

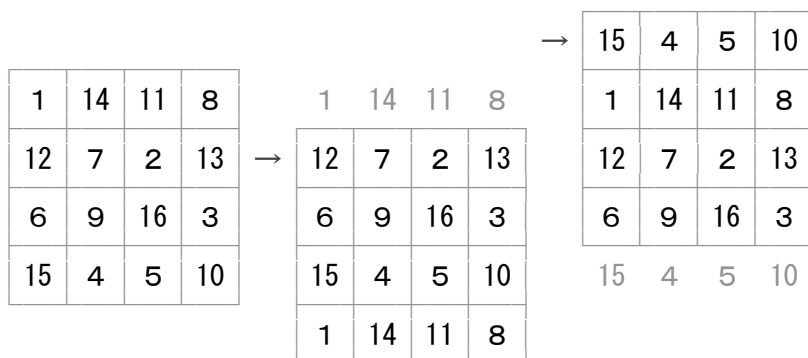
第3部：『魔方陣の新研究』 撰田 寛二  
 第2章：四方形陣の代数的研究（新）  
 第2節：汎四方形陣の研究（新）

0. 「汎四方形陣」とは？

四次の魔方陣は、例えば下図のように4×4の正方形の盤に1～16の自然数を欠落無く重複無く全部入れて、縦横の各列・各行の和が等しくなるように構成した数盤のことである。2つの主対角線上の4数の和も列和・行和に等しくする。

四次の汎対角線型の魔方陣、略して「汎四方形陣」というのは、さらに厳しい条件を付加したものである。例えば、上の1行目を最下行の下に移して新たな方陣を構成する。この場合でも、上の諸条件がすべて成り立たなければならない。縦横の内容に変化は無いから、新たな対角線の和を等しくすればよい。

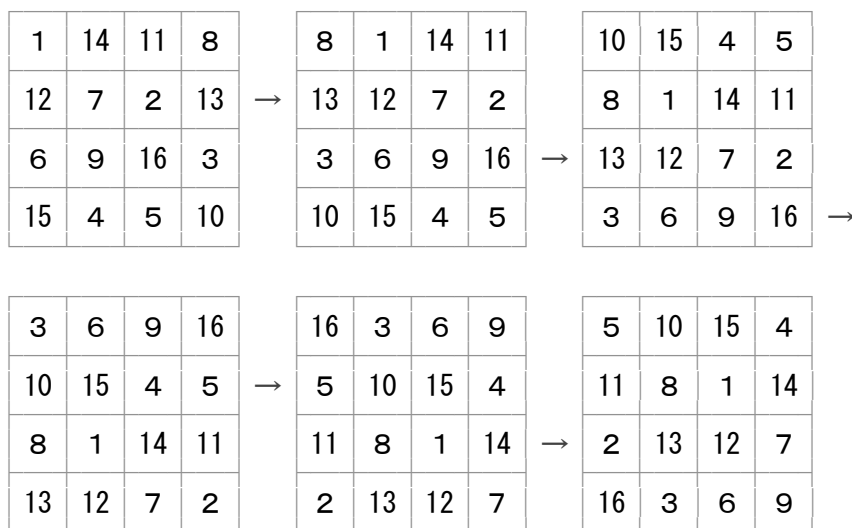
最下行を最上行の上に移して乗せた場合にも、同様に成り立たなければならない。



上下ばかりでなく左右にも移動できなければならない。



さらに繰り返し連続移動も可能。上下・左右の混合移動も可能でなければならない。



いずれの場合でも、縦列横行の内容は保存されているので、新たな対角線上の4数の組合

せに定和の条件が増えるだけである。

### 1. 「汎対角線」とは？

上のような行列の逐次移動だけで、お互いに異なる四方阵が一体いくつ出来るものだろうか？ また新たな主対角線の定和条件は一体いくつ必要になるのだろうか。

次の図は、最初の基本図をもとに、それを逐次移動によって変換した図をすべて網羅したものである。未変換のものも含めて全部で16個出来る。

そのどの場合でも、行列の定和条件は、内容が全部共通で、良く保存されている。

#### \*\* 平面四次の魔方陣の基本図と基本定義式: C=34 \*\*

1	2	3	4	行列の定和を定義する条件式:	
5	6	7	8	$n1+n2+n3+n4=C;$	$n1+n5+n9+n13=C;$
9	10	11	12	$n5+n6+n7+n8=C;$	$n2+n6+n10+n14=C;$
13	14	15	16	$n9+n10+n11+n12=C;$	$n3+n7+n11+n15=C;$
				$n13+n14+n15+n16=C;$	$n4+n8+n12+n16=C;$
				主対角線の定和を定義する条件式:	
				$n1+n6+n11+n16=C;$	$n4+n7+n10+n13=C;$

