

第6章 多次元超立体魔方陣の研究-I

第1節 四次元超立体三方陣の研究 撰田 寛二

0. 「魔方陣」は、大抵が平面上の $n \times n$ の正方配列に構成される ($n=3, 4, 5, 6, 7, \dots$)。まれに立体空間上の $n \times n \times n$ の立方配列にも構成される ($n=3, 4, 5, 6, \dots$)。この時、 n の値が何であれ、前者は二次元配列であり、後者は三次元配列になる。

では、次元数を1つ増やして四次元配列に「魔方陣」を構成することは可能であろうか。常識的には考え難いことだが、今回はこの大胆な疑問を少し追求してみたい。配列そのものの考察を深めるために、あえて感覚を超えた思考の実験を試みるのである。言わば、自分自身を鍛えるための「自己教育プログラム」の一環として。……

1. 「四次元」と言うからには、 $n \times n \times n \times n$ の超立方配列を用意する。その上に「魔方陣」を構成するのである。配列そのものは何次元のものでも出来るが、魔方陣は果たして出来るか。いったいどんな条件が求められるのだろうか。

n	n^2	n^3	n^4
3	9	27	81
4	16	64	256
5	25	125	625
6	36	216	……
7	49	343	
…	……	……	

立体ともなると、例えば $n=5$ の時には $1 \sim 125$ の自然数が必要になり、 $n=6$ の時には $1 \sim 216$ の自然数が必要になる。こんなに多いと、計算も楽ではなくなり、とても手に負えない感じだ。

パソコンに数えさせても、時間ばかり食う。

それが四次元である。最小の $n=3$ の時でも、すでに平面九方陣並みの $1 \sim 81$ の自然数を必要とする。

$n=4$ は、もう手に負えない。

従って、四次元超立体魔方陣の実験は、事実上最小の $n=3$ の時に限定される。すなわち、今回の我々の目標は、超立体三方陣の研究である。 $3 \times 3 \times 3 \times 3$ の配列に何とか「魔方陣」を作りたい。

そのためにどうすれば良いか。

これは全く新しい冒険的な試みなので、予備知識は何も無い。とにかく今までやって来たことを復習して、ヒントを得るしかない。

2. 先ず平面三方陣は、右図のような平面正方配列に構成した。汎対角線を見やすくするために例によって空間を最小限に拡張してある。

右図右のように三進法で数値を表わすと、その2次元数値は配列名そのものと同じになる。

配列 (0, 0) に数値 00(三)が入っている。

配列 (0, 1) に数値 01(三)が入っている。

配列 (0, 2) に数値 02(三)が入っている。

配列 (1, 0) に数値 10(三)が入っている。

……

配列 (2, 2) に数値 22(三)が入っている。

古典的表記と違って数値は常に1だけ小さい。そうすれば、数値と位置情報とを共用できる。

この基準配列は、すでに補数対称型方陣であった。また汎対角線の定和も成り立っていた。

10(+)の補数4ペアすべてが点対称の位置におかれている。三進法図で見ると、 $00+22=01+21=02+20=10+12(=11+11)=22(三)$ のように。

また主対角線2本 $00+11+22=02+11+20=110(三)=12(+)$ の他に

$00+12+21=01+12+20=01+10+22=02+10+21=110(三)=12(+)$ という汎対角線の定和も成り立っていた。

主対角線も含めて6本の汎対角線の内容は、すべて「オイラー型」になっていて、三進法の数値の上位にも下位にも同じ (0, 1, 2) が各1回ずつ現れていて重複が無い。従って、汎対角線の和の式は、いずれも $(0+1+2) \times 3 + (0+1+2) \times 1 = 9+3 = 12(+)=110(三)$ で同じなのである。

これらの特徴は、既に原初方陣の研究で明らかにされたことだ。

3. 次元を1つ増やした三次元立体三方陣を復習する。

立体三方陣は、 $3 \times 3 \times 3$ の立方体配列に $1 \sim 27$ の自然数を全個重複なく入れて「魔方陣」を構成

9	7	8	9	7	22	20	21	22	20
3	1	2	3	1	02	00	01	02	00
6	4	5	6	4	12	10	11	12	10
9	7	8	9	7	22	20	21	22	20
3	1	2	3	1	02	00	01	02	00

[古典的表記]

[三進法表記]

[基準配列]

する。このとき原初の基準配列に配列名と同じ数値を入れさえすれば、それはすでに補数対称性と汎対角線定和が具備された「原初方阵の第一基本形」になる。この方阵を三進法で表わせば、

$$000+222=001+221=002+220=010+212=011+211=012+210=020+202=021+201=022+200=100+122=101+121=102+120=110+112(=111+111)=222(\equiv)=26(+)$$

という 222(≡) の補数ペアが 13 組も、すべて点対称に配置されている。

また原初方阵では以下のような汎対角線の定和も成り立つのであった。36 本全ての汎対角線の内容は、三進法上位・中位・下位に (0, 1, 2) が各 1 回ずつ現れていて重複が無い。また各位の数字の組み合わせにも重複が無いので、3 数の和を求める式が 36 本とも、

$$(0+1+2) \times 3^2 + (0+1+2) \times 3^1 + (0+1+2) \times 3^0 = 3 \times (9+3+1) = 39(+)=1110(\equiv)$$

と同じなのである(つまり「オイラー型」)。

そのかわり原初方阵では全行全列全柱の定和は成り立たないが、汎対角線定和の性質を転用して成り立たせつつ「魔方陣」を構成すれば、対称立体三方陣の標準型が 4 個出来るのであった。

立体三方陣の基準配列 (拡張空間)

[古典的表記]

9				27			
7				25			
3	8			21	26		
1	9	10		19	27		
6	2	7	11	24	20	25	
4	3		13	12	22	21	
9	5	1	14	27	23	19	
7	6		16	15	25	24	
3	8	4	17	21	26	22	
1	9		18	19	27		
	2	7			20	25	
	3				21		
	1				19		

[三進法表記]

022				222			
020				220			
021				221			
002	022			202	222		
000	020	100		200	220		
001		101		201			
012	002		102	212	202		
010	000	110		210	200		
011		111		211			
022	012		112	222	212		
020	010	120		220	210		
021		121		221			
002	022		122	202	222		
000	020			200	220		
001				201			
002				202			
000				200			

汎対角線定和の式 :

000+111+222=1110(≡) (PD1)	011+102+220=1110(≡) (PD19)
000+112+221=1110(≡) (PD2)	011+100+222=1110(≡) (PD20)
000+121+212=1110(≡) (PD3)	012+120+201=1110(≡) (PD21)
000+122+211=1110(≡) (PD4)	012+121+200=1110(≡) (PD22)
001+112+220=1110(≡) (PD5)	012+100+221=1110(≡) (PD23)
001+110+222=1110(≡) (PD6)	012+101+220=1110(≡) (PD24)
001+122+210=1110(≡) (PD7)	020+101+212=1110(≡) (PD25)
001+120+212=1110(≡) (PD8)	020+102+211=1110(≡) (PD26)
002+110+221=1110(≡) (PD9)	020+111+202=1110(≡) (PD27)
002+111+220=1110(≡) (PD10)	020+112+201=1110(≡) (PD28)
002+120+211=1110(≡) (PD11)	021+102+210=1110(≡) (PD29)
002+121+210=1110(≡) (PD12)	021+100+212=1110(≡) (PD30)
010+121+202=1110(≡) (PD13)	021+112+200=1110(≡) (PD31)
010+122+201=1110(≡) (PD14)	021+110+202=1110(≡) (PD32)
010+101+222=1110(≡) (PD15)	022+100+211=1110(≡) (PD33)
010+102+221=1110(≡) (PD16)	022+101+210=1110(≡) (PD34)
011+122+200=1110(≡) (PD17)	022+110+201=1110(≡) (PD35)
011+120+202=1110(≡) (PD18)	022+111+200=1110(≡) (PD36)

4. いよいよ四次元世界の研究に挑む。まずは四次元の超立方体配列として 3×3×3×3 の Array [(i0, i1, i2, i3) = (0, 1, 2)] を用意する。

この配列は、簡単に頭(=コンピュータ)の中に作れるが、いったいどのような方阵空間を

形成するのであろうか。

まだ誰も、一見して皆にわかるような「見取り図」を描けた人は居ない。元々「空間」は種類を問わず最大三次元であり、普通四次元と言うと、三次元の立体空間に時間を残りの一次元として加えた「時空」を言う場合が多い。

もちろん我々も、4つの次元の内の1つを「時間」に割り当てることができる。

例えば、 $i_0 = (\text{「昨日」, 「今日」, 「明日」})$ としてもよい。

だが、無理してそうしなくてもよい。例えば、3つの人名に割り当てても良いし、ただ単に「整理番号 1, 2, 3」としても良い。

我々は物理学をやるのではないのである。ただ構造的な数値データを扱うだけだから、自分にわかれば何を指名しても良いのである。

残り3つは「左右 0, 1, 2 ; 上下 0, 1, 2 ; 前後 0, 1, 2」という様に空間指標に割り当てる。

*** 原点と4本の座標軸 ***

W軸：4番目の座標軸

四次元を端的に表す「原点」と「4軸」については、左図のように考えよう。



X, Y, Z軸については、既におなじみだが、4番目のW軸が考え難い。四次元空間では、このW軸も他の3軸に直交している。「超立体」と言われる所以である。

他に図が何も無いのでは手に負えないから、幾つかの「低次元分解図」を用意する。例えば、次のような $3 \times 3 \times 3 \times 3$ の分解図を考えよう。

[低次元分解図-1]

1----10----19	28----37----46	55----64----73
2 11 20	29 38 47	56 65 74
4 3-13-12-22-21	31 30-40-39-49-48	58 57-67-66-76-75
5 14 23	32 41 50	59 68 77
7-- 6-16-15-25 24	34--33-43--42-52 51	61--60-70--69-79 78
8 17 26	35 44 53	62 71 80
9----18----27	36----45----54	63----72----81
[きのう]	[きょう]	[あした]

あるいは、

[低次元分解図-2]

1---- 2---- 3	4---- 5---- 6	7---- 8---- 9
10 11 12	13 14 15	16 17 18
28 19-29-20-30-21	31 22-32-23-33-24	34 25-35-26-36-27
37 38 39	40 41 42	43 44 45
55--46-56--47-57 48	58--49-59--50-60 51	61--52-62--53-63 54
64 65 66	67 68 69	70 71 72
73----74----75	76----77----78	79----80----81
整理番号 [No. 0]	[No. 1]	[No. 2]

これら3つの立体三方陣を頭の中で合成して、無理にも1つの「超立体三方陣」と考える

のである。対応している所をいつでも関連させて一緒に動かすのである。

今ここでは、配列変数名に一次元の通し番号を採用してある。

以降しばらくは、この分解図で分析を進めよう。

5. このような超立体三方陣に一体どんな条件を付けたならば、それが「魔方陣」と認められるのであろうか。

(1) 全行全列全柱の定和をどうするか。

3つに分解した小立体三方陣の各々で、左右・上下・前後の三方向の全行全列全柱定和を実現する。これならば、文句はあるまい。定和式は、全部で $27 \times 3 = 81$ 本要る。

(2) 補数の定和と対称配置をどうするか。1~81の自然数を用いる限り、

$$1 + 81 = 2 + 80 = 3 + 79 = 4 + 78 = 5 + 77 = \dots = 40 + 42 (= 41 + 41) = 82$$

というペアリングはいつでも可能だ。それを追跡すると、立体三方陣を3つ横につなげた $3 \times 3 \times 9$ の直方体を考えれば、無理なく点对称の位置に置かれる。中心点は、 $n_{41} = 41$ とする。

補数定和と対称配置を条件に加えて良さそうだ。然して我々は「対称魔方陣」を目指す。

(3) これだけでは、わざわざ四次元にした意味が無い。如何にも「四次元」らしい条件をさらに付け加えなければならない。それも式で表わして27本。

上の3つの立体三方陣は、本来は1つのものを低次元分解してたまたま3つにしたものである。

例えば、分解図-1の (n_1, n_{28}, n_{55}) の3点は本来1つのもので、あえて言うならば「今日の n_1 」、「明日の n_1 」、「明後日の n_1 」のことなのである。

だから、いっそのこと $n_1 = n_{28} = n_{55}$ としたいくらいだが、それでは「魔方陣」にはならない(1~81の自然数を全個重複なく使うという約束は変えられないから)。

そこで $n_1 + n_{28} + n_{55} = K (= 123)$ としては、どうだろうか。以下同様にして、

$$n_2 + n_{29} + n_{56} = n_3 + n_{30} + n_{57} = n_4 + n_{31} + n_{58} = n_5 + n_{32} + n_{59} = 123$$

$$n_6 + n_{33} + n_{60} = n_7 + n_{34} + n_{61} = n_8 + n_{35} + n_{62} = \dots$$

$$n_{24} + n_{51} + n_{78} = n_{25} + n_{52} + n_{79} = n_{26} + n_{53} + n_{80} = n_{27} + n_{54} + n_{81} = 123$$

