二方陣の申し子でもある。汎五方陣でも、全てが完全オイラー方陣だ。

これは本来驚くべき希有の奇跡なのだが、オイラー先生のご託宣ということもあって、我々はこれを魔方陣一般の「普遍的な性質」と頭から思い込んでしまっていた。

だから、四次・五次に限らず七次・八次でも「完全オイラー方陣」で全てを説明できるという気になっていた。

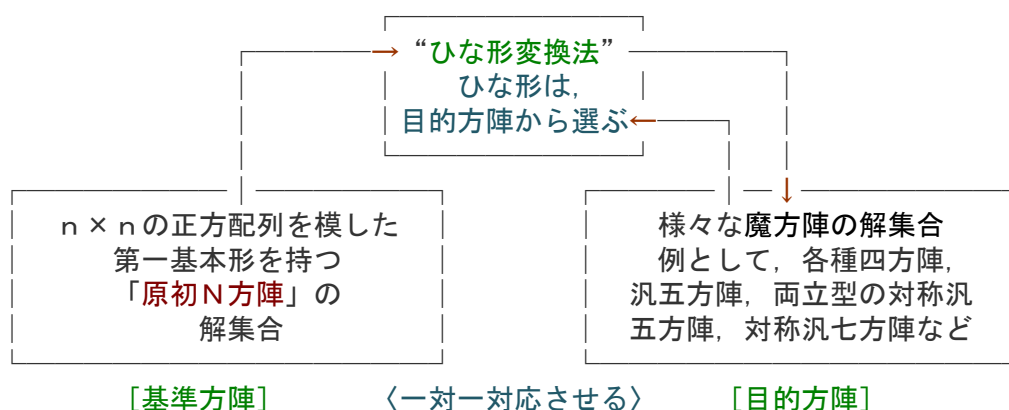
だが、事実はそうになっていなかった。他の次数でも類推がそのまま通用するとは限らず、高次の場合は完全オイラー方陣がいつでも成り立つとは限らなかったのである。

最近思う。「完全オイラー方陣」は、実は一般構造を説明する方法ではなく、本来美しい構造の稀少の宝物を解き明かす概念、それを作り出す方法ではなかったか……、と。

第2節：「ひな形変換法」

0. 次は、最近に開発された魔方陣の研究技法である「ひな形変換法」と新概念である「原初方陣」の説明を試みよう。ただし、その概略は既に『原初方陣の基礎的研究』I およびII の稿で述べたので、ざっと復習して、その後の研究の新しい展開について触れよう。特にN進法と結び付けたホットな研究は、興味深い結論を引き出した。まずは、復習から。

1. 「ひな形変換法」とは、異種方陣を作り出す外部変換の一方法で、2種類の方陣の解集合を「ひな形」によって媒介し、解を一対一対応で結び付ける。



その特徴は、

- (1) 「ひな形」そのものを目的方陣の解の中から任意に選び出す。
- (2) そのひな形を「型変換」の方法として使う。言い換えれば、そのひな形を理想的モデルとして模倣的に型変換する方法である。
- (3) 基準になる方陣としては、「原初方陣」を用意する。それは規則的に順序付けた正方配列を模倣した第一基本形と、それを規則的に並べ替えた「変換形」の集合である。
- (4) そして、この2種類の方陣の間で予め次のような「すり合わせ」を行う。
 - [1] 同数の要素を持つ解集合を各々1つずつ用意する。(ひな形が確立した場合には、原初方陣だけでも良い。) 解集合の要素の数を合わせないと、一対一対応は実現できない。
 - [2] 解の総数を合わせるために、専ら原初方陣の方に与える条件を選別する。例えば、
 - (1) 補数の定和と対称配置を残すか。
 - (2) 汎対角線の定和を残すか(行列の定和は、条件に加えない)。
 - (3) クロスサムの等和を維持するか。
 - (4) 各行列において外項・中項・内項の等和を維持するか。
 - (5) 単純な反転形や回転形を封じるためにどういう不等式を使うか。

などである。

これらを決定したら、明示的に定式化して原初方陣を設計し、基準方陣の解集合を作る。

(5) 目的方陣の中から実際に「ひな形」を見つける際に、目的方陣の解集合が既に得られている場合には、その中から選別する。

原初方陣の第一基本形の特徴をなるべく多く残しているものを選ぶと良い。

「古典的構成法」と言われているものを活用する手もある。たいていが基準方陣からの規則的変換であるので、ひな形として利用できる。

目的方陣の中から選ぶ理由は、そのひな形が既に必要な条件を全て満たしているためである。従って、そのひな形を理想的モデルとして模倣変換すれば、次の解もまた同じ条件を満たすに違いないと期待できるからである。

ひな形は、トライ&エラーでテストしながら最良のものを選ぶ。

ひな形変換法そのものは、本来的に一義的・可逆的だ。1つの解から複数の解を同時に導くことは無い。また別種の解を導く心配も無い。簡単に元に戻せる。

*** 対称汎五方陣の場合の基本図 ***

[原初方陣]										→	[目的方陣]									
24	25	21	22	23	24	25	21	22	23		3	25	17	14	6	3	25	17	14	6
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3		12	9	1	23	20	12	9	1	23	20
9	10	6	7	8	9	10	6	7	8		21	18	15	7	4	21	18	15	7	4
14	15	11	12	13	14	15	11	12	13		10	2	24	16	13	10	2	24	16	13
19	20	16	17	18	19	20	16	17	18		19	11	8	5	22	19	11	8	5	22
24	25	21	22	23	24	25	21	22	23		3	25	17	14	6	3	25	17	14	6
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3		12	9	1	23	20	12	9	1	23	20
第一基本形											↑この解を「ひな形」として用いる。									

しかし、目的方陣に変換してみたら、本来他の解と同一視されるべき反転・回転形を出力して、本来の対応解を出力しない場合がある。この「多対1対応」をチェックしないと、真の「一対一対応」は実現しない。場合によっては、原初方陣の解集合の構成・整理の仕方を修正することもある。「原始解」レベルで対応を調べるように変更する場合もある。

(6) ひな形変換の手順は、以下の通りだ。

- [1] 原初方陣の第一基本形とひな形を比較して、「変換の規則」を立てる。例えば、
 - 「元の方陣の n1 の値を新方陣の n1 に代入する。
 - 元の方陣の n23 の値を新方陣の n2 に代入する。
 - 元の方陣の n20 の値を新方陣の n3 に代入する。
 - 元の方陣の n12 の値を新方陣の n4 に代入する。
 -
 - 元の方陣の n25 の値を新方陣の n25 に代入する。」というふうに。
- [2] この変換規則を順に原初方陣の全ての解に施す。原初方陣の解が16個あれば、変換後は16個の目的方陣の解が出来る。
- [3] 新しく出来た解をチェックすると、その全てが相手の既に得られている解のいずれかと一致する。つまり、一対一対応している。
- [4] ひな形が一度確立すれば、目的方陣の解集合はいつでも何度でも再構成できる。だから、次からは目的方陣の解集合を予め作っておく必要がもはや無い。
- [5] 原初方陣の解集合とひな形変換法1個があれば、目的方陣はいつでも作れる。