#### \*\* 汎対角線型四方阵の行列の逐次シフトを網羅した基本概念図 \*\*

#### \*\* 汎対角線型四方阵の汎対角線定和を定義する条件式を求める: C=34 \*\*

<b>1 図</b>	行列の定和式:	<b>2 図</b>	行列の定和式:
1 2 3 4	$n1+n2+n3+n4=C;$	2 3 4 1	$n2+n3+n4+n1=C;$
5 6 7 8	$n5+n6+n7+n8=C;$	6 7 8 5	$n6+n7+n8+n5=C;$
9 10 11 12	$n9+n10+n11+n12=C;$	10 11 12 9	$n10+n11+n12+n9=C;$
13 14 15 16	$n13+n14+n15+n16=C;$	14 15 16 13	$n14+n15+n16+n13=C;$
1 2 3 4	新主対角線の定和式:	2 3 4 1	新主対角線の定和式:
	$n1+n6+n11+n16=C;$		$n2+n7+n12+n13=C;$
	$n4+n7+n10+n13=C;$		$n1+n8+n11+n14=C;$
<b>3 図</b>	行列の定和式:	<b>4 図</b>	行列の定和式:
3 4 1 2	$n3+n4+n1+n2=C;$	4 1 2 3	$n4+n1+n2+n3=C;$
7 8 5 6	$n7+n8+n5+n6=C;$	8 5 6 7	$n8+n5+n6+n7=C;$
11 12 9 10	$n11+n12+n9+n10=C;$	12 9 10 11	$n12+n9+n10+n11=C;$
15 16 13 14	$n15+n16+n13+n14=C;$	16 13 14 15	$n16+n13+n14+n15=C;$
3 4 1 2	新主対角線の定和式:	4 1 2 3	新主対角線の定和式:
	$n3+n8+n9+n14=C;$		$n4+n5+n10+n15=C;$
	$n2+n5+n12+n15=C;$		$n3+n6+n9+n16=C;$
<b>5 図</b>	行列の定和式:	<b>6 図</b>	行列の定和式:
5 6 7 8	$n5+n6+n7+n8=C;$	6 7 8 5	$n6+n7+n8+n5=C;$
9 10 11 12	$n9+n10+n11+n12=C;$	10 11 12 9	$n10+n11+n12+n9=C;$
13 14 15 16	$n13+n14+n15+n16=C;$	14 15 16 13	$n14+n15+n16+n13=C;$
1 2 3 4	$n1+n2+n3+n4=C;$	2 3 4 1	$n2+n3+n4+n1=C;$
5 6 7 8	新主対角線の定和式:	6 7 8 5	新主対角線の定和式:
	$n5+n9+n13+n1=C;$		$n6+n10+n14+n2=C;$
	$n6+n10+n14+n2=C;$		$n7+n11+n15+n3=C;$
	$n7+n11+n15+n3=C;$		$n8+n12+n16+n4=C;$
	$n8+n12+n16+n4=C;$		$n5+n9+n13+n1=C;$
	$n5+n10+n15+n4=C;$		$n6+n11+n16+n1=C;$
	$n8+n11+n14+n1=C;$		$n5+n12+n15+n2=C;$

7 図

7	8	5	6
11	12	9	10
15	16	13	14
3	4	1	2
7	8	5	6

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n7+n8+n5+n6=C; \\ n11+n12+n9+n10=C; \\ n15+n16+n13+n14=C; \\ n3+n4+n1+n2=C; \\ n7+n11+n15+n3=C; \\ n8+n12+n16+n4=C; \\ n5+n9+n13+n1=C; \\ n6+n10+n14+n2=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n7+n12+n13+n2=C; \\ n6+n9+n16+n3=C; \end{aligned}$$

8 図

8	5	6	7
12	9	10	11
16	13	14	15
4	1	2	3
8	5	6	7

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n8+n5+n6+n7=C; \\ n12+n9+n10+n11=C; \\ n16+n13+n14+n15=C; \\ n4+n1+n2+n3=C; \\ n8+n12+n16+n4=C; \\ n5+n9+n13+n1=C; \\ n6+n10+n14+n2=C; \\ n7+n11+n15+n3=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n8+n9+n14+n3=C; \\ n7+n10+n13+n4=C; \end{aligned}$$