角度を変えて表した分解図-2では、いずれも行列として実現し得る。

定和式は、これだけで27本立つ。今後はこれを「対応項の定和式」と呼ぼう。

6. 全行全列全柱と全対応項の定和式が $81 + 27 = 108$ 本も必要になるが、果たしてそんなに成り立つものか。余計な心配が増える。

81個も自然数があるのである。何とかなるのではあるまいか。

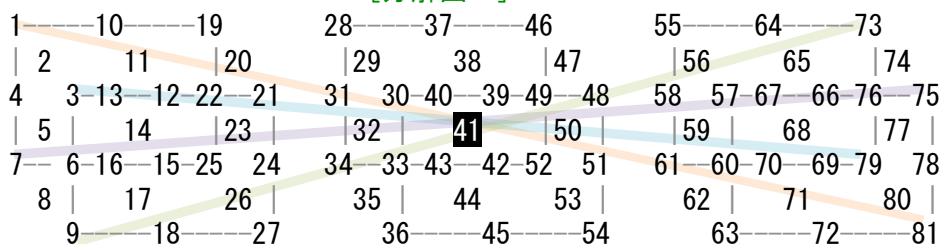
ところで、三次元の立体三方陣では、全行全列全柱の定和は、原初方陣の汎対角線定和がまかなっていた。うまく転用していたのであった。四次元でも、そうだろうか。

ここで汎対角線定和の問題を考える。四次元の超立体原初三方陣にも「汎対角線」は存在するか。我々が空間的・視覚的に誤りなくそれを追跡するには、どうしたら良いか。

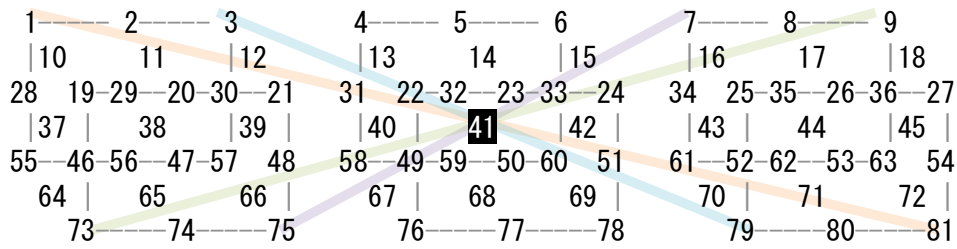
先ず「主対角線」から始める。対称配置の補数から $n_1 + n_{41} + n_{81} = 123$ は簡単に見つかる。この3数 (n_1, n_{41}, n_{81}) は、第1方陣、第2方陣、第3方陣を貫いて、斜めに走っている。同様に $n_3 + n_{41} + n_{79} = 123$ も見つかる。

同様に $n_7 + n_{41} + n_{75} = 123$; $n_9 + n_{41} + n_{73} = 123$

[分解図-1]



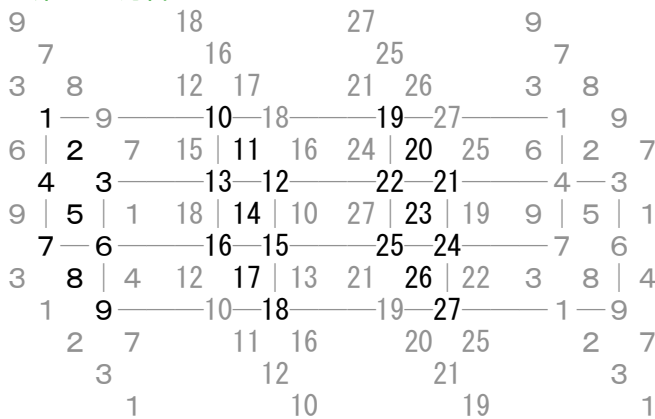
[分解図-2]



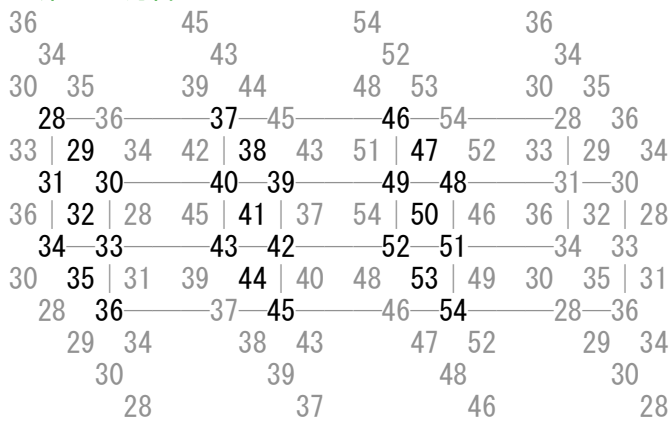
汎対角線は、今まではいつでも主対角線に平行に並んで走っていた。今回も平行の位置を探すことにしよう。

* 四次元超立体原初三方阵拡張空間図 *

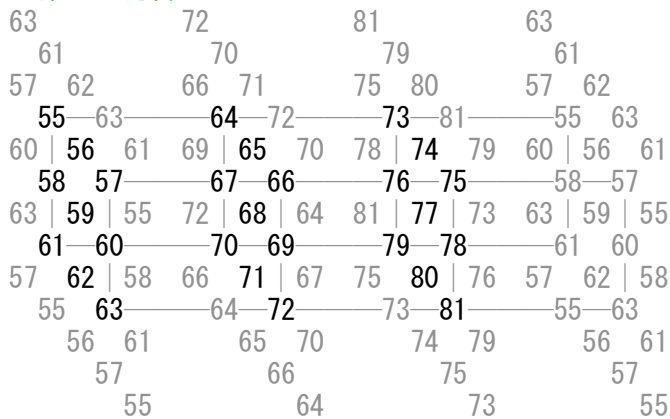
* 第1小方阵



* 第2小方阵



* 第3小方阵



その際、汎対角線は、第1小方阵・第2小方阵・第3小方阵を必ず1回ずつ貫いていなく

ればならない。しかも、斜めに直線的に3数を結んでいなければならない。

しかし、ご存知の通り汎対角線はすぐに折れ曲がる（方陣空間を飛び出る時は、反対側に回るから。そのために「破対角線」と言う人さえいる）。わかりにくいので、直線として見やすくするために、ここで上図のように方陣空間を拡張する。大掛かりではあるが、この際必要な準備はしておかなければならない。

こうすると、各々の汎対角線が直線上に並ぶ。方陣空間としては、 $3 \times 3 \times 3$ の立方体三方陣の同じポジションが、第1・2・3方陣で名前が変わるだけだと理解できる。別個に数えられたりはするけれども、対応する3点の相対的な位置が同じだという感覚をつかんでほしい。それに気付くと、汎対角線を探すコツがわかる。複雑な作業が全然苦にならなくなるってものだ。

では、主対角線に平行して走る $n_2 + n_{42} + n_{79} = 123$ は、汎対角線だろうか。

$n_3 + n_{40} + n_{80} = 123$ はどうだろうか。 $n_1 + n_{42} + n_{80} = 123$ は？

変数名と同じ数値が入る原初方陣で数値検査をして、 $2 + 42 + 79 = 123$; $3 + 40 + 80 = 123$; $1 + 42 + 80 = 123$ が成り立つから、みな汎対角線として合格だ。

.....

かくして逐一調べてゆくと、汎対角線全てを視覚的に追跡できることがわかる。108本全部が、各々定和公式を満たす。

今は、その代表として n_1 を通る8本を例としてあげておく。

$$\begin{aligned} n_1 + n_{41} + n_{81} &= 123, & n_1 + n_{42} + n_{80} &= 123, & n_1 + n_{44} + n_{78} &= 123, \\ n_1 + n_{45} + n_{77} &= 123, & n_1 + n_{50} + n_{72} &= 123, & n_1 + n_{51} + n_{71} &= 123, \\ n_1 + n_{54} + n_{68} &= 123, & n_1 + n_{53} + n_{69} &= 123 \dots \dots \text{(PD 1群)} \end{aligned}$$

補数対称型の目的方陣では、この全汎対角線の定和は残らない。全汎対角線の定和が全行全列全柱全対応項の定和に転用されるからである。

7. いつまでも原初方陣を論じていないで、目的方陣の具体的な構成にかかろう。3つに分解した小立方体三方陣を横に並べた配列を考えて、そこで式を記述することにする。

- (1) 全行全列全柱の定和を実現する。式は、81本。
- (2) 3つの立体三方陣の対応する3項を関連づけて定和式27本を立てる。
- (3) 82の補数40ペアを作り、それらを全て点对称の位置に置く。 $n_{41} = 41$ とする。

$$\begin{aligned} n_1 + n_{81} &= 82, & n_2 + n_{80} &= 82, & n_3 + n_{79} &= 82, & n_4 + n_{78} &= 82, & n_5 + n_{77} &= 82, \\ n_6 + n_{76} &= 82, & n_7 + n_{75} &= 82, & \dots \dots \dots & & n_{39} + n_{43} &= 82, & n_{40} + n_{42} &= 82 \end{aligned}$$

問題は不等式だ。立てる必要には迫られるが、どう立てたら良いか、まだ最良の形が見つからない。どこまでを異形として別個に数え、どれとどれを同一形として1個に数えるべきか、まだ見きわめがつかない。数学的対称性をどう考えるかもある。何せ初めてのことなので、とかく迷わされる。.....

では、目指す対称型の四次元超立体三方陣は作れたのか。..... それで作れたのである。

解は幾つあったか。 $n_1 = 1$ タイプの標準形と思われるものが五十個以上見つかった。不等式をうんと緩めて反転形・回転形まで含めれば、五百個近くも見つかる。

中でも特別に見事な解がある。例を1つ次にお見せしよう。これから「ひな形」として採用する予定の候補である。

* * 四次元超立体対称型三方陣の解(分解図 3 × 27) * *									
1/S1			/S2				/S3		
1	54	68	72	5	46	50	64	9	
78	11	34	29	79	15	16	33	74	
80	44	13	58	30	21	31	22	75	39
	37	63	23	27	41	55	59	19	45
42	6	56	47	25	70	20	65	43	7
	8	49	66	67	3	53	48	71	4
	73	18	32	36	77	10	14	28	81

- (1) 先ず3つの小立方体三方陣の各々において、全行全列全柱の定和が成り立つことを確かめてほしい。
- (2) $n41$ を中心点として対称の位置にある任意の2数の和が82になることを確かめてほしい。「補数定和」と「対称配置」が実現している。
- (3) 3つの小立方体三方陣の対応する各項の和が、
 $n1 + n28 + n55 = 1 + 72 + 50 = 123$; $n2 + n29 + n56 = 78 + 29 + 16 = 123$;
 $n3 + n30 + n57 = 44 + 22 + 57 = 123$; $n4 + n31 + n58 = 80 + 31 + 12 = 123$;;
 $n27 + n54 + n81 = 32 + 10 + 81 = 123$ となることを確かめてほしい。

8. これだけで、本当に「四次元魔方陣」なのかどうか。心もとない。数学的対称性をもう少し調査・吟味しなければならない。原初方陣とひな形変換法を用いて。

原初方陣を意図的に反転・回転させる。ひな形変換して、その反応を見るのである。目的方陣でも同じように反転・回転するだろうか。その時四次元座標軸はどう現れるか。

実験結果を下に示そう。上段3つ(/Pn)は「四次元超立体原初三方陣」、下段3つ(/Sn)が目的方陣である(いずれも分解図)。目的方陣の $n1$ の周辺を良く見てほしい。 $n1$ を原点と見立てると、そこには4つの次元の座標軸が集中する。