(7) かくして2つの種類の別個の解集合が、1つのひな形によって結び付けられる。しかも、解どうしが一対一対応するという緊密な関係において。

何故模倣だけで相手の目的方陣を全部作れるのか。何故一対一対応するのだろうか。

前者の問いは、各論でならば、代数的に証明できる。

先ず変数で式を記述し、変換の後でも変数どうしの中で目的方陣の条件が満たされることを式で示せば、全ての場合で成り立つことを示せる。

また、原初方陣の第一基本形にも意味がある。その位置情報は、正方配列のそれと全く同じである。それとひな形をあえて対応させることによって、ひな形の位置情報そのものを相対化している。つまり、変換規則を立てることによって、位置情報を変換ベクトルに置き換えているのである。こうしておけば、他の全部の解にも同様に使えるようになる。

原初方陣の次の解を与えると、最初の解との差分情報がひな形変換されて、目的方陣の新

しい解を作る。次から次へとそれを繰り返すのだと、考えられる。

2. ひな形を具体的にどうやって選ぶか。対称汎五方陣の場合で示そう。

(1) 目的方陣の解の中から、原初方陣の第一基本形の特徴をなるべく多く残している解を選ぶ。

例えば、主対角線の1本が同じものを選ぶとよい。

(2) 片っ端からテストして見つける。解集合が小さい場合には、有効な手である。

(3) ひな形自身を自己変換して、基準方陣に戻るかどうか調べる策もある。可逆性があれば、先ず合格である。

下に実例を示す。対称汎五方陣の既に得られている解の1つ1つについて、自分自身をひな形にして自己変換を連続して行った結果を示す。

* 自分自身をひな形にして連続的に自己変換した結果 *

[1]	/T0	/T1	/T2	/T3
1 23 20 14 7	1 6 11 10 9	1 15 22 18 21	1 4 12 24 19	
15 9 2 21 18	4 21 23 19 24	14 19 6 17 3	10 17 15 5 20	
22 16 13 10 4	12 8 13 18 14	16 2 13 24 10	8 23 13 3 18	
8 5 24 17 11	2 7 3 5 22	23 9 20 7 12	6 21 11 9 16	
19 12 6 3 25	17 16 15 20 25	5 8 4 11 25	7 2 14 22 25	
[2]	/T0	/T1	/T2	/T3
1 15 24 18 7	1 16 11 20 17	1 12 10 3 21	1 4 14 24 19	
23 17 6 5 14	2 21 23 7 22	15 19 2 17 8	16 9 15 21 6	
10 4 13 22 16	14 18 13 8 12	22 20 13 6 4	8 3 13 23 18	
12 21 20 9 3	4 19 3 5 24	18 9 24 7 11	20 5 11 17 10	
19 8 2 11 25	9 6 15 10 25	5 23 16 14 25	7 2 12 22 25	
[3]	/T0	/T1	/T2	/T3
1 23 20 12 9	1 6 11 16 21	1 15 24 8 17	1 2 3 4 5	
15 7 4 21 18	2 7 12 17 22	23 7 16 5 14	6 7 8 9 10	
24 16 13 10 2	3 8 13 18 23	20 4 13 22 6	11 12 13 14 15	
8 5 22 19 11	4 9 14 19 24	12 21 10 19 3	16 17 18 19 20	
17 14 6 3 25	5 10 15 20 25	9 18 2 11 25	21 22 23 24 25	
[4]	/T0	/T1	/T2	/T3
1 15 22 18 9	1 16 8 20 5	1 14 6 3 9	1 24 23 22 5	
23 19 6 5 12	4 7 23 9 2	18 19 4 5 15	20 7 18 9 16	
10 2 13 24 16	12 15 13 11 14	2 16 13 10 24	15 14 13 12 11	
14 21 20 7 3	24 17 3 19 22	11 21 22 7 8	10 17 8 19 6	
17 8 4 11 25	21 6 18 10 25	17 23 20 12 25	21 4 3 2 25	
[5]	/T0	/T1	/T2	/T3
2 23 19 15 6	23 7 16 5 14	7 10 8 6 9	10 18 1 14 22	
14 10 1 22 18	9 18 2 11 25	22 25 23 21 24	11 24 7 20 3	
21 17 13 9 5	20 4 13 22 6	12 15 13 11 14	17 5 13 21 9	
8 4 25 16 12	1 15 24 8 17	2 5 3 1 4	23 6 19 2 15	
20 11 7 3 24	12 21 10 19 3	17 20 18 16 19	4 12 25 8 16	
[6]	/T0	/T1	/T2	/T3
2 14 25 18 6	14 21 24 19 23	21 20 12 10 1	20 3 5 15 2	
23 16 7 4 15	1 11 16 18 17	2 9 11 19 22	14 4 9 10 8	
9 5 13 21 17	4 6 13 20 22	18 23 13 3 8	19 1 13 25 7	
11 22 19 10 3	9 8 10 15 25	4 7 15 17 24	18 16 17 22 12	
20 8 1 12 24	3 7 2 5 12	25 16 14 6 5	24 11 21 23 6	
[7]	/T0	/T1	/T2	/T3
2 23 19 11 10	23 7 20 25 18	7 6 12 24 21	6 14 17 3 16	
14 6 5 22 18	9 14 10 15 21	22 9 18 1 16	15 22 21 2 8	
25 17 13 9 1	24 4 13 22 2	3 11 13 15 23	19 25 13 1 7	
8 4 21 20 12	5 11 16 12 17	10 25 8 17 4	18 24 5 4 11	
16 15 7 3 24	8 1 6 19 3	5 2 14 20 19	10 23 9 12 20	

[8]	/T0	/T1	/T2	/T3
2 14 21 18 10	14 25 16 19 11	25 24 15 6 9	24 12 17 23 4	
23 20 7 4 11	5 3 20 18 9	10 21 3 19 4	11 16 21 6 18	
9 1 13 25 17	4 2 13 24 22	18 14 13 12 8	19 25 13 1 7	
15 22 19 6 3	17 8 6 23 21	22 7 23 5 16	8 20 5 10 15	
16 8 5 12 24	15 7 10 1 12	17 20 11 2 1	22 3 9 14 2	

上の No. 3 をひな形に選ぶのが、適当である。'/T1' で反転現象が起きてはいるが、内容的に原初方陣に戻っているし、可逆であると認定して問題ない。

3. ひな形を選んだ後、先ず何をするか。

第一に、原初五方陣の解集合を作らなければならない。そのために原初方陣に与える基本条件をどうするか。作り方は、普通の魔方陣と全然変わらない。

目的方陣を対称汎五方陣とするのだから、補数の定和と対称的な配置という特徴を先ず残されなければならない。次に汎対角線の定和も残す。さらに行列の定和も実現しなければならない。その辺をどう選択するかを、基準方陣とひな形とを比較して詳しく調べる。

いろいろ試行錯誤した結果、原初方陣に与える条件は、ひな形そのものに教わるのが原則であると、わかった。ひな形内部の数値を一々変数名に読み替えて、それでいつものように対称汎五方陣を設計する。基本条件は次のようにすれば良いとわかった。

[目的方陣のひな形]

12	9	1	23	20	12	9	1	23	20
21	18	15	7	4	21	18	15	7	4
10	2	24	16	13	10	2	24	16	13
19	11	8	5	22	19	11	8	5	22
3	25	17	14	6	3	25	17	14	6