9 図

9	10	11	12
13	14	15	16
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n9+n10+n11+n12=C; \\ n13+n14+n15+n16=C; \\ n1+n2+n3+n4=C; \\ n5+n6+n7+n8=C; \\ n9+n13+n1+n5=C; \\ n10+n14+n2+n6=C; \\ n11+n15+n3+n7=C; \\ n12+n16+n4+n8=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n9+n14+n3+n8=C; \\ n12+n15+n2+n5=C; \end{aligned}$$

10 図

10	11	12	9
14	15	16	13
2	3	4	1
6	7	8	5
10	11	12	9

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n10+n11+n12+n9=C; \\ n14+n15+n16+n13=C; \\ n2+n3+n4+n1=C; \\ n6+n7+n8+n5=C; \\ n10+n14+n2+n6=C; \\ n11+n15+n3+n7=C; \\ n12+n16+n4+n8=C; \\ n9+n13+n1+n5=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n10+n15+n4+n5=C; \\ n9+n16+n3+n6=C; \end{aligned}$$

11 図

11	12	9	10
15	16	13	14
3	4	1	2
7	8	5	6
11	12	9	10

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n11+n12+n9+n10=C; \\ n15+n16+n13+n14=C; \\ n3+n4+n1+n2=C; \\ n7+n8+n5+n6=C; \\ n11+n15+n3+n7=C; \\ n12+n16+n4+n8=C; \\ n9+n13+n1+n5=C; \\ n10+n14+n2+n6=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n11+n16+n1+n6=C; \\ n10+n13+n4+n7=C; \end{aligned}$$

12 図

12	9	10	11
16	13	14	15
4	1	2	3
8	5	6	7
12	9	10	11

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n12+n9+n10+n11=C; \\ n16+n13+n14+n15=C; \\ n4+n1+n2+n3=C; \\ n8+n5+n6+n7=C; \\ n12+n16+n4+n8=C; \\ n9+n13+n1+n5=C; \\ n10+n14+n2+n6=C; \\ n11+n15+n3+n7=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n12+n13+n2+n7=C; \\ n11+n14+n1+n8=C; \end{aligned}$$

13 図

13	14	15	16
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n13+n14+n15+n16=C; \\ n1+n2+n3+n4=C; \\ n5+n6+n7+n8=C; \\ n9+n10+n11+n12=C; \\ n13+n1+n5+n9=C; \\ n14+n2+n6+n10=C; \\ n15+n3+n7+n11=C; \\ n16+n4+n8+n12=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n13+n2+n7+n12=C; \\ n16+n3+n6+n9=C; \end{aligned}$$

14 図

14	15	16	13
2	3	4	1
6	7	8	5
10	11	12	9
14	15	16	13

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n14+n15+n16+n13=C; \\ n2+n3+n4+n1=C; \\ n6+n7+n8+n5=C; \\ n10+n11+n12+n9=C; \\ n14+n2+n6+n10=C; \\ n15+n3+n7+n11=C; \\ n16+n4+n8+n12=C; \\ n13+n1+n5+n9=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n14+n3+n8+n9=C; \\ n13+n4+n7+n10=C; \end{aligned}$$

15 図

15	16	13	14
3	4	1	2
7	8	5	6
11	12	9	10
15	16	13	14

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n15+n16+n13+n14=C; \\ n3+n4+n1+n2=C; \\ n7+n8+n5+n6=C; \\ n11+n12+n9+n10=C; \\ n15+n3+n7+n11=C; \\ n16+n4+n8+n12=C; \\ n13+n1+n5+n9=C; \\ n14+n2+n6+n10=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n15+n4+n5+n10=C; \\ n14+n1+n8+n11=C; \end{aligned}$$

16 図

16	13	14	15
4	1	2	3
8	5	6	7
12	9	10	11
16	13	14	15

行列の定和式:

$$\begin{aligned} n16+n13+n14+n15=C; \\ n4+n1+n2+n3=C; \\ n8+n5+n6+n7=C; \\ n12+n9+n10+n11=C; \\ n16+n4+n8+n12=C; \\ n13+n1+n5+n9=C; \\ n14+n2+n6+n10=C; \\ n15+n3+n7+n11=C; \\ \text{新主対角線の定和式:} \\ n16+n1+n6+n11=C; \\ n15+n2+n5+n12=C; \end{aligned}$$