$1 + 78 + 44 = 123$ が、前後方向の軸上にある。

$1 + 80 + 42 = 123$ が、上下方向の軸上にある。

$1 + 54 + 68 = 123$ が、左右方向の軸上にある。

$1 + 72 + 50 = 123$ が、4番目の軸上にある。

ここまでは、設計通りにことが運んでいるが、

はたして $1 + 72 + 50 = 123$ が他の軸にも来れるで

あろうか。他の式は、4番目の軸上にも来れるであろうか。



次のリストで、その辺を詳しく確かめてほしい。

* 四次元超立体原初三方陣とひな形変換した対称型超立体三方陣 (分解図) *

<p>1/P1</p> <table border="0"> <tr><td>1</td><td>10</td><td>19</td></tr> <tr><td>2</td><td>11</td><td>20</td></tr> <tr><td>4 3</td><td>13 12</td><td>22 21</td></tr> <tr><td>5</td><td>14</td><td>23</td></tr> <tr><td>7 6</td><td>16 15</td><td>25 24</td></tr> <tr><td>8</td><td>17</td><td>26</td></tr> <tr><td>9</td><td>18</td><td>27</td></tr> </table>	1	10	19	2	11	20	4 3	13 12	22 21	5	14	23	7 6	16 15	25 24	8	17	26	9	18	27	<p>/P2</p> <table border="0"> <tr><td>28</td><td>37</td><td>46</td></tr> <tr><td>29</td><td>38</td><td>47</td></tr> <tr><td>31 30</td><td>40 39</td><td>49 48</td></tr> <tr><td>32</td><td>41</td><td>50</td></tr> <tr><td>34 33</td><td>43 42</td><td>52 51</td></tr> <tr><td>35</td><td>44</td><td>53</td></tr> <tr><td>36</td><td>45</td><td>54</td></tr> </table>	28	37	46	29	38	47	31 30	40 39	49 48	32	41	50	34 33	43 42	52 51	35	44	53	36	45	54	<p>/P3</p> <table border="0"> <tr><td>55</td><td>64</td><td>73</td></tr> <tr><td>56</td><td>65</td><td>74</td></tr> <tr><td>58 57</td><td>67 66</td><td>76 75</td></tr> <tr><td>59</td><td>68</td><td>77</td></tr> <tr><td>61 60</td><td>70 69</td><td>79 78</td></tr> <tr><td>62</td><td>71</td><td>80</td></tr> <tr><td>63</td><td>72</td><td>81</td></tr> </table>	55	64	73	56	65	74	58 57	67 66	76 75	59	68	77	61 60	70 69	79 78	62	71	80	63	72	81
1	10	19																																																															
2	11	20																																																															
4 3	13 12	22 21																																																															
5	14	23																																																															
7 6	16 15	25 24																																																															
8	17	26																																																															
9	18	27																																																															
28	37	46																																																															
29	38	47																																																															
31 30	40 39	49 48																																																															
32	41	50																																																															
34 33	43 42	52 51																																																															
35	44	53																																																															
36	45	54																																																															
55	64	73																																																															
56	65	74																																																															
58 57	67 66	76 75																																																															
59	68	77																																																															
61 60	70 69	79 78																																																															
62	71	80																																																															
63	72	81																																																															
<p>/S1</p> <table border="0"> <tr><td>1</td><td>54</td><td>68</td></tr> <tr><td>78</td><td>11</td><td>34</td></tr> <tr><td>80 44</td><td>13 58</td><td>30 21</td></tr> <tr><td>37</td><td>63</td><td>23</td></tr> <tr><td>42 6</td><td>56 47</td><td>25 70</td></tr> <tr><td>8</td><td>49</td><td>66</td></tr> <tr><td>73</td><td>18</td><td>32</td></tr> </table>	1	54	68	78	11	34	80 44	13 58	30 21	37	63	23	42 6	56 47	25 70	8	49	66	73	18	32	<p>/S2</p> <table border="0"> <tr><td>72</td><td>5</td><td>46</td></tr> <tr><td>29</td><td>79</td><td>15</td></tr> <tr><td>31 22</td><td>75 39</td><td>17 62</td></tr> <tr><td>27</td><td>41</td><td>55</td></tr> <tr><td>20 65</td><td>43 7</td><td>60 51</td></tr> <tr><td>67</td><td>3</td><td>53</td></tr> <tr><td>36</td><td>77</td><td>10</td></tr> </table>	72	5	46	29	79	15	31 22	75 39	17 62	27	41	55	20 65	43 7	60 51	67	3	53	36	77	10	<p>/S3</p> <table border="0"> <tr><td>50</td><td>64</td><td>9</td></tr> <tr><td>16</td><td>33</td><td>74</td></tr> <tr><td>12 57</td><td>35 26</td><td>76 40</td></tr> <tr><td>59</td><td>19</td><td>45</td></tr> <tr><td>61 52</td><td>24 69</td><td>38 2</td></tr> <tr><td>48</td><td>71</td><td>4</td></tr> <tr><td>14</td><td>28</td><td>81</td></tr> </table>	50	64	9	16	33	74	12 57	35 26	76 40	59	19	45	61 52	24 69	38 2	48	71	4	14	28	81
1	54	68																																																															
78	11	34																																																															
80 44	13 58	30 21																																																															
37	63	23																																																															
42 6	56 47	25 70																																																															
8	49	66																																																															
73	18	32																																																															
72	5	46																																																															
29	79	15																																																															
31 22	75 39	17 62																																																															
27	41	55																																																															
20 65	43 7	60 51																																																															
67	3	53																																																															
36	77	10																																																															
50	64	9																																																															
16	33	74																																																															
12 57	35 26	76 40																																																															
59	19	45																																																															
61 52	24 69	38 2																																																															
48	71	4																																																															
14	28	81																																																															
<p>2/P1</p> <table border="0"> <tr><td>1</td><td>28</td><td>55</td></tr> <tr><td>2</td><td>29</td><td>56</td></tr> <tr><td>4 3</td><td>31 30</td><td>58 57</td></tr> <tr><td>5</td><td>32</td><td>59</td></tr> <tr><td>7 6</td><td>34 33</td><td>61 60</td></tr> <tr><td>8</td><td>35</td><td>62</td></tr> <tr><td>9</td><td>36</td><td>63</td></tr> </table>	1	28	55	2	29	56	4 3	31 30	58 57	5	32	59	7 6	34 33	61 60	8	35	62	9	36	63	<p>/P2</p> <table border="0"> <tr><td>10</td><td>37</td><td>64</td></tr> <tr><td>11</td><td>38</td><td>65</td></tr> <tr><td>13 12</td><td>40 39</td><td>67 66</td></tr> <tr><td>14</td><td>41</td><td>68</td></tr> <tr><td>16 15</td><td>43 42</td><td>70 69</td></tr> <tr><td>17</td><td>44</td><td>71</td></tr> <tr><td>18</td><td>45</td><td>72</td></tr> </table>	10	37	64	11	38	65	13 12	40 39	67 66	14	41	68	16 15	43 42	70 69	17	44	71	18	45	72	<p>/P3</p> <table border="0"> <tr><td>19</td><td>46</td><td>73</td></tr> <tr><td>20</td><td>47</td><td>74</td></tr> <tr><td>22 21</td><td>49 48</td><td>76 75</td></tr> <tr><td>23</td><td>50</td><td>77</td></tr> <tr><td>25 24</td><td>52 51</td><td>79 78</td></tr> <tr><td>26</td><td>53</td><td>80</td></tr> <tr><td>27</td><td>54</td><td>81</td></tr> </table>	19	46	73	20	47	74	22 21	49 48	76 75	23	50	77	25 24	52 51	79 78	26	53	80	27	54	81
1	28	55																																																															
2	29	56																																																															
4 3	31 30	58 57																																																															
5	32	59																																																															
7 6	34 33	61 60																																																															
8	35	62																																																															
9	36	63																																																															
10	37	64																																																															
11	38	65																																																															
13 12	40 39	67 66																																																															
14	41	68																																																															
16 15	43 42	70 69																																																															
17	44	71																																																															
18	45	72																																																															
19	46	73																																																															
20	47	74																																																															
22 21	49 48	76 75																																																															
23	50	77																																																															
25 24	52 51	79 78																																																															
26	53	80																																																															
27	54	81																																																															

/S1		/S2		/S3													
1	72	50	54	5	64	68	46	9									
78	29	16	11	79	33	34	15	74									
80	44	31	22	12	57	13	58	75	39	35	26	30	21	17	62	76	40
37	27	59	63	41	19	23	55	45									
42	6	20	65	61	52	56	47	43	7	24	69	25	70	60	51	38	2
8	67	48	49	3	71	66	53	4									
73	36	14	18	77	28	32	10	81									

3/P1		/P2		/P3													
1	4	7	28	31	34	55	58	61									
2	5	8	29	32	35	56	59	62									
10	3	13	6	16	9	37	30	40	33	43	36	64	57	67	60	70	63
11	14	17	38	41	44	65	68	71									
19	12	22	15	25	18	46	39	49	42	52	45	73	66	76	69	79	72
20	23	26	47	50	53	74	77	80									
21	24	27	48	51	54	75	78	81									

/S1		/S2		/S3													
1	54	68	78	11	34	44	58	21									
72	5	46	29	79	15	22	39	62									
80	50	13	64	30	9	37	16	63	33	23	74	6	57	47	26	70	40
31	75	17	27	41	55	65	7	51									
42	12	56	35	25	76	8	59	49	19	66	45	73	52	18	69	32	2
20	43	60	67	3	53	36	77	10									
61	24	38	48	71	4	14	28	81									

9/P1		/P2		/P3													
1	2	3	28	29	30	55	56	57									
4	5	6	31	32	33	58	59	60									
10	7	11	8	12	9	37	34	38	35	39	36	64	61	65	62	66	63
13	14	15	40	41	42	67	68	69									
19	16	20	17	21	18	46	43	47	44	48	45	73	70	74	71	75	72
22	23	24	49	50	51	76	77	78									
25	26	27	52	53	54	79	80	81									

/S1		/S2		/S3													
1	54	68	80	13	30	42	56	25									
72	5	46	31	75	17	20	43	60									
78	50	11	64	34	9	37	12	63	35	23	76	8	61	49	24	66	38
29	79	15	27	41	55	67	3	53									
44	16	58	33	21	74	6	59	47	19	70	45	73	48	18	71	32	4
22	39	62	65	7	51	36	77	10									
57	26	40	52	69	2	14	28	81									

リストの他の解を見ると、どの解も内容的には同一解なのに、上の4本の式が4つの軸上でうまく入れ替わっている。それに応じて他の数字も入れ替わっている。

四次元を表現する4つの座標軸は、どうやらどれも平等の資格を与えられているようだ。お互いに配置が交換可能であり、どこにも自由に現れていることで、四次元的対称性を実現していることが見て取れるように思える。

これなら、「四次元超立方体魔方陣」と、どうやら認定して良いようだ。

9. 直接に図示できない四次元魔方陣は、複数の低次元分解図で図示するしか無い。今までは専ら3×27の分解図を用いてきたが、他のやり方は無いだろうか。例えば、3×3×9というふうには分解できないか。

もう一つの【基準配列】

1	2	3	4	5	6	7	8	9			
10	11	12	13	14	15	16	17	18			
28	19-29	20-30-21	31	22-32	23-33-24	34	25-35	26-36-27			
37	38	39	40	41	42	43	44	45			
55	46-56	47-57	48	58	49-59	50-60	51	61	52-62	53-63	54
64	65	66	67	68	69	70	71	72			
73	74	75	76	77	78	79	80	81			
第1小方陣			第2小方陣			第3小方陣					

* (3×3)×9 分解図 *
【古典的表記】

	1	2	3						
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24	25	26	27
	28	29	30	31	32	33	34	35	36
2	37	38	39	40	41	42	43	44	45
	46	47	48	49	50	51	52	53	54
	55	56	57	58	59	60	61	62	63
3	64	65	66	67	68	69	70	71	72
	73	74	75	76	77	78	79	80	81

上の三次元分解図を下の二次元分解図に対応させてみよう。下は、9×9の基準配列を9つの三方陣を含むブロック図に描き分けただけのものだ。

(1, 1)ブロックには、第1小方陣の上面がおさまっている。(1, 2)には第2小方陣の上面、(1, 3)には第3小方陣の上面がおさまっている。

(2, 1)ブロックには、第1小方陣の上下方向奥面のデータが入っている。……(3, 3)には第3小方陣の上下方向の底面が入っている。

こういう低次元分解図も可能なのである。

9ブロックのどれでも全行全列定和が成り立つ。元の小立体三方陣の各面の構成条件がそうだから。

では、元の立体三方陣の前後方向奥面の全列定和はどこに来たか。n1+n28+n55=123 は、縦のブロックごとに対応する3数を見ればよい。

n2+n29+n56=123 も n3+n30+n57=123 も
n4+n31+n58=123 も n5+n32+n59=123 も

…… n9+n36+n63=123 も 縦方向のブロックをお互いに対応付けている。

では、4番目の次元にあった対応項の定和はどこに来たか。n1+n4+n7=123 や

n2+n5+n8=123; n3+n6+n9=123; n10+n13+n16=123; ……;

n75+n78+n81=123 は、そのまま横方向にブロックを対応付けていることがわかる。

では、元の四次元系で成り立っていた補数の定和と対称配置は、どこに来たか。

n1+n81=82; n2+n80=82; n3+n79=82; n4+n78=82; n5+n77=82; ……; n10+n72=82; ……; n22+n60=82; ……; n39+n43=82; n40+n42=82 は、上図を一つの平面九方陣と見立てれば、n41を中心点とした点対称の位置に既に置かれているではないか。

これは、何を意味するか。上図を平面九方陣図と見立てれば、元の四次元方陣の構成条件から、

n1+n2+n3+n4+n5+n6+n7+n8+n9 (横の1行)

= (n1+n2+n3) + (n4+n5+n6) + (n7+n8+n9) = 123+123+123=369

n1+n10+n19+n28+n37+n46+n55+n64+n73 (縦の1行)