* 原初方陣の定義条件式 *

- n1+n23+n20+n12+n9=C ... (1)
 - n15+n7+n4+n21+n18=C ... (2)
 - n24+n16+n13+n10+n2=C ... (3)
 - n8+n5+n22+n19+n11=C ... (4)
 - n17+n14+n6+n3+n25=C ... (5)
 - n1+n15+n24+n8+n17=C ... (6)
 - n23+n7+n16+n5+n14=C ... (7)
 - n20+n4+n13+n22+n6=C ... (8)
 - n12+n21+n10+n19+n3=C ... (9)
 - n9+n18+n2+n11+n25=C ... (10)
- * 行列の定和式 * ↑

* 補数定和と対称配置 *

$$n1+n25=n23+n3=n20+n6=n12+n14=n9+n17=n15+n11=n7+n19$$

$$=n4+n22=n21+n5=n18+n8=n24+n2=n16+n10=n13+n13=CC \dots (cp)$$

* 汎対角線の定和 *

- n1+n7+n13+n19+n25=C ... (11) | n1+n18+n10+n22+n14=C ... (12)
- n23+n4+n10+n11+n17=C ... (13) | n23+n15+n2+n19+n6=C ... (14)
- n20+n21+n2+n8+n14=C ... (15) | n20+n7+n24+n11+n3=C ... (16)
- n12+n18+n24+n5+n6=C ... (17) | n12+n4+n16+n8+n25=C ... (18)
- n9+n15+n16+n22+n3=C ... (19) | n9+n21+n13+n5+n17=C ... (20)

何故そうするのか。ひな形から原初方陣を構成するというのが、原初方陣から目的方陣を構成する関数の「逆関数」になっているからだ。ここは、逆関数を作るのだと思うべし。

上の条件式には、例の「クロスサム等和式」や「外項・内項の等和式」などが一切無い。それでも良いのかと心配する向きは、古くからの読者だ。確かに以前は、原初方陣の定番として、いつもクロスサム等和式などを重用したものだ。

今の小生はこれは必要ないと考えている。あってもかまわない場合もあるが、いつも必須とは限らない。逆にあっては邪魔な場合もあるのである。なるべく無しで考えた方が良い。(ちなみに「クロスサム等和式」とは、原初方陣図で

$$n1+n7=n2+n6, n2+n8=n3+n7, n3+n9=n4+n8, n4+n10=n5+n9,$$

$$n5+n6=n1+n10, \dots, n6+n12=n7+n11, n11+n17=n12+n16,$$

$n_{16}+n_{22}=n_{17}+n_{21}$, $n_{21}+n_{22}=n_{22}+n_{11}$, …… のような関係を表す。

原初方陣基本形とひな形を比較すると、主対角線上で (n_{5}, n_{21}) と (n_{9}, n_{17}) との位置関係が入れ替わってしまっている。従って、この2つの場所について大小判断をするような不等式を立てると、場合によっては不具合が生じる。一対一対応が破れて目的方陣の解が一部失われる。標準解を求める際のリスト整形用の不等式と抵触するのが、原因だ。

試行錯誤を繰り返してわかったことだが、この対策には次の2つの方法が有効だ。

- (1) 原初方陣と目的方陣の解集合を「標準解」とせず、共に「原始解」のレベルにする。整理は一番最後に行く。 $16 \times 8 = 128$ 個の間で一対一対応を調べるので、手間は増える。
- (2) 立てる不等式を1つにする。 $n_1 < n_5 < n_{21}$ は棄てる。あくまでひな形に敬意を表し、 $n_1 < n_{25}$; $n_1 < n_9 < n_{17}$ と立てて、原初方陣を構成する。

後者(2)の方法で原初方陣の解を求めると、16個見つかる。これを基準方陣の解集合とし、得られた解1つ1つに既に述べた変換の規則を適用する。そうすると、目的方陣の解が自動的に16個得られる。

そのリストは、巻末に付録として添付しておいた。

4. ここでN進法を持ち込む。今は、五方陣だから五進法を持ち込む。どうなるか。先ずひな形に採用する上の解 No. 3 を五進法分解してみよう。

[3/T0]	[五進法分解図]
1 23 20 12 9	00 42 34 21 13 [0 4 3 2 1 0 2 4 1 3]
15 7 4 21 18	24 11 03 40 32 [2 1 0 4 3 4 1 3 0 2]
24 16 13 10 2	43 30 22 14 01 [4 3 2 1 0 3 0 2 4 1]
8 5 22 19 11	12 04 41 33 20 [1 0 4 3 2 2 4 1 3 0]
17 14 6 3 25	31 23 10 02 44 [3 2 1 0 4 1 3 0 2 4]
[古典的表記]	[五進法表記] [5 ¹ 位 5 ⁰ 位]

見事な「オイラー型」である。しかも、汎対角線まで全てオイラー型なのだ。こういうタイプを小生はあえて「完全オイラー型」と呼びたい。

ひな形変換して得られた解のリストに五進法分解図を添えたものを、巻末に置いた。原初方陣にも五進法表記図を添えてみた。比較して見てほしい。

5. リストを見た人ならわかるが、実は得られた対称汎五方陣の解 16個が全て「完全オイラー型」なのである。小生も最初に気付いた時には、大変に驚いた。

- (1) 上位も下位も、各行・各列で {0, 1, 2, 3, 4} が全数各1回ずつ現れている。
- (2) 上位も下位も、各汎対角線で {0, 1, 2, 3, 4} が全数各1回ずつ現れている。
- (3) {00, 01, 02, 03, 04, 10, 11, …… , 43, 44} が重複欠落なく使われている。

従って、行和・列和・汎対角線5数の和の計算式が、どれも $(0+1+2+3+4) \times (5+1) = 60(+)=220(五)$ で、同じ。定和なのである。

[古典的表記では、行和・列和・汎対角線の和は、65]

- (4) しかも、補数対称型である。

得られた16個の解は、我が鈴木睦教授が全数を発見・確定した対称汎五方陣そのものである。つまり、「鈴木方陣」は、完全オイラー型の対称汎五方陣だったのである。他のタイプの対称汎五方陣は発見されていないから、対称汎五方陣の全数が完全オイラー型だ。

[1] [原初五方陣]	: 五進法表記]	[対称汎五方陣]	: 五進法表記]
1 2 3 4 5	00 01 02 03 04	1 23 20 12 9	00 42 34 21 13
6 7 8 9 10	10 11 12 13 14	15 7 4 21 18	24 11 03 40 32
11 12 13 14 15	20 21 22 23 24	24 16 13 10 2	43 30 22 14 01
16 17 18 19 20	30 31 32 33 34	8 5 22 19 11	12 04 41 33 20
21 22 23 24 25	40 41 42 43 44	17 14 6 3 25	31 23 10 02 44

6. 何故そうなるのか。こういう現象に理由の説明は要らないと思うが、小生が考えた理由は、こうである。原初方陣の第一基本形とひな形構成法で必然性をたどれる。

すぐ上の図（前ページ）を見てほしい。

ひな形構成法は、原初五方陣の第一基本形から目的方陣のひな形そのものへの「書き換え法」つまり「並べ替え法」である。この並べ替え法は、数値の重複使用を許していない。だから、うまく行けば、{00, 01, 02, 03, 04, 10, 11, …… , 43, 44} を重複なく全数使うという第一関門を難無く突破できる。はたしてどう上手に並べ替えれば、完全オイラー型になるだろうか。