\*\* 新主対角線の定和式を集めたリスト: C=34 (各式内部の順序を整理) \*\*

n1+n6+n11+n16=C ... pd11;	n4+n7+n10+n13=C ... pd12;
n2+n7+n12+n13=C ... pd21;	n1+n8+n11+n14=C ... pd22;
n3+n8+n9+n14=C ... pd31;	n2+n5+n12+n15=C ... pd32;
n4+n5+n10+n15=C ... pd41;	n3+n6+n9+n16=C ... pd42;
n4+n5+n10+n15=C ... pd51;	n1+n8+n11+n14=C ... pd52;
n1+n6+n11+n16=C ... pd61;	n2+n5+n12+n15=C ... pd62;
n2+n7+n12+n13=C ... pd71;	n3+n6+n9+n16=C ... pd72;
n3+n8+n9+n14=C ... pd81;	n4+n7+n10+n13=C ... pd82;
n3+n8+n9+n14=C ... pd91;	n2+n5+n12+n15=C ... pd92;
n4+n5+n10+n15=C ... pd101;	n3+n6+n9+n16=C ... pd102;
n1+n6+n11+n16=C ... pd111;	n4+n7+n10+n13=C ... pd112;
n2+n7+n12+n13=C ... pd121;	n1+n8+n11+n14=C ... pd122;
n2+n7+n12+n13=C ... pd131;	n3+n6+n9+n16=C ... pd132;
n3+n8+n9+n14=C ... pd141;	n4+n7+n10+n13=C ... pd142;
n4+n5+n10+n15=C ... pd151;	n1+n8+n11+n14=C ... pd152;
n1+n6+n11+n16=C ... pd161;	n2+n5+n12+n15=C ... pd162;

上のように新主対角線の定和式だけを集めてみると、重複しているものが結構ある。相互に異なったものは、最初の8例に全部が出尽くしていて、以降に新しいものは出て来ない。

従って、上の8式を最初に仮定するだけで、行列の逐次移動16通りの全てが可能となる。すなわち、「汎対角線型四方陣」が可能となる。

これからは、上の pd11~pd42 の8式をもって「汎対角線」を代表させ、「汎対角線定和の条件式」と言うことにする。すなわち、汎対角線は8本ある。8本しかない。

## 2. 「方陣拡張空間」

いま数盤の内容を1行1列ずつコピーして左右・上下に拡張し、下図のように「方陣拡張空間」を作る。汎対角線方陣の行列の逐次移動は、この拡張空間内での方陣枠の移動に正確に対応することがわかる。方陣枠は左右・上下・斜め方向いずれにも移動可能である。

移動して得られた結果は、この空間内に必ず見つけられる。幾つもの対角線も、この空間内に必ず見つかる。

したがって、この拡張空間を1つ作っておけば、幾つもの派生形を簡単に作ることができる。また幾つもの方陣を分類して、同じ内容のものを1つの空間に帰着させることができる。その際、先ず n1を含む行・列の構成要素をチェックする。そして、単純な反転・回転・対称移動によって得られる形は、同一種類にまとめる。

今後は、この空間内に見つかる幾つもの方陣を同一の集合にまとめ、あえて同一種類と見なす。そして、拡張空間そのものの種類が幾つ見つかるかを数えることにしよう。

•	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	•													
•	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	•													
•	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	•													
•	2	3	4	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td></tr><tr><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr><tr><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr></table>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	•
1	2	3	4																					
5	6	7	8																					
9	10	11	12																					
13	14	15	16																					
•	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	•													
•	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	•													
•	14	15	16	13	14	15	16	13	14	15	•													
•	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	•													
•	6	7	8	5	6	7	8	5	6	7	•													
•	10	11	12	9	10	11	12	9	10	11	•													

汎対角線四方陣の「拡張空間」を上図のように定義する。数値は、あくまで相対的なポジション(場所)の名前を表す。

拡張空間から読み取れる異形方阵の例： 清書してみると、良くわかる。

[1] 原型('n'を省いてある)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

[2] タイプ2

2	3	4	1
6	7	8	5
10	11	12	9
14	15	16	13

その清書形

1	4	3	2
5	8	7	6
9	12	11	10
13	16	15	14

[3] タイプ3

5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
1	2	3	4

清書形

1	2	3	4
13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8

[4] タイプ4

6	7	8	5
10	11	12	9
14	15	16	13
2	3	4	1

清書形

1	4	3	2
13	16	15	14
9	12	11	10
5	8	7	6

連立方程式を用いて「汎四方陣」をあらためて定義しておこう。各々の {n1, n2, n3, ..., n16} は、値として1~16の重複しない自然数を全個取るものとする。

「横の4行」：

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 &= K && \text{..... (1)} \\ n_5 + n_6 + n_7 + n_8 &= K && \text{..... (2)} \\ n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12} &= K && \text{..... (3)} \\ n_{13} + n_{14} + n_{15} + n_{16} &= K && \text{..... (4)} \end{aligned}$$