= (n1+n10+n19) + (n28+n37+n46) + (n55+n64+n73) = 123+123+123=369

n1+n5+n9+n37+n41+n45+n73+n77+n81 (主対角線)

= (n1+n81) + (n5+n77) + (n9+n73) + (n37+n45) + n41 = 82+82+82+82+41=369

などが全部成り立つから、この平面九方陣は立派な補数対称型魔方陣になっているのだ。

つまり、四次元超立方体三方陣は、3×3×9の分解図では、必ず補数対称九方陣になる。

このことを具体的な解で調べてみよう。

まず四次元の座標軸が今度はどう表現されるかを、先ほどの立体図を3×3×9に次元変換して見よう(下図)。

いささかフラットな印象にはなるが、見事なくらいに座標軸の扱いが公平なことが見て取れる。

そして、面白いことに、元の四次元系ではこれらの4つは本来同一解と見なすべきであるが、この変換結果をあくまで二次元対称九方陣として見ると、お互いに良く似てはいるが、同一解とはとても見なし難い。誰が数えても、多分4つを一緒にはいしないであろう。

[1]

1 78 44 72 29 22 50 16 57
 80 37 6 31 27 65 12 59 52
 42 8 73 20 67 36 61 48 14

54 11 58 5 79 39 64 33 26
 13 63 47 75 41 7 35 19 69
 56 49 18 43 3 77 24 71 28

68 34 21 46 15 62 9 74 40
 30 23 70 17 55 51 76 45 2
 25 66 32 60 53 10 38 4 81

[2]

1 78 44 54 11 58 68 34 21
 80 37 6 13 63 47 30 23 70
 42 8 73 56 49 18 25 66 32

72 29 22 5 79 39 46 15 62
 31 27 65 75 41 7 17 55 51
 20 67 36 43 3 77 60 53 10

50 16 57 64 33 26 9 74 40
 12 59 52 35 19 69 76 45 2
 61 48 14 24 71 28 38 4 81

[3]

1 72 50 78 29 16 44 22 57
 80 31 12 37 27 59 6 65 52
 42 20 61 8 67 48 73 36 14

54 5 64 11 79 33 58 39 26
 13 75 35 63 41 19 47 7 69
 56 43 24 49 3 71 18 77 28

68 46 9 34 15 74 21 62 40
 30 17 76 23 55 45 70 51 2
 25 60 38 66 53 4 32 10 81

[9]

1 72 50 80 31 12 42 20 61
 78 29 16 37 27 59 8 67 48
 44 22 57 6 65 52 73 36 14

54 5 64 13 75 35 56 43 24
 11 79 33 63 41 19 49 3 71
 58 39 26 47 7 69 18 77 28

68 46 9 30 17 76 25 60 38
 34 15 74 23 55 45 66 53 4
 21 62 40 70 51 2 32 10 81

10. ここで九進法および三進法の「分解図」の見方を記しておこう。

分解図とは、位取りに応じて面取りをした図のことで、九進法の場合は上位／下位の $[9^1, 9^0]$ の2面、三進法ならば $[3^3, 3^2, 3^1, 3^0]$ の4面で構成される。各面は九方陣を反映して 9×9 個の配列だ。

なお、 n 進法図では、1～81の自然数のかわりに0～80の整数を用いる。

$n1$ の1(+)のところには、00(九)および0000(三)が入る。

$n81$ の81(+)のところには、88(九)あるいは2222(三)が入る。

そして、その値を換算して、わかりやすい十進数にする時には、

$$88(九) = 8 \times 9^1 + 8 \times 9^0 = 72 + 8 = 80(+) \quad (9^0 = 1 \text{ だから})$$

$$2222(三) = 2 \times 3^3 + 2 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^0$$

$$= 2 \times 27 + 2 \times 9 + 2 \times 3 + 2 \times 1 = 54 + 18 + 6 + 2 = 80(+) \quad (3^0 = 1 \text{ だから})$$

試みに解1の横の最上行 {1, 78, 44, 72, 29, 22, 50, 16, 57} を見てみよう。

行和は本来、九進法表記図で 00 85 47 78 31 23 54 16 62 を見て、

$$(0 \times 9 + 0 \times 1) + (8 \times 9 + 5 \times 1) + (4 \times 9 + 7 \times 1) + (7 \times 9 + 8 \times 1) + (3 \times 9 + 1 \times 1) +$$

$$(2 \times 9 + 3 \times 1) + (5 \times 9 + 4 \times 1) + (1 \times 9 + 6 \times 1) + (6 \times 9 + 2 \times 1)$$

$$= 0 + 77 + 43 + 71 + 28 + 21 + 49 + 15 + 56 = 360(+)$$

と計算すべきだが、分解図でも計算できる。

1 78 44 72 29 22 50 16 57
 80 37 6 31 27 65 12 59 52
 42 8 73 20 67 36 61 48 14

54 11 58 5 79 39 64 33 26
 13 63 47 75 41 7 35 19 69
 56 49 18 43 3 77 24 71 28

68 34 21 46 15 62 9 74 40
 30 23 70 17 55 51 76 45 2
 25 66 32 60 53 10 38 4 81

／九進法表記図

00 85 47 78 31 23 54 16 62
87 40 05 33 28 71 12 64 56
45 07 80 21 73 38 66 52 14

58 11 63 04 86 42 70 35 27
13 68 51 82 44 06 37 20 75
61 53 18 46 02 84 25 77 30

74 36 22 50 15 67 08 81 43
32 24 76 17 60 55 83 48 01
26 72 34 65 57 10 41 03 88

／九進法分解図

084 732 516 057 813 462
840 327 165 705 381 246
408 273 651 570 138 624

516 084 732 813 462 057
165 840 327 381 246 705
651 408 273 138 624 570

732 516 084 462 057 813
327 165 840 246 705 381
273 651 408 624 570 138
[9¹] [9⁰]

／三進法表記図

0000 2212 1121 2122 1001 0210 1211 0120 2002
2221 1100 0012 1010 0222 2101 0102 2011 1220
1112 0021 2200 0201 2110 1022 2020 1202 0111

1222 0101 2010 0011 2220 1102 2100 1012 0221
0110 2022 1201 2202 1111 0020 1021 0200 2112
2001 1210 0122 1120 0002 2211 0212 2121 1000

2111 1020 0202 1200 0112 2021 0022 2201 1110
1002 0211 2120 0121 2000 1212 2210 1122 0001
0220 2102 1011 2012 1221 0100 1101 0010 2222

／三進法分解図

021 210 102 021 102 210 012 201 120 021 210 102
210 102 021 210 021 102 201 120 012 102 021 210
102 021 210 102 210 021 120 012 201 210 102 021

102 021 210 210 021 102 201 120 012 210 102 021
021 210 102 102 210 021 120 012 201 021 210 102
210 102 021 021 102 210 012 201 120 102 021 210

210 102 021 102 210 021 120 012 201 102 021 210
102 021 210 021 102 210 012 201 120 210 102 021
021 210 102 210 021 102 201 120 012 021 210 102

[3³] [3²] [3¹] [3⁰]

九進法分解図では、9¹面が 084 732 516、9⁰面が 057 813 462 とある。

$$(0+8+4+7+3+2+5+1+6) \times 9 + (0+5+7+8+1+3+4+6+2) \times 1$$

$$= (0+1+2+3+4+5+6+7+8) \times 9 + (0+1+2+3+4+5+6+7+8) \times 1$$

$$= 36 \times 9 + 36 \times 1 = 324 + 36 = 360(+)$$

この計算式の優れているところは、もし(0+1+2+3+4+5+6+7+8)の数字の組み合わせが両面のどの行、どの列でも見つければ、その総和はどれも

$$(0+1+2+3+4+5+6+7+8) \times 9 + (0+1+2+3+4+5+6+7+8) \times 1$$

$$= 36 \times 9 + 36 \times 1 = 324 + 36 = 360(+)$$

という1つの式で計算できると言うことだ。そして、それゆえに行列定和が言えるのである。

試みに上の解のすべての行、列を調べて見てほしい。(0+1+2+3+4+5+6+7+8)の数字の組み合わせが両面のどの行列でも見つかるではないか。つまり、この解の行和・列和は、

$$(0+1+2+3+4+5+6+7+8) \times 9 + (0+1+2+3+4+5+6+7+8) \times 1$$

$$= 36 \times 9 + 36 \times 1 = 324 + 36 = 360(+)$$

という1つの式で、すべてを表現できるではないか。つまり、定和を言えるではないか。

こういう美しい構造を持った魔方陣のことを何と言うのであろうか。

「オイラー方陣」と言うのだそうだ。この概念を鈴木前教授に教わった。

主対角線の和は、どうであろうか？

$$\begin{aligned}
 & 1 + 37 + 73 + 5 + 41 + 77 + 9 + 45 + 81 \\
 &= (0+4+8+0+4+8+0+4+8) \times 9 + (0+0+0+4+4+4+8+8+8) \times 1 \\
 &= 36 \times 9 + 36 \times 1 = 324 + 36 = 360(+) \\
 & 57 + 59 + 61 + 39 + 41 + 45 + 21 + 23 + 25 \\
 &= (6+6+6+4+4+4+2+2+2) \times 9 + (2+4+6+2+4+6+2+4+6) \times 1 \\
 &= 36 \times 9 + 36 \times 1 = 324 + 36 = 360(+)
 \end{aligned}$$

定和は成り立っているが、 $(0+1+2+3+4+5+6+7+8)$ の数字の組み合わせがどこにも見つかからない。つまり、主対角線については「オイラー方陣」になり損なっている。もともとオイラー祖師は、対角線についてはそう定義していなかったそうだから、これでも十分「オイラー方陣」ではある。

九方陣には、いったいいくつの「オイラー方陣」があるのだろうか。九進法でのオイラー方陣は、ほとんど見つかっていない。対称汎九方陣でも、見つかっていない。小生の知る限りでは、まだこの1個しか無い。他は、すべて**非**オイラー方陣である。

三進法分解図ではどう見えるであろうか。我々は $3 \times 3 \times 3 \times 3$ の四次元空間で元の超立方方陣を構成したのであるから、三進法を使う必然性がある。三進法分解図を見てみよう。

横の最下行を見てみよう。25 66 32 60 53 10 38 4 81

021 210 102 210 021 102 201 120 012 021 210 102

$[3^3]$ $[3^2]$ $[3^1]$ $[3^0]$

$$\begin{aligned}
 & (0+2+1+2+1+0+1+0+2) \times 27 + (2+1+0+0+2+1+1+0+2) \times 9 \\
 & + (2+0+1+1+2+0+0+1+2) \times 3 + (0+2+1+2+1+0+1+0+2) \times 1 \\
 & = 9 \times 27 + 9 \times 9 + 9 \times 3 + 9 \times 1 = 243 + 81 + 27 + 9 = 360(+)
 \end{aligned}$$

どの行でもどの列でも、同じような式が見つかる。 $\{0, 1, 2\}$ の3数の組み合わせが3組あり、

$$\begin{aligned}
 & \{(0+1+2) \times 3\} \times 27 + \{(0+1+2) \times 3\} \times 9 + \{(0+1+2) \times 3\} \times 3 + \{(0+1+2) \times 3\} \times 1 \\
 & = 9 \times 27 + 9 \times 9 + 9 \times 3 + 9 \times 1 = 243 + 81 + 27 + 9 = 360(+)
 \end{aligned}$$

という構造をしている。全てを同一の計算式で表現できる。

主対角線さえ、このパターンを成して定和を実現している。一部が、 $(0+0+0) + (1+1+1) + (2+2+2)$ という姿をすることもあるが、これとて数学的には $(0+1+2) \times 3$ と同じことで、定和の条件として何ら異論は無い。

そればかりか、 $\{0, 1, 2\}$ の3数の組み合わせによって、 3×3 の内包三方陣9個の成立までも表現できている。三進法分解図は、まことに強力である。

解のリストを見ると、四次元超立方方陣を次元変換して得た九方陣は、どれもが三進法で見て「完全オイラー方陣」である。主対角線にまで $\{0, 1, 2\}$ が3組みずつ見つかる。

この発見には、感銘を受けた。

様々な面白い特徴を持っている上に、数が極めて少ない。計数に時間もあまりかからない。多重方陣を研究して居られる方々には、ぜひお試しいただきたい逸品である。

11. そろそろ四次元超立方方陣の解集合を実際に求めてみよう。例のように「基本図」と定義の連立方程式を立てる。今度は、目的方陣として平面の補数対称型九方陣をはっきりと意識する。リスト整形出力用の不等式を立て、その標準解の総数を求めてみよう。

[基本図]

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
28	19-29	20-30-21	31	22-32	23-33-24	34	25-35	26-36-27
37	38	39	40	41	42	43	44	45
55-46	56-47-57	48	58-49	59-50-60	51	61-52	62-53-63	54
64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81