これからは、全て五進法表記のまま押し通す。

[スタート方陣]

00	01	02	03	04
10	11	12	13	14
20	21	22	23	24
30	31	32	33	34
40	41	42	43	44

図 1

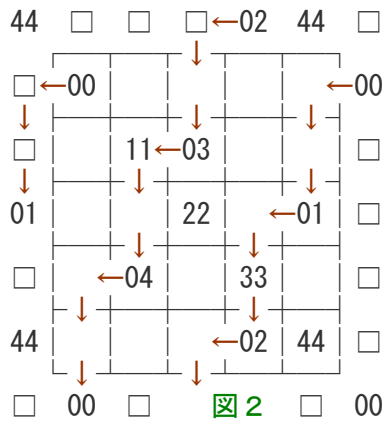


図 2

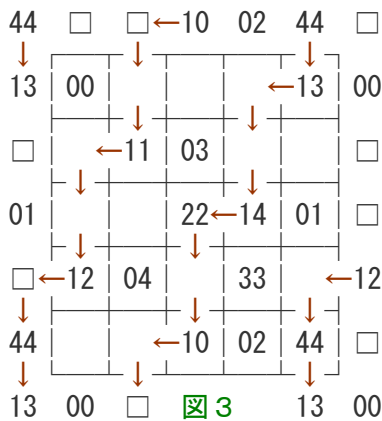


図 3

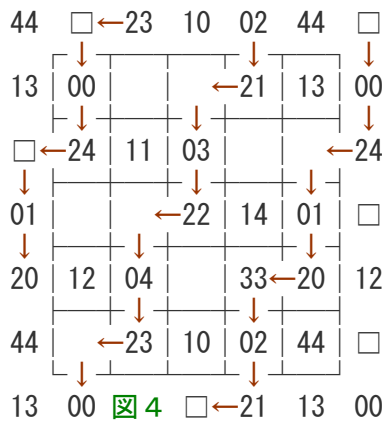


図 4

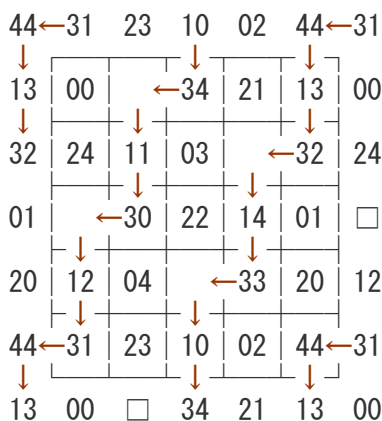
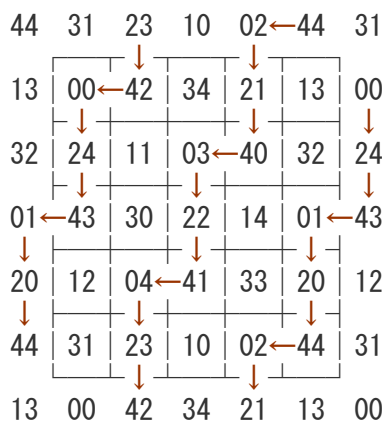


図 5



[出来上がり図]

基準方陣の主対角線の 1 本に注目する。これがすでにオイラー型なのだ。最初にそれをコピーする。そしてその上の 5 数を起点として、その数を含む基準方陣の横のラインを 1 行ずつ「桂馬下がり」に書き写して行く。詳しくは、上の図 1 ~ 図 6 を見てほしい。

この方法は、『原初方陣の基礎的研究』で言及したのと全く同じだ（ただし、その時は、

古典的表記であった)。

結果的に対称汎五方陣の「ひな形」が構成されるが、これが既にオイラー方陣なのだ。それを目視検査するだけで良い。

(1) {00, 01, 02, 03, 04, 10, 11, 12, 13, , 42, 43, 44} が全数重複なく使われていることは、原初五方陣の第一基本形を1数ずつコピーしたことで保証されている。

(2) 後は、全行全列で上位・下位とも {0, 1, 2, 3, 4} が各々1回ずつ全数使われていること。さらに全汎対角線の5数も {0, 1, 2, 3, 4} が各々1回ずつ全数使われていることを自分の眼で確かめれば良い。

このひな形が完全オイラー方陣であることを確かめたら、後はこのひな形を模倣して行けば、対応する原初五方陣のバラエティによって、完全オイラー方陣の別の解が次々と生み出されることになる。……

7. 前稿の『原初五方陣の基礎的研究』では、同じひな形で汎五方陣も 3600個作ったが、これもまた完全オイラー方陣だろうか。

答は、イエス。

出来た 3600個の汎五方陣を整理し、144個の基本解にまで絞り込めば、その解集合は、鈴木教授が発見確定した汎五方陣と同じになる。つまり「鈴木方陣」は、2種類とも「完全オイラー方陣」なのである。

教授は、大変な珍品・宝物を発見していたことになる。小生は、最初は全然理解できていなかった。

8. こうした奇跡が何故可能なのか。そのもう1つの根拠は、原初五方陣そのものにあると考えられる。上図のスタート方陣を見てほしい。

(1) {00, 01, 02, 03, 04, 10, 11, , 43, 44} が全数重複なく使われている。

(2) 汎対角線を詳しく見ると、これが驚くべきことに既に全て「オイラー型」なのである。そのまま利用できるメリットがある。

(3) 横の行は、5本とも五進数の上位が行によって固定されていて、そのために下位に {0, 1, 2, 3, 4} の全数が各々1回ずつ現れざるを得ない。

(4) 縦の列は、5本とも五進数の下位が列によって固定されていて、そのために上位に {0, 1, 2, 3, 4} の全数が各々1回ずつ現れざるを得ない。

このような規則性は、第一基本形に限らず原初五方陣のどのバラエティの中にも見つかる。

試みに上の(3)、(4)をプログラムに採用し(クロスサム等和式のかわりに)、さらに汎対角線の定和式 10本を入れて原初五方陣を構成すると、解がちょうど 3600個得られる。その 3600個の各々にひな形変換を施しても、同じ結果を得るのである。

(第1稿・2稿; March 25, 2001; November 17, 2002; MWCW による計数;
補筆清書稿: October 31, 2005 on MacOS X: 撰田 寛二(Kanji Setsuda))

第3節：七次の「完全オイラー方陣」構成法

(この節は、2003年初春の改訂版をそのまま清書して再録している。)

0. 七次では「完全オイラー方陣」は、見つかるだろうか。

今回は、オイラー方陣の構成法として、ひな形変換法を使う。言わば、N進法とひな形変換法の応用問題として。

1. 目的方陣は、最初に「対称汎七方陣」とし、次に「汎七方陣」も調べよう。

ひな形変換法を使うのであるから、先ず良いひな形を見つけなければならない。

共通のひな形として予め「完全オイラー型の対称汎七方陣」を選ぶ。

対称汎七方陣の解の中から候補をあげて、七進法分解し、上位/下位ともに各行・各列・

各汎対角線の内容を調べる。{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} が例外なく各々1回ずつ現れるような「完全オイラー型」はあるだろうか。