「縦の4列」：

$$\begin{aligned} n_1 + n_5 + n_9 + n_{13} &= 34 && \text{..... (5)} \\ n_2 + n_6 + n_{10} + n_{14} &= 34 && \text{..... (6)} \\ n_3 + n_7 + n_{11} + n_{15} &= 34 && \text{..... (7)} \\ n_4 + n_8 + n_{12} + n_{16} &= 34 && \text{..... (8)} \end{aligned}$$

(1)~(4)の4式を加えると、

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{15} + n_{16} = 4 * K$$

よって  $16 * (16 + 1) \div 2 = 4 * K$

$$\therefore K = 34$$

8本ある汎対角線は、次のように定義する：

$$\begin{aligned} n_1 + n_6 + n_{11} + n_{16} &= 34 && \text{..... (9)} & n_3 + n_6 + n_9 + n_{16} &= 34 && \text{..... (13)} \\ n_1 + n_8 + n_{11} + n_{14} &= 34 && \text{..... (10)} & n_3 + n_8 + n_9 + n_{14} &= 34 && \text{..... (14)} \\ n_2 + n_5 + n_{12} + n_{15} &= 34 && \text{..... (11)} & n_4 + n_5 + n_{10} + n_{15} &= 34 && \text{..... (15)} \\ n_2 + n_7 + n_{12} + n_{13} &= 34 && \text{..... (12)} & n_4 + n_7 + n_{10} + n_{13} &= 34 && \text{..... (16)} \end{aligned}$$

3. ここで上の定義式だけで、どれだけの解の総数があるのか、コンピュータに数えさせておこう。リスト出力用の不等式は特に付けずに、原始解の集合を求める。

以下に我がプログラムを示す。初心者にもわかりやすい記述を心がけた。

```

/** The First Program for   */
/* Pandiagonal Magic Squares 4*4 */
/* 'MS44PD384.c' by Kanji Setsuda */
/* on MacOS Xcode 1.5: 01/23/05 */
/**/
#include <stdio.h>
/**/
short LSM;
short cnt, cnt2;
short nm[17], uf1g[17];
short tnm[7][17];

```

```

/**/
/* Main Program */
int main(){
  short n;
  printf("\n*** Pan-Diagonal Magic Squares 4*4 ***\n");
  for(n=0;n<17;n++){nm[n]=0; uflg[n]=0;}
  LSM=34; cnt=0; cnt2=0;
  stp01(); /* Begin The Calculations */
  printf("\n* Count = %d\n",cnt);
  printf(" OK!\n");
  return 0;
}
/**/
/* Begin The Calculations */
/* Set n1 */
void stp01(){
  short a;
  for(a=1;a<17;a++){
    if(uflg[a]==0){
      nm[1]=a; uflg[a]=1;
      stp02();
      uflg[a]=0;}
  }
}
/* Set n2 */
void stp02(){
  short a;
  for(a=1;a<17;a++){
    if(uflg[a]==0){
      nm[2]=a; uflg[a]=1;
      stp03();
      uflg[a]=0;}
  }
}
/* Set n3 */
void stp03(){
  short a;
  for(a=1;a<17;a++){
    if(uflg[a]==0){
      nm[3]=a; uflg[a]=1;
      stp04();
      uflg[a]=0;}
  }
}
/* Set n4=LSM-n1-n2-n3 */
void stp04(){
  short a;
  a=LSM-nm[1]-nm[2]-nm[3];
  if((0<a)&&(a<17)){
    if(uflg[a]==0){
      nm[4]=a; uflg[a]=1;
      stp05();
      uflg[a]=0;}}}
}
/* Set n5 */
void stp05(){
  short a;
  for(a=1;a<17;a++){
    if(uflg[a]==0){
      nm[5]=a; uflg[a]=1;
      stp06();
      uflg[a]=0;}
  }
}
/* Set n9 */
void stp06(){
  short a;
  for(a=1;a<17;a++){
    if(uflg[a]==0){
      nm[9]=a; uflg[a]=1;
      stp07();
      uflg[a]=0;}
  }
}
/* Set n13=LSM-n1-n5-n9 */
void stp07(){
  short a;
  a=LSM-nm[1]-nm[5]-nm[9];
  if((0<a)&&(a<17)){
    if(uflg[a]==0){
      nm[13]=a; uflg[a]=1;
      stp08();
      uflg[a]=0;}}}
}
/* Set n6 */
void stp08(){
  short a;
  for(a=1;a<17;a++){
    if(uflg[a]==0){
      nm[6]=a; uflg[a]=1;
      stp09();
      uflg[a]=0;}
  }
}
/* Set n16=LSM-n3-n6-n9 */
void stp09(){
  short a;
  a=LSM-nm[3]-nm[6]-nm[9];
  if((0<a)&&(a<17)){
    if(uflg[a]==0){
      nm[16]=a; uflg[a]=1;
      stp10();
      uflg[a]=0;}}}
}
}