対称九方陣/ /三進法分解図

1	2	3	4	5	6	7	8	9	00000000	00000000	000111222	012012012
10	11	12	13	14	15	16	17	18	00000000	111111111	000111222	012012012
19	20	21	22	23	24	25	26	27	00000000	222222222	000111222	012012012
28	29	30	31	32	33	34	35	36	111111111	000000000	000111222	012012012
37	38	39	40	41	42	43	44	45	111111111	111111111	000111222	012012012
46	47	48	49	50	51	52	53	54	111111111	222222222	000111222	012012012
55	56	57	58	59	60	61	62	63	222222222	000000000	000111222	012012012
64	65	66	67	68	69	70	71	72	222222222	111111111	000111222	012012012
73	74	75	76	77	78	79	80	81	222222222	222222222	000111222	012012012

* 基本定義式: S=123 *

- n1+n2+n3=S ... (1); n1+n4+n7=S ... (2); n1+n10+n19=S ... (3);
- n1+n28+n55=S ... (4); n2+n5+n8=S ... (5); n2+n11+n20=S ... (6);
- n2+n29+n56=S ... (7); n3+n6+n9=S ... (8); n3+n12+n21=S ... (9);
- n3+n30+n57=S ... (10); n4+n5+n6=S ... (11); n4+n13+n22=S ... (12);
- n4+n31+n58=S ... (13); n5+n14+n23=S ... (14); n5+n32+n59=S ... (15);
- n6+n15+n24=S ... (16); n6+n33+n60=S ... (17); n7+n8+n9=S ... (18);
- n7+n16+n25=S ... (19); n7+n34+n61=S ... (20); n8+n17+n26=S ... (21);
- n8+n35+n62=S ... (22); n9+n18+n27=S ... (23); n9+n36+n63=S ... (24);
- n10+n11+n12=S ... (25); n10+n13+n16=S ... (26); n10+n37+n64=S ... (27);
- n11+n14+n17=S ... (28); n11+n38+n65=S ... (29); n12+n15+n18=S ... (30);
- n12+n39+n66=S ... (31); n13+n14+n15=S ... (32); n13+n40+n67=S ... (33);
- n14+n41+n68=S ... (34); n16+n17+n18=S ... (35); n19+n20+n21=S ... (36);
- n19+n22+n25=S ... (37); n20+n23+n26=S ... (38); n21+n24+n27=S ... (39);
- n22+n23+n24=S ... (40); n25+n26+n27=S ... (41); n28+n29+n30=S ... (42);
- n28+n31+n34=S ... (43); n28+n37+n46=S ... (44); n29+n32+n35=S ... (45);
- n29+n38+n47=S ... (46); n30+n33+n36=S ... (47); n30+n39+n48=S ... (48);
- n31+n32+n33=S ... (49); n31+n40+n49=S ... (50); n32+n41+n50=S ... (51);
- n34+n35+n36=S ... (52); n37+n38+n39=S ... (53); n37+n40+n43=S ... (54);
- n38+n41+n44=S ... (55); n40+n41+n42=S ... (56);

* 基本定義式 2: CS=82 *

n1+n81=n2+n80=n3+n79=n4+n78=n5+n77=n6+n76=n7+n75=n8+n74=n9+n73
 =n10+n72=n11+n71=n12+n70=n13+n69=n14+n68=n15+n67=n16+n66=n17+n65=n18+n64
 =n19+n63=n20+n62=n21+n61=n22+n60=n23+n59=n24+n58=n25+n57=n26+n56=n27+n55
 =n28+n54=n29+n53=n30+n52=n31+n51=n32+n50=n33+n49=n34+n48=n35+n47=n36+n46
 =n37+n45=n38+n44=n39+n43=n40+n42=n41+n41=CS ... (57);

* 四次元超立体三方陣の解のリスト: (部分)

次元変換して得た対称九方陣とその三進法分解図も添えた *

[1]

1	80	42	78	37	8	44	6	73			
72	31	20	29	27	67	22	65	36			
54	50-13	-12-56	-61	11	16-63	-59-49	-48	58	57-47	-52-18	-14
5	75	43	79	41	3	39	7	77			
68	64-30	-35-25	24	34	33-23	-19-66	71	21	26-70	-69-32	28
46	17	60	15	55	53	62	51	10			
9	76	38	74	45	4	40	2	81			

1/ /D3i

1	80	42	78	37	8	44	6	73	021210102	021210102	021102210	012201120
72	31	20	29	27	67	22	65	36	210102021	102021210	210021102	201120012
50	12	61	16	59	48	57	52	14	102021210	210102021	102210021	120012201
54	13	56	11	63	49	58	47	18	102021210	210102021	210021102	201120012
5	75	43	79	41	3	39	7	77	021210102	021210102	102210021	120012201
64	35	24	33	19	71	26	69	28	210102021	102021210	021102210	012201120
68	30	25	34	23	66	21	70	32	210102021	102021210	102210021	120012201
46	17	60	15	55	53	62	51	10	102021210	210102021	021102210	012201120
9	76	38	74	45	4	40	2	81	021210102	021210102	210021102	201120012

[2]

1—80—42	78—37—8	44—6—73
54 13 56	11 63 49	58 47 18
72 68 31—30—20—25	29 34 27—23—67—66	22 21—65—70—36—32
5 75 43	79 41 3	39 7 77
50—46—12—17—61 60	16—15—59—55—48 53	57—62—52—51—14 10
64 35 24	33 19 71	26 69 28
9—76—38	74—45—4	40—2—81

2/ /D3i

1 80 42 78 37 8 44 6 73	021210102	021210102	021102210	012201120
54 13 56 11 63 49 58 47 18	102021210	210102021	210021102	201120012
68 30 25 34 23 66 21 70 32	210102021	102021210	102210021	120012201
72 31 20 29 27 67 22 65 36	210102021	102021210	210021102	201120012
5 75 43 79 41 3 39 7 77	021210102	021210102	102210021	120012201
46 17 60 15 55 53 62 51 10	102021210	210102021	021102210	012201120
50 12 61 16 59 48 57 52 14	102021210	210102021	102210021	120012201
64 35 24 33 19 71 26 69 28	210102021	102021210	021102210	012201120
9 76 38 74 45 4 40 2 81	021210102	021210102	210021102	201120012

[3]

1—80—42	77—39—7	45—4—74
71 33 19	30 25 68	22 65 36
53 51—15—10—55—62	12 16—61—59—50—48	58 56—47—54—18—13
6 73 44	79 41 3	38 9 76
69—64—28—35—26 24	34—32—23—21—66 70	20—27—72—67—31 29
46 17 60	14 57 52	63 49 11
8—78—37	75—43—5	40—2—81

3/ /D3i

1 80 42 77 39 7 45 4 74	021210102	021210102	021102210	012120201
71 33 19 30 25 68 22 65 36	210102021	102021210	210021102	120201012
51 10 62 16 59 48 56 54 13	102021210	210102021	102210021	201012120
53 15 55 12 61 50 58 47 18	102021210	210102021	210021102	120201012
6 73 44 79 41 3 38 9 76	021210102	021210102	102210021	201012120
64 35 24 32 21 70 27 67 29	210102021	102021210	021102210	012120201
69 28 26 34 23 66 20 72 31	210102021	102021210	102210021	201012120
46 17 60 14 57 52 63 49 11	102021210	210102021	021102210	012120201
8 78 37 75 43 5 40 2 81	021210102	021210102	210021102	120201012

[4]

1—80—42	77—39—7	45—4—74
53 15 55	12 61 50	58 47 18
71 69—33—28—19—26	30 34—25—23—68—66	22 20—65—72—36—31
6 73 44	79 41 3	38 9 76
51—46—10—17—62 60	16—14—59—57—48 52	56—63—54—49—13 11
64 35 24	32 21 70	27 67 29
8—78—37	75—43—5	40—2—81

4/ /D3i

1 80 42 77 39 7 45 4 74	021210102	021210102	021102210	012120201
53 15 55 12 61 50 58 47 18	102021210	210102021	210021102	120201012
69 28 26 34 23 66 20 72 31	210102021	102021210	102210021	201012120
71 33 19 30 25 68 22 65 36	210102021	102021210	210021102	120201012
6 73 44 79 41 3 38 9 76	021210102	021210102	102210021	201012120
46 17 60 14 57 52 63 49 11	102021210	210102021	021102210	012120201
51 10 62 16 59 48 56 54 13	102021210	210102021	102210021	201012120
64 35 24 32 21 70 27 67 29	210102021	102021210	021102210	012120201
8 78 37 75 43 5 40 2 81	021210102	021210102	210021102	120201012

[5]

1—80—42	72—31—20	50—12—61
78 37 8	29 27 67	16 59 48
54 44—13—6—56—73	5 22—75—65—43—36	64 57—35—52—24—14
11 63 49	79 41 3	33 19 71
68—58—30—47—25 18	46—39—17—7—60 77	9—26—76—69—38 28
34 23 66	15 55 53	74 45 4
21—70—32	62—51—10	40—2—81

5/ /D3i

1	80	42	72	31	20	50	12	61	021210102	021102210	021210102	012201120
78	37	8	29	27	67	16	59	48	210102021	210021102	102021210	201120012
44	6	73	22	65	36	57	52	14	102021210	102210021	210102021	120012201
54	13	56	5	75	43	64	35	24	102021210	210021102	210102021	201120012
11	63	49	79	41	3	33	19	71	021210102	102210021	021210102	120012201
58	47	18	39	7	77	26	69	28	210102021	021102210	102021210	012201120
68	30	25	46	17	60	9	76	38	210102021	102210021	102021210	120012201
34	23	66	15	55	53	74	45	4	102021210	021102210	210102021	012201120
21	70	32	62	51	10	40	2	81	021210102	210021102	021210102	201120012

[6]

1	80	42	72	31	20	50	12	61	021210102	021102210	021210102	012201120
78	37	8	29	27	67	16	59	48	210102021	210021102	102021210	201120012
44	6	73	22	65	36	57	52	14	102021210	102210021	210102021	120012201
54	13	56	5	75	43	64	35	24	102021210	210021102	210102021	201120012
11	63	49	79	41	3	33	19	71	021210102	102210021	021210102	120012201
58	47	18	39	7	77	26	69	28	210102021	021102210	102021210	012201120
68	30	25	46	17	60	9	76	38	210102021	102210021	102021210	120012201
34	23	66	15	55	53	74	45	4	102021210	021102210	210102021	012201120
21	70	32	62	51	10	40	2	81	021210102	210021102	021210102	201120012

6/ /D3i

1	80	42	72	31	20	50	12	61	021210102	021102210	021210102	012201120
54	13	56	5	75	43	64	35	24	102021210	210021102	210102021	201120012
68	30	25	46	17	60	9	76	38	210102021	102210021	102021210	120012201
78	37	8	29	27	67	16	59	48	210102021	210021102	102021210	201120012
11	63	49	79	41	3	33	19	71	021210102	102210021	021210102	120012201
34	23	66	15	55	53	74	45	4	102021210	021102210	210102021	012201120
44	6	73	22	65	36	57	52	14	102021210	102210021	210102021	120012201
58	47	18	39	7	77	26	69	28	210102021	021102210	102021210	012201120
21	70	32	62	51	10	40	2	81	021210102	210021102	021210102	201120012

[7]

1	80	42	72	31	20	50	12	61	021210102	021102210	021210102	012201120					
53	45	15	4	55	74	6	22	73	65	44	36	64	56	35	54	24	13
69	58	28	47	26	18	46	38	17	9	60	76	8	27	78	67	37	29
34	23	66	15	55	53	74	45	4	102021210	021102210	210102021	012201120					
20	72	31	63	49	11	40	2	81	021210102	210021102	021210102	201120012					

7/ /D3i

1	80	42	72	31	20	50	12	61	021210102	021102210	021210102	012201120
77	39	7	30	25	68	16	59	48	210102021	210021102	102021210	120201012
45	4	74	22	65	36	56	54	13	102021210	102210021	210102021	201012120
53	15	55	6	73	44	64	35	24	102021210	210021102	210102021	120201012
12	61	50	79	41	3	32	21	70	021210102	102210021	021210102	201012120
58	47	18	38	9	76	27	67	29	210102021	021102210	102021210	012120201
69	28	26	46	17	60	8	78	37	210102021	102210021	102021210	201012120
34	23	66	14	57	52	75	43	5	102021210	021102210	210102021	012120201
20	72	31	63	49	11	40	2	81	021210102	210021102	021210102	120201012

[8]

1	80	42	72	31	20	50	12	61	021210102	021102210	021210102	012201120
77	39	7	30	25	68	16	59	48	210102021	210021102	102021210	120201012
45	4	74	22	65	36	56	54	13	102021210	102210021	210102021	201012120
53	15	55	6	73	44	64	35	24	102021210	210021102	210102021	120201012
12	61	50	79	41	3	32	21	70	021210102	102210021	021210102	201012120
58	47	18	38	9	76	27	67	29	210102021	021102210	102021210	012120201
69	28	26	46	17	60	8	78	37	210102021	102210021	102021210	201012120
34	23	66	14	57	52	75	43	5	102021210	021102210	210102021	012120201
20	72	31	63	49	11	40	2	81	021210102	210021102	021210102	120201012