あるのである。下表の[2], [10] の2つが見つかる。

*** ひな形候補のリスト (抜粋) ***

[対称汎七方陣]

[七進法分解図：上位と下位]

[1] [古典的表記]

[7¹位]

7⁰位]

1 48 39 14 44 22 7	0 6 5 1 6 3 0	0 5 3 6 1 0 6
18 9 23 34 38 13 40	2 1 3 4 5 1 5	3 1 1 5 2 5 4
35 29 17 5 19 46 24	4 4 2 0 2 6 3	6 0 2 4 4 3 2
42 20 47 25 3 30 8	5 2 6 3 0 4 1	6 5 4 3 2 1 0
26 4 31 45 33 21 15	3 0 4 6 4 2 2	4 3 2 2 4 6 0
10 37 12 16 27 41 32	1 5 1 2 3 5 4	2 1 4 1 5 5 3
43 28 6 36 11 2 49	6 3 0 5 1 0 6	0 6 5 0 3 1 6

[2]

1 45 40 35 23 18 13	0 6 5 4 3 2 1	0 2 4 6 1 3 5
21 9 4 48 36 31 26	2 1 0 6 5 4 3	6 1 3 5 0 2 4
34 22 17 12 7 44 39	4 3 2 1 0 6 5	5 0 2 4 6 1 3
47 42 30 25 20 8 3	6 5 4 3 2 1 0	4 6 1 3 5 0 2
11 6 43 38 33 28 16	1 0 6 5 4 3 2	3 5 0 2 4 6 1
24 19 14 2 46 41 29	3 2 1 0 6 5 4	2 4 6 1 3 5 0
37 32 27 15 10 5 49	5 4 3 2 1 0 6	1 3 5 0 2 4 6

[3]

1 45 40 27 47 2 13	0 6 5 3 6 0 1	0 2 4 5 4 1 5
21 9 12 24 36 31 42	2 1 1 3 5 4 5	6 1 4 2 0 2 6
34 30 17 28 7 44 15	4 4 2 3 0 6 2	5 1 2 6 6 1 0
39 18 46 25 4 32 11	5 2 6 3 0 4 1	3 3 3 3 3 3 3
35 6 43 22 33 20 16	4 0 6 3 4 2 2	6 5 0 0 4 5 1
8 19 14 26 38 41 29	1 2 1 3 5 5 4	0 4 6 4 2 5 0
37 48 3 23 10 5 49	5 6 0 3 1 0 6	1 5 2 1 2 4 6

.....

[9]

1 39 28 45 47 2 13	0 5 3 6 6 0 1	0 3 6 2 4 1 5
27 9 12 36 18 31 42	3 1 1 5 2 4 5	5 1 4 0 3 2 6
46 30 17 34 7 26 15	6 4 2 4 0 3 2	3 1 2 5 6 4 0
21 6 40 25 10 44 29	2 0 5 3 1 6 4	6 5 4 3 2 1 0
35 24 43 16 33 20 4	4 3 6 2 4 2 0	6 2 0 1 4 5 3
8 19 32 14 38 41 23	1 2 4 1 5 5 3	0 4 3 6 2 5 1
37 48 3 5 22 11 49	5 6 0 0 3 1 6	1 5 2 4 0 3 6

[10]

1 39 28 10 48 30 19	0 5 3 1 6 4 2	0 3 6 2 5 1 4
27 9 47 29 18 7 38	3 1 6 4 2 0 5	5 1 4 0 3 6 2
46 35 17 6 37 26 8	6 4 2 0 5 3 1	3 6 2 5 1 4 0
16 5 36 25 14 45 34	2 0 5 3 1 6 4	1 4 0 3 6 2 5
42 24 13 44 33 15 4	5 3 1 6 4 2 0	6 2 5 1 4 0 3
12 43 32 21 3 41 23	1 6 4 2 0 5 3	4 0 3 6 2 5 1
31 20 2 40 22 11 49	4 2 0 5 3 1 6	2 5 1 4 0 3 6

[11]

1 39 34 22 48 12 19	0 5 4 3 6 1 2	0 3 5 0 5 4 4
27 9 47 5 24 43 20	3 1 6 0 3 6 2	5 1 4 4 2 0 5
40 35 17 6 37 32 8	5 4 2 0 5 4 1	4 6 2 5 1 3 0
4 29 36 25 14 21 46	0 4 5 3 1 2 6	3 0 0 3 6 6 3

42 18 13 44 33 15 10	5 2 1 6 4 2 1	6 3 5 1 4 0 2
30 7 26 45 3 41 23	4 0 3 6 0 5 3	1 6 4 2 2 5 1
31 38 2 28 16 11 49	4 5 0 3 2 1 6	2 2 1 6 1 3 6
.....		

この2つについて「ひな形自己変換」を連続して試み、可逆性を調べる。
自分自身をひな形にして連続的に自己変換した結果、実に不思議なことが起こった。

2-1/	2-2/	2-3/
1 45 40 35 23 18 13	1 27 46 16 42 12 31	1 8 15 22 29 36 43
21 9 4 48 36 31 26	39 9 35 5 24 43 20	2 9 16 23 30 37 44
34 22 17 12 7 44 39	28 47 17 36 13 32 2	3 10 17 24 31 38 45
47 42 30 25 20 8 3	10 29 6 25 44 21 40	4 11 18 25 32 39 46
11 6 43 38 33 28 16	48 18 37 14 33 3 22	5 12 19 26 33 40 47
24 19 14 2 46 41 29	30 7 26 45 15 41 11	6 13 20 27 34 41 48
37 32 27 15 10 5 49	19 38 8 34 4 23 49	7 14 21 28 35 42 49
10-1/	10-2/	10-3/
1 39 28 10 48 30 19	1 21 34 47 11 24 37	1 8 15 22 29 36 43
27 9 47 29 18 7 38	45 9 22 42 6 19 32	2 9 16 23 30 37 44
46 35 17 6 37 26 8	40 4 17 30 43 14 27	3 10 17 24 31 38 45
16 5 36 25 14 45 34	35 48 12 25 38 2 15	4 11 18 25 32 39 46
42 24 13 44 33 15 4	23 36 7 20 33 46 10	5 12 19 26 33 40 47
12 43 32 21 3 41 23	18 31 44 8 28 41 5	6 13 20 27 34 41 48
31 20 2 40 22 11 49	13 26 39 3 16 29 49	7 14 21 28 35 42 49

先ず2つの候補の相方が現れ、2回目に基準方陣に戻ったのである（反転しているが、大目に見て許してほしい）。つまり、この2つの候補はお互いに「相補的」だったのである。
これをどう考えるべきか、鈴木教授に相談したところ、「数学的な変換ではこういう例は良く起こる。ノーマルだと思う」という御判断があった。
他には適当な候補も見当たらないことなので、この2つを正式採用することに決める。