```

```

/* Set n11=LSM-n1-n6-n16 */
void stp10(){
short a;
a=LSM-nm[1]-nm[6]-nm[16];
if((0<a)&&(a<17)){
if(uflg[a]==0){
nm[11]=a; uflg[a]=1;
stp11();
uflg[a]=0;}}
}
/* Set n7 */
void stp11(){
short a;
for(a=1;a<17;a++){
if(uflg[a]==0){
nm[7]=a; uflg[a]=1;
stp12();
uflg[a]=0;}}
}
}
/* Set n8=LSM-n5-n6-n7 */
void stp12(){
short a;
a=LSM-nm[5]-nm[6]-nm[7];
if((0<a)&&(a<17)){
if(uflg[a]==0){
nm[8]=a; uflg[a]=1;
stp13();
uflg[a]=0;}}
}
}
/* Set n10=LSM-n4-n7-n13 */
void stp13(){
short a;
a=LSM-nm[4]-nm[7]-nm[13];
if((0<a)&&(a<17)){
if(uflg[a]==0){
nm[10]=a; uflg[a]=1;
stp14();
uflg[a]=0;}}
}
}

```

```

/**/
/* Print the Answers */
void ansprint(){
short n;
tnm[cnt2][0]=cnt+1;
for(n=1;n<17;n++){tnm[cnt2][n]=nm[n];}
cnt++; cnt2++;
if(cnt2==6){pr6ans(); cnt2=0;}
}
/**/
/** Print 6 Answers */
void pr6ans(void){
short l,l4,m,n;
for(m=0;m<6;m++){printf("%13d/",tnm[m][0]);}
printf("\n");
for(l=0;l<4;l++){l4=l*4;
for(m=0;m<6;m++){
printf(" ");

```

```

→ /* Set n12=LSM-n9-n10-n11 */
void stp14(){
short a,b,c;
a=LSM-nm[9]-nm[10]-nm[11];
b=LSM-nm[4]-nm[8]-nm[16];
c=LSM-nm[2]-nm[7]-nm[13];
if((0<a)&&(a<17)){
if((a==b)&&(a==c)){
if(uflg[a]==0){
nm[12]=a; uflg[a]=1;
stp15();
uflg[a]=0;}}}
}
}
/* Set n14=LSM-n2-n6-n10 */
void stp15(){
short a,b,c;
a=LSM-nm[2]-nm[6]-nm[10];
b=LSM-nm[1]-nm[8]-nm[11];
c=LSM-nm[3]-nm[8]-nm[9];
if((0<a)&&(a<17)){
if((a==b)&&(a==c)){
if(uflg[a]==0){
nm[14]=a; uflg[a]=1;
stp16();
uflg[a]=0;}}}
}
}
/* Set n15=LSM-n3-n7-n11 */
void stp16(){
short a,b,c,d;
a=LSM-nm[3]-nm[7]-nm[11];
b=LSM-nm[2]-nm[5]-nm[12];
c=LSM-nm[4]-nm[5]-nm[10];
d=LSM-nm[13]-nm[14]-nm[16];
if((0<a)&&(a<17)){
if((a==b)&&(a==c)&&(a==d)){
if(uflg[a]==0){
nm[15]=a; uflg[a]=1;
ansprint();
uflg[a]=0;}}}
}
}

```

```

    for(n=1;n<5;n++){printf("%3d",tnm[m][l4+n]);}
}
printf("\n");
}
}
/**/