8/ /D3i

1	80	42	72	31	20	50	12	61	021210102	021102210	021210102	012201120
53	15	55	6	73	44	64	35	24	102021210	210021102	210102021	120201012
69	28	26	46	17	60	8	78	37	210102021	102210021	102021210	201012120
77	39	7	30	25	68	16	59	48	210102021	210021102	102021210	120201012
12	61	50	79	41	3	32	21	70	021210102	102210021	021210102	201012120
34	23	66	14	57	52	75	43	5	102021210	021102210	210102021	012120201
45	4	74	22	65	36	56	54	13	102021210	102210021	210102021	201012120

58 47 18 38 9 76 27 67 29 210102021 021102210 102021210 012120201
 20 72 31 63 49 11 40 2 81 021210102 210021102 021210102 120201012

[9]

1-----80-----42 54-----13-----56 68-----30-----25
 |78 37 | 8 |11 63 |49 |34 23 |66
 72 44-31- 6-20-73 5 58-75-47-43-18 46 21-17-70-60-32
 |29 | 27 |67 | |79 | 41 | 3 | |15 | 55 |53 |
 50-22-12-65-61 36 64-39-35- 7-24 77 9-62-76-51-38 10
 16 | 59 48 | 33 | 19 71 | 74 | 45 4 |
 57-----52-----14 26-----69-----28 40----- 2-----81

9/ /D3i

1 80 42 54 13 56 68 30 25 021102210 021210102 021210102 012201120
 78 37 8 11 63 49 34 23 66 210021102 210102021 102021210 201120012
 44 6 73 58 47 18 21 70 32 102210021 102021210 210102021 120012201
 72 31 20 5 75 43 46 17 60 210021102 102021210 210102021 201120012
 29 27 67 79 41 3 15 55 53 102210021 021210102 021210102 120012201
 22 65 36 39 7 77 62 51 10 021102210 210102021 102021210 012201120
 50 12 61 64 35 24 9 76 38 102210021 210102021 102021210 120012201
 16 59 48 33 19 71 74 45 4 021102210 102021210 210102021 012201120
 57 52 14 26 69 28 40 2 81 210021102 021210102 021210102 201120012

[10]

1-----80-----42 54-----13-----56 68-----30-----25
 |72 31 |20 | 5 75 |43 |46 17 |60
 78 50-37-12- 8-61 11 64-63-35-49-24 34 9-23-76-66-38
 |29 | 27 |67 | |79 | 41 | 3 | |15 | 55 |53 |
 44-16- 6-59-73 48 58-33-47-19-18 71 21-74-70-45-32 4
 22 | 65 36 | 39 | 7 77 | 62 | 51 10 |
 57-----52-----14 26-----69-----28 40----- 2-----81

10/ /D3i

1 80 42 54 13 56 68 30 25 021102210 021210102 021210102 012201120
 72 31 20 5 75 43 46 17 60 210021102 102021210 210102021 201120012
 50 12 61 64 35 24 9 76 38 102210021 210102021 102021210 120012201
 78 37 8 11 63 49 34 23 66 210021102 210102021 102021210 201120012
 29 27 67 79 41 3 15 55 53 102210021 021210102 021210102 120012201
 16 59 48 33 19 71 74 45 4 021102210 102021210 210102021 012201120
 44 6 73 58 47 18 21 70 32 102210021 102021210 210102021 120012201
 22 65 36 39 7 77 62 51 10 021102210 210102021 102021210 012201120
 57 52 14 26 69 28 40 2 81 210021102 021210102 021210102 201120012

以降は、対称九方陣のみをリストしよう。それさえあれば、元の小立方体3個の分解図はいつでも復元できると思うので。

11/ /D3i

1 80 42 53 15 55 69 28 26 021102210 021210102 021210102 012120201
 77 39 7 12 61 50 34 23 66 210021102 210102021 102021210 120201012
 45 4 74 58 47 18 20 72 31 102210021 102021210 210102021 201012120
 71 33 19 6 73 44 46 17 60 210021102 102021210 210102021 120201012
 30 25 68 79 41 3 14 57 52 102210021 021210102 021210102 201012120
 22 65 36 38 9 76 63 49 11 021102210 210102021 102021210 012120201
 51 10 62 64 35 24 8 78 37 102210021 210102021 102021210 201012120
 16 59 48 32 21 70 75 43 5 021102210 102021210 210102021 012120201
 56 54 13 27 67 29 40 2 81 210021102 021210102 021210102 120201012

12/ /D3i

1 80 42 53 15 55 69 28 26 021102210 021210102 021210102 012120201
 71 33 19 6 73 44 46 17 60 210021102 102021210 210102021 120201012
 51 10 62 64 35 24 8 78 37 102210021 210102021 102021210 201012120
 77 39 7 12 61 50 34 23 66 210021102 210102021 102021210 120201012
 30 25 68 79 41 3 14 57 52 102210021 021210102 021210102 201012120
 16 59 48 32 21 70 75 43 5 021102210 102021210 210102021 012120201
 45 4 74 58 47 18 20 72 31 102210021 102021210 210102021 201012120
 22 65 36 38 9 76 63 49 11 021102210 210102021 102021210 012120201
 56 54 13 27 67 29 40 2 81 210021102 021210102 021210102 120201012

13/

1 78 44 80 37 6 42 8 73
72 29 22 31 27 65 20 67 36
50 16 57 12 59 52 61 48 14
54 11 58 13 63 47 56 49 18
5 79 39 75 41 7 43 3 77
64 33 26 35 19 69 24 71 28
68 34 21 30 23 70 25 66 32
46 15 62 17 55 51 60 53 10
9 74 40 76 45 2 38 4 81

16/

1 78 44 77 43 3 45 2 76
51 17 55 16 57 50 56 49 18
71 28 24 30 23 70 22 72 29
69 35 19 34 21 68 20 67 36
8 73 42 75 41 7 40 9 74
46 15 62 14 61 48 63 47 13
53 10 60 12 59 52 58 54 11
64 33 26 32 25 66 27 65 31
6 80 37 79 39 5 38 4 81

19/

1 78 44 69 35 19 53 10 60
51 17 55 8 73 42 64 33 26
71 28 24 46 15 62 6 80 37
77 43 3 34 21 68 12 59 52
16 57 50 75 41 7 32 25 66
30 23 70 14 61 48 79 39 5
45 2 76 20 67 36 58 54 11
56 49 18 40 9 74 27 65 31
22 72 29 63 47 13 38 4 81

22/

1 78 44 51 17 55 71 28 24
69 35 19 8 73 42 46 15 62
53 10 60 64 33 26 6 80 37
77 43 3 16 57 50 30 23 70
34 21 68 75 41 7 14 61 48
12 59 52 32 25 66 79 39 5
45 2 76 56 49 18 22 72 29
20 67 36 40 9 74 63 47 13
58 54 11 27 65 31 38 4 81

25/

1 77 45 78 43 2 44 3 76
69 34 20 35 21 67 19 68 36
53 12 58 10 59 54 60 52 11
51 16 56 17 57 49 55 50 18
8 75 40 73 41 9 42 7 74
64 32 27 33 25 65 26 66 31
71 30 22 28 23 72 24 70 29
46 14 63 15 61 47 62 48 13
6 79 38 80 39 4 37 5 81

28/

1 77 45 69 34 20 53 12 58
51 16 56 8 75 40 64 32 27
71 30 22 46 14 63 6 79 38
78 43 2 35 21 67 10 59 54
17 57 49 73 41 9 33 25 65
28 23 72 15 61 47 80 39 4
44 3 76 19 68 36 60 52 11
55 50 18 42 7 74 26 66 31
24 70 29 62 48 13 37 5 81

31/

1 72 50 80 31 12 42 20 61

14/

1 78 44 80 37 6 42 8 73
54 11 58 13 63 47 56 49 18
68 34 21 30 23 70 25 66 32
72 29 22 31 27 65 20 67 36
5 79 39 75 41 7 43 3 77
46 15 62 17 55 51 60 53 10
50 16 57 12 59 52 61 48 14
64 33 26 35 19 69 24 71 28
9 74 40 76 45 2 38 4 81

17/

1 78 44 72 29 22 50 16 57
54 11 58 5 79 39 64 33 26
68 34 21 46 15 62 9 74 40
80 37 6 31 27 65 12 59 52
13 63 47 75 41 7 35 19 69
30 23 70 17 55 51 76 45 2
42 8 73 20 67 36 61 48 14
56 49 18 43 3 77 24 71 28
25 66 32 60 53 10 38 4 81

20/

1 78 44 54 11 58 68 34 21
72 29 22 5 79 39 46 15 62
50 16 57 64 33 26 9 74 40
80 37 6 13 63 47 30 23 70
31 27 65 75 41 7 17 55 51
12 59 52 35 19 69 76 45 2
42 8 73 56 49 18 25 66 32
20 67 36 43 3 77 60 53 10
61 48 14 24 71 28 38 4 81

23/

1 77 45 80 39 4 42 7 74
71 30 22 33 25 65 19 68 36
51 16 56 10 59 54 62 48 13
53 12 58 15 61 47 55 50 18
6 79 38 73 41 9 44 3 76
64 32 27 35 21 67 24 70 29
69 34 20 28 23 72 26 66 31
46 14 63 17 57 49 60 52 11
8 75 40 78 43 2 37 5 81

26/

1 77 45 78 43 2 44 3 76
51 16 56 17 57 49 55 50 18
71 30 22 28 23 72 24 70 29
69 34 20 35 21 67 19 68 36
8 75 40 73 41 9 42 7 74
46 14 63 15 61 47 62 48 13
53 12 58 10 59 54 60 52 11
64 32 27 33 25 65 26 66 31
6 79 38 80 39 4 37 5 81

29/

1 77 45 53 12 58 69 34 20
71 30 22 6 79 38 46 14 63
51 16 56 64 32 27 8 75 40
80 39 4 15 61 47 28 23 72
33 25 65 73 41 9 17 57 49
10 59 54 35 21 67 78 43 2
42 7 74 55 50 18 26 66 31
19 68 36 44 3 76 60 52 11
62 48 13 24 70 29 37 5 81

32/

1 72 50 78 29 16 44 22 57

15/

1 78 44 77 43 3 45 2 76
69 35 19 34 21 68 20 67 36
53 10 60 12 59 52 58 54 11
51 17 55 16 57 50 56 49 18
8 73 42 75 41 7 40 9 74
64 33 26 32 25 66 27 65 31
71 28 24 30 23 70 22 72 29
46 15 62 14 61 48 63 47 13
6 80 37 79 39 5 38 4 81

18/

1 78 44 69 35 19 53 10 60
77 43 3 34 21 68 12 59 52
45 2 76 20 67 36 58 54 11
51 17 55 8 73 42 64 33 26
16 57 50 75 41 7 32 25 66
56 49 18 40 9 74 27 65 31
71 28 24 46 15 62 6 80 37
30 23 70 14 61 48 79 39 5
22 72 29 63 47 13 38 4 81

21/

1 78 44 51 17 55 71 28 24
77 43 3 16 57 50 30 23 70
45 2 76 56 49 18 22 72 29
69 35 19 8 73 42 46 15 62
34 21 68 75 41 7 14 61 48
20 67 36 40 9 74 63 47 13
53 10 60 64 33 26 6 80 37
12 59 52 32 25 66 79 39 5
58 54 11 27 65 31 38 4 81

24/

1 77 45 80 39 4 42 7 74
53 12 58 15 61 47 55 50 18
69 34 20 28 23 72 26 66 31
71 30 22 33 25 65 19 68 36
6 79 38 73 41 9 44 3 76
46 14 63 17 57 49 60 52 11
51 16 56 10 59 54 62 48 13
64 32 27 35 21 67 24 70 29
8 75 40 78 43 2 37 5 81

27/

1 77 45 71 30 22 51 16 56
53 12 58 6 79 38 64 32 27
69 34 20 46 14 63 8 75 40
80 39 4 33 25 65 10 59 54
15 61 47 73 41 9 35 21 67
28 23 72 17 57 49 78 43 2
42 7 74 19 68 36 62 48 13
55 50 18 44 3 76 24 70 29
26 66 31 60 52 11 37 5 81

30/

1 77 45 51 16 56 71 30 22
69 34 20 8 75 40 46 14 63
53 12 58 64 32 27 6 79 38
78 43 2 17 57 49 28 23 72
35 21 67 73 41 9 15 61 47
10 59 54 33 25 65 80 39 4
44 3 76 55 50 18 24 70 29
19 68 36 42 7 74 62 48 13
60 52 11 26 66 31 37 5 81