2. 次は原初七方陣の構成だ。目的方陣の解集合が対称汎七方陣・汎七方陣ともに未知のまま、まだ確定しているわけではないので、「すり合わせ」は常識的な線でもとめる。

- (1) 補数の定和と対称配置は残す。汎七方陣の場合は、これを外す。
- (2) ひな形に合わせて行列の定和式 14本と、汎対角線の定和式を 14本立てる。
- (3) クロスサム等和式を立てる。計算実行速度を上げるために、今は使わざるを得ない。

$$\begin{aligned}
 n_1 + n_9 &= n_2 + n_8, & n_2 + n_{10} &= n_3 + n_9, & n_3 + n_{11} &= n_4 + n_{10}, & \dots\dots\dots, \\
 n_8 + n_{16} &= n_9 + n_{15}, & n_9 + n_{17} &= n_{10} + n_{16}, & n_{10} + n_{18} &= n_{11} + n_{17}, & \dots\dots\dots, \\
 n_{15} + n_{23} &= n_{16} + n_{22}, & n_{16} + n_{24} &= n_{17} + n_{23}, & n_{17} + n_{25} &= n_{18} + n_{24}, & \dots\dots\dots, \\
 n_{22} + n_{30} &= n_{23} + n_{29}, & n_{23} + n_{31} &= n_{24} + n_{30}, & n_{24} + n_{32} &= n_{25} + n_{31}, & \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

- (4) 不等式は、2つのひな形に敬意を表して、それぞれ次のように立てる。

$$[1] n_1 < n_{49}; n_1 < n_{13} < n_{37}, [2] n_1 < n_{49}; n_1 < n_{19} < n_{31}$$

原初七方陣の解は、対称汎七方陣の場合、576個得られた。

汎七方陣の場合、不等式を $n_1 < n_{49}; n_1 < n_7 < n_{43}$ と立てると、6350400個得られたが、目的方陣に敬意を表して [1] $n_1 < n_{49}; n_1 < n_{13} < n_{37}$, [2] $n_1 < n_{49}; n_1 < n_{19} < n_{31}$ と立て再計算すると、原初七方陣はそれぞれ 3175200個しか得られなかった。

3. 次は、変換規則を立てる。ひな形の数値を位置情報に読み変えればよい。

- 「元の方陣の n_1 の値を新方陣の n_1 に代入する。
- 元の方陣の n_{45} の値を新方陣の n_2 に代入する。
- 元の方陣の n_{40} の値を新方陣の n_3 に代入する。
- 元の方陣の n_{35} の値を新方陣の n_4 に代入する。
-
- 元の方陣の n_5 の値を新方陣の n_{48} に代入する。

元の方陣の n49の値を新方陣の n49に代入する。」というふうに。
ひな形をもう1つのものに変えた場合は、この変換規則だけを変える。

「元の方陣の n1の値を新方陣の n1に代入する。
元の方陣の n39の値を新方陣の n2に代入する。
元の方陣の n28の値を新方陣の n3に代入する。
元の方陣の n10の値を新方陣の n4に代入する。
.....

元の方陣の n11の値を新方陣の n48に代入する。
元の方陣の n49の値を新方陣の n49に代入する。」というふうに。

4. 原初七方陣の解 576個に次々とひな形変換を施す。対称汎七方陣の解が次々と作られる。
1つのひな形に 576個の解が出来る。それを七進法分解してみよう。
めでたく「完全オイラー型」の対称汎七方陣が 576個ずつ出来た。

原初七方陣							対称汎七方陣の解																				
古典的表記							ひな形-1による 1-1/ [七進法分解図：上位 下位]																				
1	2	3	4	5	6	7	1	45	40	35	23	18	13	0	5	3	1	6	4	2	0	3	6	2	5	1	4
8	9	10	11	12	13	14	21	9	4	48	36	31	26	3	1	6	4	2	0	5	5	1	4	0	3	6	2
15	16	17	18	19	20	21	34	22	17	12	7	44	39	6	4	2	0	5	3	1	3	6	2	5	1	4	0
22	23	24	25	26	27	28	47	42	30	25	20	8	3	2	0	5	3	1	6	4	1	4	0	3	6	2	5
29	30	31	32	33	34	35	11	6	43	38	33	28	16	5	3	1	6	4	2	0	6	2	5	1	4	0	3
36	37	38	39	40	41	42	24	19	14	2	46	41	29	1	6	4	2	0	5	3	4	0	3	6	2	5	1
43	44	45	46	47	48	49	37	32	27	15	10	5	49	4	2	0	5	3	1	6	2	5	1	4	0	3	6
原初方陣七進法表記							ひな形-2による 1-2/ [七進法分解図：上位 下位]																				
00	01	02	03	04	05	06	1	39	28	10	48	30	19	0	6	5	4	3	2	1	0	2	4	6	1	3	5
10	11	12	13	14	15	16	27	9	47	29	18	7	38	2	1	0	6	5	4	3	6	1	3	5	0	2	4
20	21	22	23	24	25	26	46	35	17	6	37	26	8	4	3	2	1	0	6	5	5	0	2	4	6	1	3
30	31	32	33	34	35	36	16	5	36	25	14	45	34	6	5	4	3	2	1	0	4	6	1	3	5	0	2
40	41	42	43	44	45	46	42	24	13	44	33	15	4	1	0	6	5	4	3	2	3	5	0	2	4	6	1
50	51	52	53	54	55	56	12	43	32	21	3	41	23	3	2	1	0	6	5	4	2	4	6	1	3	5	0
60	61	62	63	64	65	66	31	20	2	40	22	11	49	5	4	3	2	1	0	6	1	3	5	0	2	4	6

リスト（抜粋）を文末に添付する。七進法表記も一緒に。

これまでの手順は、前稿『原初七方陣の基礎的研究』で述べたものと寸分も変わらない。結果も同じである。ただ、七進法分解が加わっただけである。

何のことはない。小生は、最初からそれと知らずにせっせと完全オイラー方陣を作っていたわけだ。そして、「おかしいな。数が少ないな。前に計数した対称汎七方陣の数はこんなものではなかった。何十万もあった」と不審に思っていたのである。

まさか、こんな珍品・宝物を作っていたとは、つゆほども知らなかった。
混乱している場合ではなかった。

5. もっと数が多いはずの「汎七方陣」はどうだったのであろうか。これも、完全オイラー方陣だったのであろうか。

詳しい検証の手続きは、書かずに省略する。やり方が全く同じだから。

今回は、最後に七進法分解してチェックするだけである。

答は、イエス。

3175200×2個のリストを文末に添付する。七進法表記も一緒に。

6. 何故そうなるのかは、ひな形構成法を七進法のまま実施すれば説明ができる。

**** 対称汎七方陣のひな形構成法 ****

[スタート方陣]

00	01	02	03	04	05	06
10	11	12	13	14	15	16
20	21	22	23	24	25	26
30	31	32	33	34	35	36
40	41	42	43	44	45	46
50	51	52	53	54	55	56
60	61	62	63	64	65	66