```

\* 汎四方陣の原始解384個のリスト (部分) \*

1/	2/	3/	4/	5/	6/
1 8 10 15	1 8 10 15	1 8 11 14	1 8 11 14	1 8 13 12	1 8 13 12
12 13 3 6	14 11 5 4	12 13 2 7	15 10 5 4	14 11 2 7	15 10 3 6
7 2 16 9	7 2 16 9	6 3 16 9	6 3 16 9	4 5 16 9	4 5 16 9
14 11 5 4	12 13 3 6	15 10 5 4	12 13 2 7	15 10 3 6	14 11 2 7
7/	8/	9/	10/	11/	12/
1 12 6 15	1 12 6 15	1 12 7 14	1 12 7 14	1 12 13 8	1 12 13 8
8 13 3 10	14 7 9 4	8 13 2 11	15 6 9 4	14 7 2 11	15 6 3 10
11 2 16 5	11 2 16 5	10 3 16 5	10 3 16 5	4 9 16 5	4 9 16 5
14 7 9 4	8 13 3 10	15 6 9 4	8 13 2 11	15 6 3 10	14 7 2 11
13/	14/	15/	16/	17/	18/
1 14 4 15	1 14 4 15	1 14 7 12	1 14 7 12	1 14 11 8	1 14 11 8
8 11 5 10	12 7 9 6	8 11 2 13	15 4 9 6	12 7 2 13	15 4 5 10
13 2 16 3	13 2 16 3	10 5 16 3	10 5 16 3	6 9 16 3	6 9 16 3
12 7 9 6	8 11 5 10	15 4 9 6	8 11 2 13	15 4 5 10	12 7 2 13
19/	20/	21/	22/	23/	24/
1 15 4 14	1 15 4 14	1 15 6 12	1 15 6 12	1 15 10 8	1 15 10 8
8 10 5 11	12 6 9 7	8 10 3 13	14 4 9 7	12 6 3 13	14 4 5 11
13 3 16 2	13 3 16 2	11 5 16 2	11 5 16 2	7 9 16 2	7 9 16 2
12 6 9 7	8 10 5 11	14 4 9 7	8 10 3 13	14 4 5 11	12 6 3 13
25/	26/	27/	28/	29/	30/
2 7 9 16	2 7 9 16	2 7 12 13	2 7 12 13	2 7 14 11	2 7 14 11
11 14 4 5	13 12 6 3	11 14 1 8	16 9 6 3	13 12 1 8	16 9 4 5
8 1 15 10	8 1 15 10	5 4 15 10	5 4 15 10	3 6 15 10	3 6 15 10
13 12 6 3	11 14 4 5	16 9 6 3	11 14 1 8	16 9 4 5	13 12 1 8
31/	32/	33/	34/	35/	36/
2 11 5 16	2 11 5 16	2 11 8 13	2 11 8 13	2 11 14 7	2 11 14 7
7 14 4 9	13 8 10 3	7 14 1 12	16 5 10 3	13 8 1 12	16 5 4 9
12 1 15 6	12 1 15 6	9 4 15 6	9 4 15 6	3 10 15 6	3 10 15 6
13 8 10 3	7 14 4 9	16 5 10 3	7 14 1 12	16 5 4 9	13 8 1 12
37/	38/	39/	40/	41/	42/
2 13 3 16	2 13 3 16	2 13 8 11	2 13 8 11	2 13 12 7	2 13 12 7
7 12 6 9	11 8 10 5	7 12 1 14	16 3 10 5	11 8 1 14	16 3 6 9
14 1 15 4	14 1 15 4	9 6 15 4	9 6 15 4	5 10 15 4	5 10 15 4
11 8 10 5	7 12 6 9	16 3 10 5	7 12 1 14	16 3 6 9	11 8 1 14
43/	44/	45/	46/	47/	48/
2 16 3 13	2 16 3 13	2 16 5 11	2 16 5 11	2 16 9 7	2 16 9 7
7 9 6 12	11 5 10 8	7 9 4 14	13 3 10 8	11 5 4 14	13 3 6 12
14 4 15 1	14 4 15 1	12 6 15 1	12 6 15 1	8 10 15 1	8 10 15 1
11 5 10 8	7 9 6 12	13 3 10 8	7 9 4 14	13 3 6 12	11 5 4 14
49/	50/	51/	52/	53/	54/
3 6 9 16	3 6 9 16	3 6 12 13	3 6 12 13	3 6 15 10	3 6 15 10
10 15 4 5	13 12 7 2	10 15 1 8	16 9 7 2	13 12 1 8	16 9 4 5
8 1 14 11	8 1 14 11	5 4 14 11	5 4 14 11	2 7 14 11	2 7 14 11
13 12 7 2	10 15 4 5	16 9 7 2	10 15 1 8	16 9 4 5	13 12 1 8