33/

1 72 50 71 49 3 51 2 70

54 5 64 13 75 35 56 43 24
68 46 9 30 17 76 25 60 38
78 29 16 37 27 59 8 67 48
11 79 33 63 41 19 49 3 71
34 15 74 23 55 45 66 53 4
44 22 57 6 65 52 73 36 14
58 39 26 47 7 69 18 77 28
21 62 40 70 51 2 32 10 81

34/

1 72 50 71 49 3 51 2 70
45 23 55 22 57 44 56 43 24
77 28 18 30 17 76 16 78 29
69 47 7 46 9 68 8 67 48
20 61 42 63 41 19 40 21 62
34 15 74 14 73 36 75 35 13
53 4 66 6 65 52 64 54 5
58 39 26 38 25 60 27 59 37
12 80 31 79 33 11 32 10 81

37/

1 72 50 45 23 55 77 28 18
71 49 3 22 57 44 30 17 76
51 2 70 56 43 24 16 78 29
69 47 7 20 61 42 34 15 74
46 9 68 63 41 19 14 73 36
8 67 48 40 21 62 75 35 13
53 4 66 58 39 26 12 80 31
6 65 52 38 25 60 79 33 11
64 54 5 27 59 37 32 10 81

40/

1 71 51 77 30 16 45 22 56
53 6 64 12 79 32 58 38 27
69 46 8 34 14 75 20 63 40
80 33 10 39 25 59 4 65 54
15 73 35 61 41 21 47 9 67
28 17 78 23 57 43 72 49 2
42 19 62 7 68 48 74 36 13
55 44 24 50 3 70 18 76 29
26 60 37 66 52 5 31 11 81

43/

1 71 51 69 46 8 53 6 64
45 22 56 20 63 40 58 38 27
77 30 16 34 14 75 12 79 32
72 49 2 47 9 67 4 65 54
23 57 43 61 41 21 39 25 59
28 17 78 15 73 35 80 33 10
50 3 70 7 68 48 66 52 5
55 44 24 42 19 62 26 60 37
18 76 29 74 36 13 31 11 81

46/

1 69 53 77 34 12 45 20 58
51 8 64 16 75 32 56 40 27
71 46 6 30 14 79 22 63 38
78 35 10 43 21 59 2 67 54
17 73 33 57 41 25 49 9 65
28 15 80 23 61 39 72 47 4
44 19 60 3 68 52 76 36 11
55 42 26 50 7 66 18 74 31
24 62 37 70 48 5 29 13 81

49/

1 54 68 53 67 3 69 2 52
51 65 7 64 9 50 8 49 66
71 4 48 6 47 70 46 72 5

54 5 64 11 79 33 58 39 26
68 46 9 34 15 74 21 62 40
80 31 12 37 27 59 6 65 52
13 75 35 63 41 19 47 7 69
30 17 76 23 55 45 70 51 2
42 20 61 8 67 48 73 36 14
56 43 24 49 3 71 18 77 28
25 60 38 66 53 4 32 10 81

35/

1 72 50 69 47 7 53 4 66
71 49 3 46 9 68 6 65 52
51 2 70 8 67 48 64 54 5
45 23 55 20 61 42 58 39 26
22 57 44 63 41 19 38 25 60
56 43 24 40 21 62 27 59 37
77 28 18 34 15 74 12 80 31
30 17 76 14 73 36 79 33 11
16 78 29 75 35 13 32 10 81

38/

1 72 50 45 23 55 77 28 18
69 47 7 20 61 42 34 15 74
53 4 66 58 39 26 12 80 31
71 49 3 22 57 44 30 17 76
46 9 68 63 41 19 14 73 36
6 65 52 38 25 60 79 33 11
51 2 70 56 43 24 16 78 29
8 67 48 40 21 62 75 35 13
64 54 5 27 59 37 32 10 81

41/

1 71 51 72 49 2 50 3 70
69 46 8 47 9 67 7 68 48
53 6 64 4 65 54 66 52 5
45 22 56 23 57 43 55 44 24
20 63 40 61 41 21 42 19 62
58 38 27 39 25 59 26 60 37
77 30 16 28 17 78 18 76 29
34 14 75 15 73 35 74 36 13
12 79 32 80 33 10 31 11 81

44/

1 71 51 45 22 56 77 30 16
69 46 8 20 63 40 34 14 75
53 6 64 58 38 27 12 79 32
72 49 2 23 57 43 28 17 78
47 9 67 61 41 21 15 73 35
4 65 54 39 25 59 80 33 10
50 3 70 55 44 24 18 76 29
7 68 48 42 19 62 74 36 13
66 52 5 26 60 37 31 11 81

47/

1 69 53 72 47 4 50 7 66
45 20 58 23 61 39 55 42 26
77 34 12 28 15 80 18 74 31
71 46 6 49 9 65 3 68 52
22 63 38 57 41 25 44 19 60
30 14 79 17 73 33 76 36 11
51 8 64 2 67 54 70 48 5
56 40 27 43 21 59 24 62 37
16 75 32 78 35 10 29 13 81

50/

1 54 68 53 67 3 69 2 52
45 59 19 58 21 44 20 43 60
77 10 36 12 35 76 34 78 11

69 47 7 46 9 68 8 67 48
53 4 66 6 65 52 64 54 5
45 23 55 22 57 44 56 43 24
20 61 42 63 41 19 40 21 62
58 39 26 38 25 60 27 59 37
77 28 18 30 17 76 16 78 29
34 15 74 14 73 36 75 35 13
12 80 31 79 33 11 32 10 81

36/

1 72 50 69 47 7 53 4 66
45 23 55 20 61 42 58 39 26
77 28 18 34 15 74 12 80 31
71 49 3 46 9 68 6 65 52
22 57 44 63 41 19 38 25 60
30 17 76 14 73 36 79 33 11
51 2 70 8 67 48 64 54 5
56 43 24 40 21 62 27 59 37
16 78 29 75 35 13 32 10 81

39/

1 71 51 80 33 10 42 19 62
53 6 64 15 73 35 55 44 24
69 46 8 28 17 78 26 60 37
77 30 16 39 25 59 7 68 48
12 79 32 61 41 21 50 3 70
34 14 75 23 57 43 66 52 5
45 22 56 4 65 54 74 36 13
58 38 27 47 9 67 18 76 29
20 63 40 72 49 2 31 11 81

42/

1 71 51 72 49 2 50 3 70
45 22 56 23 57 43 55 44 24
77 30 16 28 17 78 18 76 29
69 46 8 47 9 67 7 68 48
20 63 40 61 41 21 42 19 62
34 14 75 15 73 35 74 36 13
53 6 64 4 65 54 66 52 5
58 38 27 39 25 59 26 60 37
12 79 32 80 33 10 31 11 81

45/

1 69 53 78 35 10 44 19 60
51 8 64 17 73 33 55 42 26
71 46 6 28 15 80 24 62 37
77 34 12 43 21 59 3 68 52
16 75 32 57 41 25 50 7 66
30 14 79 23 61 39 70 48 5
45 20 58 2 67 54 76 36 11
56 40 27 49 9 65 18 74 31
22 63 38 72 47 4 29 13 81

48/

1 69 53 71 46 6 51 8 64
45 20 58 22 63 38 56 40 27
77 34 12 30 14 79 16 75 32
72 47 4 49 9 65 2 67 54
23 61 39 57 41 25 43 21 59
28 15 80 17 73 33 78 35 10
50 7 66 3 68 52 70 48 5
55 42 26 44 19 60 24 62 37
18 74 31 76 36 11 29 13 81

51/

1 54 68 51 65 7 71 4 48
53 67 3 64 9 50 6 47 70
69 2 52 8 49 66 46 72 5

45 59 19 58 21 44 20 43 60
56 25 42 27 41 55 40 57 26
22 39 62 38 61 24 63 23 37
77 10 36 12 35 76 34 78 11
16 33 74 32 73 18 75 17 31
30 80 13 79 15 29 14 28 81

52/

1 54 68 51 65 7 71 4 48
45 59 19 56 25 42 22 39 62
77 10 36 16 33 74 30 80 13
53 67 3 64 9 50 6 47 70
58 21 44 27 41 55 38 61 24
12 35 76 32 73 18 79 15 29
69 2 52 8 49 66 46 72 5
20 43 60 40 57 26 63 23 37
34 78 11 75 17 31 14 28 81

55/

1 53 69 54 67 2 68 3 52
51 64 8 65 9 49 7 50 66
71 6 46 4 47 72 48 70 5
45 58 20 59 21 43 19 44 60
56 27 40 25 41 57 42 55 26
22 38 63 39 61 23 62 24 37
77 12 34 10 35 78 36 76 11
16 32 75 33 73 17 74 18 31
30 79 14 80 15 28 13 29 81

58/

1 53 69 45 58 20 77 12 34
51 64 8 56 27 40 16 32 75
71 6 46 22 38 63 30 79 14
54 67 2 59 21 43 10 35 78
65 9 49 25 41 57 33 73 17
4 47 72 39 61 23 80 15 28
68 3 52 19 44 60 36 76 11
7 50 66 42 55 26 74 18 31
48 70 5 62 24 37 13 29 81

61/

2 81 40 78 37 8 43 5 75
70 32 21 29 27 67 24 64 35
51 10 62 16 59 48 56 54 13
52 14 57 11 63 49 60 46 17
6 73 44 79 41 3 38 9 76
65 36 22 33 19 71 25 68 30
69 28 26 34 23 66 20 72 31
47 18 58 15 55 53 61 50 12
7 77 39 74 45 4 42 1 80

2776/

39 76 8 4 44 75 80 3 40
22 35 66 71 21 31 30 67 26
62 12 49 48 58 17 13 53 57
59 18 46 54 55 14 10 50 63
45 73 5 1 41 81 77 9 37
19 32 72 68 27 28 36 64 23
25 29 69 65 24 34 33 70 20
56 15 52 51 61 11 16 47 60
42 79 2 7 38 78 74 6 43

2779/

39 58 26 22 44 57 62 21 40
5 54 64 72 1 50 46 68 9
79 11 33 29 78 16 15 34 74

51 65 7 64 9 50 8 49 66
56 25 42 27 41 55 40 57 26
16 33 74 32 73 18 75 17 31
71 4 48 6 47 70 46 72 5
22 39 62 38 61 24 63 23 37
30 80 13 79 15 29 14 28 81

53/

1 54 68 45 59 19 77 10 36
53 67 3 58 21 44 12 35 76
69 2 52 20 43 60 34 78 11
51 65 7 56 25 42 16 33 74
64 9 50 27 41 55 32 73 18
8 49 66 40 57 26 75 17 31
71 4 48 22 39 62 30 80 13
6 47 70 38 61 24 79 15 29
46 72 5 63 23 37 14 28 81

56/

1 53 69 54 67 2 68 3 52
45 58 20 59 21 43 19 44 60
77 12 34 10 35 78 36 76 11
51 64 8 65 9 49 7 50 66
56 27 40 25 41 57 42 55 26
16 32 75 33 73 17 74 18 31
71 6 46 4 47 72 48 70 5
22 38 63 39 61 23 62 24 37
30 79 14 80 15 28 13 29 81

59/

1 51 71 54 65 4 68 7 48
45 56 22 59 25 39 19 42 62
77 16 30 10 33 80 36 74 13
53 64 6 67 9 47 3 50 70
58 27 38 21 41 61 44 55 24
12 32 79 35 73 15 76 18 29
69 8 46 2 49 72 52 66 5
20 40 63 43 57 23 60 26 37
34 75 14 78 17 28 11 31 81

62/

2 81 40 78 37 8 43 5 75
52 14 57 11 63 49 60 46 17
69 28 26 34 23 66 20 72 31
70 32 21 29 27 67 24 64 35
6 73 44 79 41 3 38 9 76
47 18 58 15 55 53 61 50 12
51 10 62 16 59 48 56 54 13
65 36 22 33 19 71 25 68 30
7 77 39 74 45 4 42 1 80

2777/

39 59 25 22 45 56 62 19 42
4 54 65 71 1 51 48 68 7
80 10 33 30 77 16 13 36 74
76 18 29 35 73 15 12 32 79
44 55 24 21 41 61 58 27 38
3 50 70 67 9 47 53 64 6
8 46 69 66 5 52 49 72 2
75 14 34 31 81 11 17 28 78
40 63 20 26 37 60 57 23 43

2780/

39 58 26 22 44 57 62 21 40
4 53 66 71 3 49 48 67 8
80 12 31 30 76 17 13 35 75

45 59 19 56 25 42 22 39 62
58 21 44 27 41 55 38 61 24
20 43 60 40 57 26 63 23 37
77 10 36 16 33 74 30 80 13
12 35 76 32 73 18 79 15 29
34 78 11 75 17 31 14 28 81