図 1

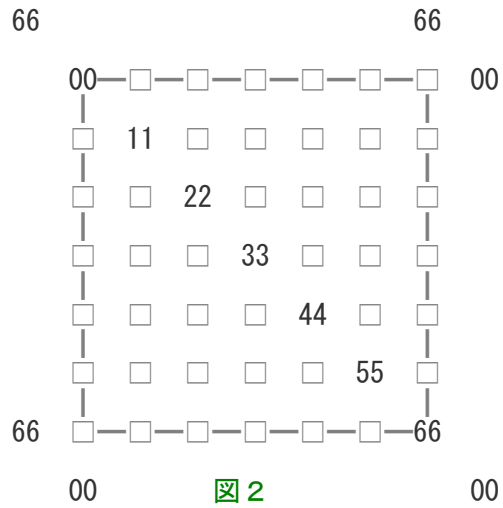


図 2

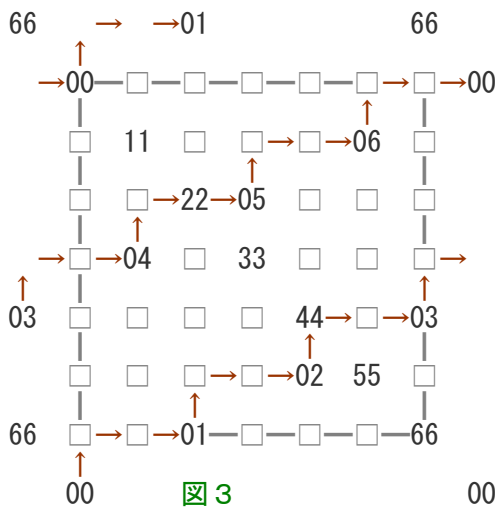


図 3

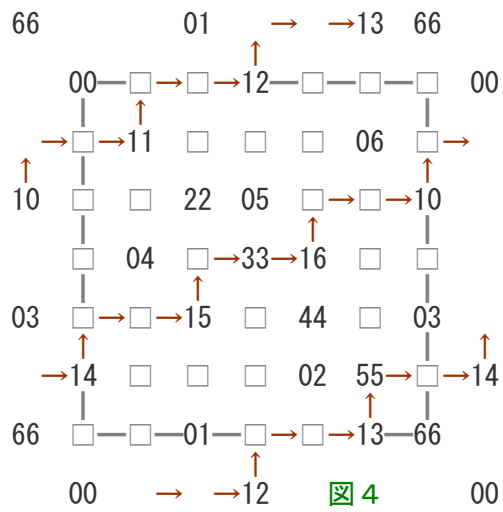


図 4

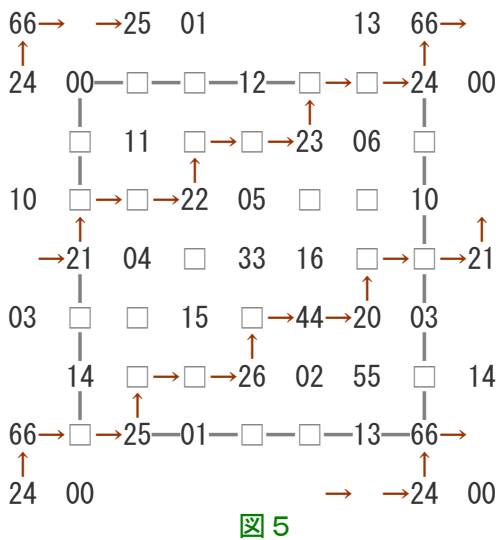


図 5

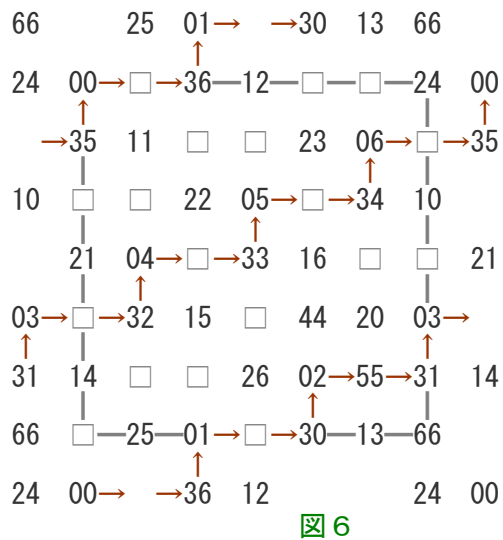
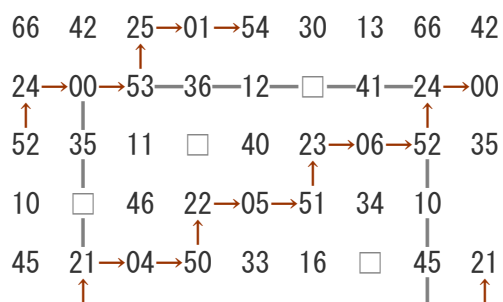
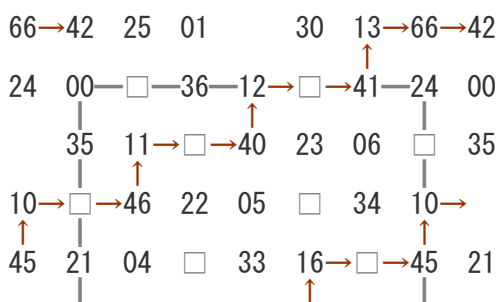
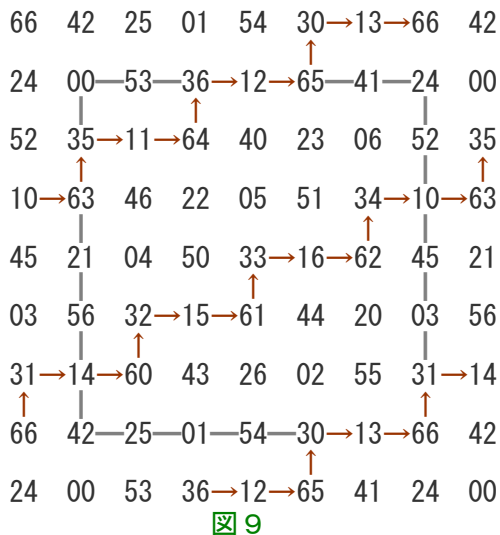
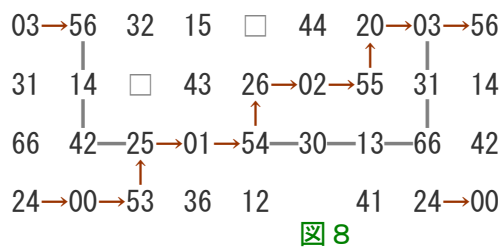
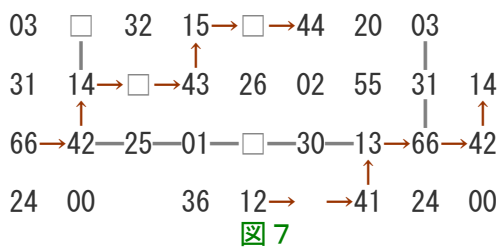


図 6





[出来上がり図]

00	53	36	12	65	41	24
35	11	64	40	23	06	52
63	46	22	05	51	34	10
21	04	50	33	16	62	45
56	32	15	61	44	20	03
14	60	43	26	02	55	31
42	25	01	54	30	13	66

完全オイラー型
対称汎七方陣 [七進法表記]

手順は、五方陣の時と全く同じである（上図）。ただ、「桂馬とび」が「上1右2へ」の移動に変わる。先ず主対角線の1本をコピーし、その7数を起点として、各々を含むスタート方陣の横の1行を次々と上1右2と動きながらコピーして行く。