54/

1 54 68 45 59 19 77 10 36
51 65 7 56 25 42 16 33 74
71 4 48 22 39 62 30 80 13
53 67 3 58 21 44 12 35 76
64 9 50 27 41 55 32 73 18
6 47 70 38 61 24 79 15 29
69 2 52 20 43 60 34 78 11
8 49 66 40 57 26 75 17 31
46 72 5 63 23 37 14 28 81

57/

1 53 69 51 64 8 71 6 46
45 58 20 56 27 40 22 38 63
77 12 34 16 32 75 30 79 14
54 67 2 65 9 49 4 47 72
59 21 43 25 41 57 39 61 23
10 35 78 33 73 17 80 15 28
68 3 52 7 50 66 48 70 5
19 44 60 42 55 26 62 24 37
36 76 11 74 18 31 13 29 81

60/

1 51 71 53 64 6 69 8 46
45 56 22 58 27 38 20 40 63
77 16 30 12 32 79 34 75 14
54 65 4 67 9 47 2 49 72
59 25 39 21 41 61 43 57 23
10 33 80 35 73 15 78 17 28
68 7 48 3 50 70 52 66 5
19 42 62 44 55 24 60 26 37
36 74 13 76 18 29 11 31 81

63/

2 81 40 76 38 9 45 4 74
72 31 20 29 27 67 22 65 36
49 11 63 18 58 47 56 54 13
52 14 57 12 61 50 59 48 16
5 75 43 79 41 3 39 7 77
66 34 23 32 21 70 25 68 30
69 28 26 35 24 64 19 71 33
46 17 60 15 55 53 62 51 10
8 78 37 73 44 6 42 1 80

2778/

39 58 26 23 45 55 61 20 42
4 53 66 72 1 50 47 69 7
80 12 31 28 77 18 15 34 74
76 17 30 36 73 14 11 33 79
44 57 22 19 41 63 60 25 38
3 49 71 68 9 46 52 65 6
8 48 67 64 5 54 51 70 2
75 13 35 32 81 10 16 29 78
40 62 21 27 37 59 56 24 43

2781/

39 23 61 58 45 20 26 55 42
4 72 47 53 1 69 66 50 7
80 28 15 12 77 34 31 18 74

76 17 30 35 75 13 12 31 80	77 18 28 36 73 14 10 32 81	76 36 11 17 73 33 30 14 79
45 55 23 19 41 63 59 27 37	45 55 23 19 41 63 59 27 37	44 19 60 57 41 25 22 63 38
2 51 70 69 7 47 52 65 6	1 50 72 68 9 46 54 64 5	3 68 52 49 9 65 71 46 6
8 48 67 66 4 53 49 71 3	7 47 69 65 6 52 51 70 2	8 64 51 48 5 70 67 54 2
73 14 36 32 81 10 18 28 77	74 15 34 33 79 11 16 29 78	75 32 16 13 81 29 35 10 78
42 61 20 25 38 60 56 24 43	42 61 20 25 38 60 56 24 43	40 27 56 62 37 24 21 59 43
	2782/	2783/
39 22 62 59 45 19 25 56 42	39 22 62 58 44 21 26 57 40	39 22 62 58 44 21 26 57 40
4 71 48 54 1 68 65 51 7	5 72 46 54 1 68 64 50 9	4 71 48 53 3 67 66 49 8
80 30 13 10 77 36 33 16 74	79 29 15 11 78 34 33 16 74	80 30 13 12 76 35 31 17 75
76 35 12 18 73 32 29 15 79	76 35 12 17 75 31 30 13 80	77 36 10 18 73 32 28 14 81
44 21 58 55 41 27 24 61 38	45 19 59 55 41 27 23 63 37	45 19 59 55 41 27 23 63 37
3 67 53 50 9 64 70 47 6	2 69 52 51 7 65 70 47 6	1 68 54 50 9 64 72 46 5
8 66 49 46 5 72 69 52 2	8 66 49 48 4 71 67 53 3	7 65 51 47 6 70 69 52 2
75 31 17 14 81 28 34 11 78	73 32 18 14 81 28 36 10 77	74 33 16 15 79 29 34 11 78
40 26 57 63 37 23 20 60 43	42 25 56 61 38 24 20 60 43	42 25 56 61 38 24 20 60 43

[Count = 2784] OK!

ちなみにリスト整形用の不等式は、対称九方陣に敬意を表して、次のようにした。
 $n1 < n9; n1 < n73; n1 < n81; n2 > n10;$

12. 今までの考察から、四次元超立方体三方陣が $3 \times 3 \times 9$ の形に次元分解できることがわかった。そして、結果的に平面の対称九方陣が出来ることもわかった。

ただし、出来た九方陣は、対応する全項の定和など他にも様々な特質を備えているから、一般的な対称九方陣ではない。構造的に特殊な「多重方陣」になっているのである。

ゆえに逆は必ずしも真にはならない。対称九方陣ならば何でも四次元超立方体三方陣に書き換わるわけではない。よほど特別の条件の時にのみ「逆もまた可なり」。

それでも、ここで、次元の違う2種類の方陣の間に書き換えの方法が見つかったのは、大きい。今はたとえ1つでも、「次元変換法」の可能性が開かれたのだから。

次元変換が、何故可能になるのか。1つの根拠は、 $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 9 \times 9$ だからである。4乗が2乗になっているがゆえに、四次元が二次元に書き換わるのである。

他に似たような場合が無いか。さがしてみよう。

一番小さいスケールでは、 $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 4$ がある。その他にも、 $64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 4 \times 4 = 8 \times 8$; $256 = 2^8 = 4^4 = 16^2$ もある。

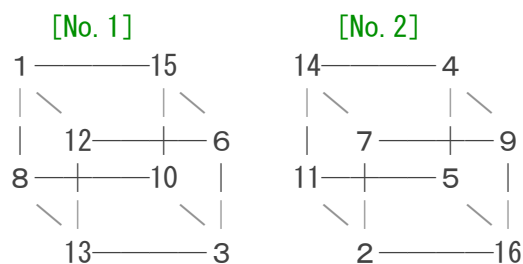
まだ詳しく調べたわけではないが、四次元超立方体二方陣は、平面四方陣に書き換わる。六次元超立方体二方陣は、三次元の立体四方陣や二次元の平面八方陣に書き換わる。八次元超立方体二方陣は、平面十六方陣に書き換わる、のではあるまいか。……

そういう予想のもとに次の実験を試みたいが、その報告は次回に譲ることにしよう。

今は、2つの実例を示すに止めよう。1つは、四次元超立方体二方陣と二次元対称四方陣との一対一対応。

もう1つは、三次元対称立体四方陣を二次元対称八方陣に書き換えた例を示す。

* 2 × 8 形式に次元変換して得た四次元超立方体対称二方陣図 *



* 対称四方陣の実例：2 × 2 × 4 に分解 *

	1	2	行列の定和式	主対角線の定和式		
1	1	15	14	4	1 + 12 + 8 + 13 = 34	1 + 6 + 11 + 16 = 34
	12	6	7	9	1 + 15 + 14 + 4 = 34	4 + 7 + 10 + 13 = 34
2	8	10	11	5	12 + 6 + 7 + 9 = 34	補数定和式：
	13	3	2	16	15 + 6 + 10 + 3 = 34	1 + 16 = 15 + 2 =
					8 + 10 + 11 + 5 = 34	14 + 3 = 4 + 13 =
					14 + 7 + 11 + 2 = 34	12 + 5 = 6 + 11 =
					4 + 9 + 5 + 16 = 34	7 + 10 = 9 + 8 = 17
					13 + 3 + 2 + 16 = 34	

正方連結4数の定和式：

$$1 + 15 + 6 + 12 = 1 + 15 + 10 + 8 = 1 + 12 + 13 + 8 =$$

$$12 + 6 + 3 + 13 = 15 + 6 + 3 + 10 = 8 + 10 + 3 + 13 = 34 \dots \text{No. 1}$$

$$14 + 4 + 5 + 11 = 14 + 7 + 2 + 11 = 14 + 4 + 9 + 7 =$$

$$7 + 9 + 16 + 2 = 4 + 9 + 16 + 5 = 11 + 5 + 16 + 2 = 34 \dots \text{No. 2}$$

異次元間で成り立つ対応連結4数の定和式：

$$1 + 14 + 15 + 4 = 12 + 7 + 6 + 9 =$$

$$8 + 11 + 10 + 5 = 13 + 2 + 3 + 16 = 34 \text{ (元の四方陣の列和に対応)}$$

立体二方陣では、全行全列全柱定和は望むべくもない(1~16の自然数を全個重複なく用いるため)。だから、その代わりに各表面での頂点連結正方4数の定和を実現している。

17の補数8ペアは、この立体の対称の位置に置かれている。それゆえに「主対角線」4本の定和も実現している。

$$1 + 16 = 12 + 5 = 8 + 9 = 13 + 4 = 17$$

次の例は、 $64 = 4 \times 4 \times 4 = 2 \times 2 \times (4 \times 4)$ を利用した「低次元変換」だ。

すなわち、三次元から二次元へと分解変換する。立方体対称四方陣を正方形対称八方陣に書き換える。特別複雑なことをするわけではない。ただ、4面をベタに並べるだけである。

* 三次元対称立体四方陣の解 *

1	48	32	49
63	18	34	15
60	62	21	19
37	35	12	14
6	4	43	45
27	29	54	52
56	7	25	42
41	26	8	55
10	57	39	24
23	40	58	9
13	11	36	38
20	22	61	59
51	53	30	28
46	44	3	5
50	31	47	2
16	33	17	64

* 「二次元対称八方陣」に変換した図

	1	2						
1	1	63	62	4	32	34	35	29
	60	6	7	57	37	27	26	40
	56	10	11	53	41	23	22	44
	13	51	50	16	20	46	47	17
2	48	18	19	45	49	15	14	52
	21	43	42	24	12	54	55	9
	25	39	38	28	8	58	59	5
	36	30	31	33	61	3	2	64

この書き換えは、三次元から二次元へだから直感的に理解しやすい。しかし、分解図を媒介にしている。結果的に4つの平面四方陣を持つ「多重方陣」になっている。

逆を行うにはどうしたらよいか。どういう条件が必要になるのだろうか。

むろん同一面内の全行全列定和はそのまま保存されている。3番目の軸上にある

$1 + 48 + 32 + 49 = 130$ は、平面八方陣では、「対応4数の連結定和」という形に変わっている。これは、「内包五方陣の頂点連結4数の定和」と言ってもよい。立方体の方から持ち込まれたものだ。

- (1) 全行全列定和が成り立つ。
- (2) 65の補数32ペアが点対称の位置に置かれている。
- (3) 主対角線2本の定和も成り立つ。

13. 予定の紙数が尽きたので、簡単に総括して終わろう。

最初は、思考実験の1つとして「四次元超立体魔方陣」を構成したのであったが、配列内のデータ移動や交換に規則的に対応する魔方陣を方法的に実現できることがわかった。

大言壮語すれば、「知的方法があれば、概念は感覚を超えられる」のである。

そして概念を直観しやすい「次元分解図」を工夫するうちに、思わぬ形で収穫が得られた。「次元変換法」である。成り立つ条件が厳しいから、そう簡単に使えるツールではないが、例えば八方陣や九方陣で「多重方陣」を研究している人には、何らかの刺激・参考になるかも知れないと思う。

かつて「型変換」の方法が2つの異なる種類の方陣群を結び付けたように、今後は「次元変換法」が2つの異なる次元の方陣群に思わぬ架橋をしてくれそうである。ミステリアスな魔方陣ワールドのあちこちに風穴が開くと、深奥の内部がどんどん見やすくなる。これは嬉しいことだ。

架橋の根拠は、配列である。我々は、魔方陣の構造を良く見るために配列の構造を良く観察する自己訓練をして来た。そして結果的に魔方陣研究を、配列内部のデータ移動・変換のルール of 考察に結び付けたのである。途中小生はまるで「データベース・プログラム」のデバッグをやっているような気分だったが、魔方陣研究は配列そのものの構造研究に役立つ。そう実感することができた。

最初の方陣研究を始めた頃、小生は、個々の方陣が余りにも「個性的」だったために、各々が孤立している印象しか受けなかった。およそこの世界に「共通性」とか「一般性」とかは全然見出し難かった。

あくまで「基礎論」をやりたい小生としては、まったく悩ましい限りだった。それが、我がチームの総帥鈴木睦前教授から多々ヒントを賜って、幸いにも「原初方陣」や「ひな形変換法」に思い至った。これで構造研究の新たな端緒が開けた。

そして、今回の「次元変換」である。一段と基礎論に踏み込めたように思う。何とかもう一掘りして、方陣の「宿命」を驚づかみにつかみたいと思う。

鈴木前教授にあらためて感謝の念を表し申し上げたい。新たなる抱負とともに。

(Written on May 16, 2001; Aug. 5, 2002(第10項追加); Aug. 8, 2008(改訂版))

Working with MacOS9 & OSX, MWCW & Xcode 3.0: 撰田 寛二(Kanji Setsuda))

E-Mail Address: jag12001@nifty.com