出来上がったものを見れば、「完全オイラー型」になっている。

- (1) {00, 01, 02, 03, ..., 10, 11, 12, ..., 65, 66} の全数が一回ずつ使われて重複が無いことは、原初方陣の数を1個ずつコピーしたことで保証される。
- (2) 上位でも下位でも、どの行列をとっても {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} の全数が1回ずつ現れて、重複が無いか。
- (3) 全汎対角線でも同じことが言えるか。

を目視検査すればわかることである。

そして、これをひな形として原初方陣に変換を施せば、原初方陣と同じ数だけの目的方陣が出来る。つまり、「完全オイラー型」の汎魔方陣が出来るのである。

ひな形変換法は、完全オイラー型の汎魔方陣を作るのに、かくのごとく有効なのである。
576 × 2個、あるいは 3175200 × 2個もの多数を作れば、ある程度は満足が行く。

汎七方陣の全数を短時間で直接に作る方法が今はまだ無い以上、解の実例を出来るだけ多数入手したい時には、こんな方法でも使える、ということを示したかったのである。

使わない手は無いと思う。言わば「非常策」ではあるが、クロスサム等和式を用いるので、とにかく高速に解を出力してくれる。しかも、「完全オイラー方陣」が作れる。
構成解は、何らかの意味で「基本解」になっているものと思われる。

7. そうは言っても、人間はいつまでも満足しては居られない存在だ。次々と疑問が湧く。

- (1) 果たして、これで対称汎魔方陣の全てを尽くしているのだろうか。
- (2) 果たして、これで汎魔方陣の全てを尽くしているのだろうか。
- (3) 「完全オイラー型」は、他の次数にもあるのだろうか。

五次に関しては、対称汎魔方陣も汎魔方陣も、「鈴木方陣」しか無かった。それが全部完全オイラー型であることが、今回確かめられた。

しかし、七次でも同じだとは、そう簡単に行かない。反例が幾つも上がるからである。前に独自に一般的な対称汎七方陣を計数した時には、何万個も数えたところで中断した。

予想では、何十万個もありそうだ。とても、 576×2 個というようなスケールではない。

では、「完全オイラー型」は幾つあるのか。多数あるかも知れないし、少数かも知れない。全ては、良いひな形と原初方陣の正しい構成法を見つけられるかどうかにかかっている。ひな形探索に特化したプログラムを取り急ぎ組んで調べた結果では、無さそうな感触である。良いひな形候補は、我々が最初に見つけた2つ以外には見つからなかった。

汎七方陣の方にも、完全オイラー型でないものが沢山ありそうだ。

しかし、七次ともなると、何のタイプでもそう簡単には数え切れない。1個ずつの計数にめっぽう時間をくう。それが悩ましい。

ひな形変換法で、何の変哲もない汎魔方陣を作るのは、かえって難しい。数も時間も大変なのだ。ひな形にどういうものを選んだら良いのか、見当も付かない。原初方陣の計算さえめっぽう時間がかかる。途中で嫌になって、何度も計数を諦めた。特別の工夫が必要だ。

九次になると、ひな形そのものを見つけるのにさえ時間がかかり過ぎる。そこで、五次や七次の類推で、ひな形構成法を拡張して自ら作ろうとした。が、そう簡単には問屋が卸さなかった。どうやってもうまく作れないのである。九進法も役に立たない。

漠然とした感触では、高次魔方陣ほど完全オイラー型のひな形汎魔方陣を作りにくい。もしかしたら極めて少ないのかも知れない、という気がする。

また四次や八次や十六次では、二進法でなら作れても、肝心の四進法・八進法……で「完全オイラー型」は作り難い。

この辺の筋がどうにも読み切れない。アマチュア・ディレタントの限界を思い知らされる。ここは、数学の理論家にぜひ解析をお願いしたいと思う。何しろあの伝説の巨人、オイラー先生が2百年以上も昔に頭を悩まして我々に宿題として残した問題の1つなのだから。

しかし、1個1個方陣を作って調べるやり方では、スパコンを何千時間動かせば済むのか、見当も付かない。小生の愛機のような貧弱なパソコンでは、とても歯が立ちそうにない。

8. 終わりに

予定の紙数が既に尽きてしまった。今回は、これでおしまいにする。

最後に我が鈴木睦教授に満腔の感謝の念を表し申し上げたい。

教授は、終始「N進法による研究」を強調して、小生を刺激し続けてくださった。

小生は、近代的な数学的研究の手法に何となく苦手なものを感じて、ずっと何十年間も敬遠し続けて来たのだが、「食わず嫌いはいけません」、「大切なことが見えて来ません」と、教授は辛抱強く啓発し続けてくださった。

だから、今回のN進法の解説記事は、習いたてのホヤホヤのもので、まだ十分に習熟し切れていない恨みがあるが、取りあえず後の説明に必要なものだけを解説するという趣旨にした。ボロが出ていないことを祈るばかりである。

なるほど、N進法は強力だ。すぐに「完全オイラー方陣」の存在に気付いた。

「鈴木方陣」が、汎対角線までオイラー型というのは素晴らしかった。

教授には「オイラー方陣」の名前を教わった。しかし、汎対角線まで成り立つものに勢いで「完全」の名を前に付けた軽率のそしりは、小生のみが受けるべきものである。

魔方陣の研究上で、一番素晴らしい体験は、隠れた性質に気付いてそれを発見・分析・報告することである。皆が知っていて自分だけが知らなかったことの発見でも、自分独りで成し遂げる喜びは大きい。アマチュアてえ者は、終始そんな馬鹿げた喜びだけをエネルギーにして、趣味をやっている。

そして、鈴木教授は、そのことに最大の理解を示してくださる唯一の権威である。いつも変わらぬ温かい視線と御指導に、再度心から敬意と感謝の念を表し申し上げたい。

「ひな形変換法」も、アマチュアのドン・キホーテ的な願望から開発された。数学の専門家なら、きっとこんな凶々しい破天荒の方法には先ず躊躇し、疑問を持つに違いない。だが、我々アマチュアは、結果を出せば良いのである。とにかく魔方陣を作れば良いのだ。

本来なら結び付くとも思えない2つの集合を、強引に一対一対応で結び付ける。これが、

けっこう結び付くのである。その働きは、なかなかダイナミックだ。

「一対一対応」というのはいかにも原始的な手法だが、もしかしたら、魔方陣研究にとっては「根源的」な手法なのかも知れない。そもそも「数える」という人間の知的営み自体が、個体と自然数列との一対一対応である。同様に、様々な魔方陣を原初方陣と一対一対応させるのである。

習熟してみれば、けっこう使える。魔方陣の構造研究にも役立つではないか。

研究技法としては、まだ未熟・未知、危うい面もあるが、将来性はあるものと確信している。だから、今あえてPRをしておきたい。そう思って、この一文を表わしたのである。

(執筆・加筆: March 25, 2001; November 17, 2002; March 11, 2003;

補筆清書稿: October 31, 2005; on MacOSX by 摂田 寛二 (Kanji Setsuda)

清書稿: February 18, 2015 with MacOSX 10.10.2 and Xcode 6.1.1)

*** E-Mail Address: <jag12001@nifty.com>