.....



```

355/      356/      357/      358/      359/      360/
15 10 3 6 15 10 3 6 15 10 5 4 15 10 5 4 15 10 8 1 15 10 8 1
 1 8 13 12  4 5 16 9  1 8 11 14  6 3 16 9  4 5 11 14  6 3 13 12
14 11 2 7 14 11 2 7 12 13 2 7 12 13 2 7  9 16 2 7  9 16 2 7
 4 5 16 9  1 8 13 12  6 3 16 9  1 8 11 14  6 3 13 12  4 5 11 14

361/      362/      363/      364/      365/      366/
16 2 7 9 16 2 7 9 16 2 11 5 16 2 11 5 16 2 13 3 16 2 13 3
 3 13 12 6  5 11 14 4  3 13 8 10  9 7 14 4  5 11 8 10  9 7 12 6
10 8 1 15 10 8 1 15  6 12 1 15  6 12 1 15  4 14 1 15  4 14 1 15
 5 11 14 4  3 13 12 6  9 7 14 4  3 13 8 10  9 7 12 6  5 11 8 10

367/      368/      369/      370/      371/      372/
16 3 6 9 16 3 6 9 16 3 10 5 16 3 10 5 16 3 13 2 16 3 13 2
 2 13 12 7  5 10 15 4  2 13 8 11  9 6 15 4  5 10 8 11  9 6 12 7
11 8 1 14 11 8 1 14  7 12 1 14  7 12 1 14  4 15 1 14  4 15 1 14
 5 10 15 4  2 13 12 7  9 6 15 4  2 13 8 11  9 6 12 7  5 10 8 11

373/      374/      375/      376/      377/      378/
16 5 4 9 16 5 4 9 16 5 10 3 16 5 10 3 16 5 11 2 16 5 11 2
 2 11 14 7  3 10 15 6  2 11 8 13  9 4 15 6  3 10 8 13  9 4 14 7
13 8 1 12 13 8 1 12  7 14 1 12  7 14 1 12  6 15 1 12  6 15 1 12
 3 10 15 6  2 11 14 7  9 4 15 6  2 11 8 13  9 4 14 7  3 10 8 13

379/      380/      381/      382/      383/      384/
16 9 4 5 16 9 4 5 16 9 6 3 16 9 6 3 16 9 7 2 16 9 7 2
 2 7 14 11  3 6 15 10  2 7 12 13  5 4 15 10  3 6 12 13  5 4 14 11
13 12 1 8 13 12 1 8 11 14 1 8 11 14 1 8 10 15 1 8 10 15 1 8
 3 6 15 10  2 7 14 11  5 4 15 10  2 7 12 13  5 4 14 11  3 6 12 13

```

\* Count = 384 OK!

汎四方陣の場合も、対称四方陣の場合と同じように、原始解の集合の中には「反転形」，「回転形」が当然含まれている。鏡映反転や 90度ずつの回転は、もともと次数やタイプに全然関係なくできる変換法だから。その概念図は、下図のように表される。

そこで、 $n1 < n4 < n13$ :  $n1 < n16$ ; というリスト出力用の不等式をプログラムに新たに加えて、「標準解」(「代表解」のこと)を求めてみよう。

[反転と回転]

```

0/      1/      2/      3/
1 2 3 4 13 9 5 1 16 15 14 13  4 8 12 16
5 6 7 8 14 10 6 2 12 11 10 9  3 7 11 15
9 10 11 12 15 11 7 3  8 7 6 5  2 6 10 14
13 14 15 16 16 12 8 4  4 3 2 1  1 5 9 13

4/      5/      6/      7/
1 5 9 13  4 3 2 1 16 12 8 4 13 14 15 16
2 6 10 14  8 7 6 5 15 11 7 3  9 10 11 12
3 7 11 15 12 11 10 9 14 10 6 2  5 6 7 8
4 8 12 16 16 15 14 13 13 9 5 1  1 2 3 4

```

```

/**/
/* Set n4=LSM-n1-n2-n3 & n1<n4 */
void stp04(){
short a;
a=LSM-nm[1]-nm[2]-nm[3];
if((nm[1]<a)&&(a<17)){
  if(uflg[a]==0){
    nm[4]=a; uflg[a]=1;

```

```

    stp05();
    uflg[a]=0;}}
}
/**/
/* Set n13=LSM-n1-n5-n9 & n4<n13 */
void stp07(){
short a;
a=LSM-nm[1]-nm[5]-nm[9];
if((nm[4]<a)&&(a<17)){
    if(uflg[a]==0){
        nm[13]=a; uflg[a]=1;
        stp08();
        uflg[a]=0;}}
}
/**/
/* Set n16=LSM-n3-n6-n9 & n1<n16 */
void stp09(){
short a;
a=LSM-nm[3]-nm[6]-nm[9];
if((nm[1]<a)&&(a<17)){
    if(uflg[a]==0){
        nm[16]=a; uflg[a]=1;
        stp10();
        uflg[a]=0;}}
}
/**/

```

\* 汎四方陣の標準解48個のリスト (全) \*

1/	2/	3/	4/	5/	6/
1 8 11 14	1 8 13 12	1 8 13 12	1 12 7 14	1 12 13 8	1 12 13 8
12 13 2 7	14 11 2 7	15 10 3 6	8 13 2 11	14 7 2 11	15 6 3 10
6 3 16 9	4 5 16 9	4 5 16 9	10 3 16 5	4 9 16 5	4 9 16 5
15 10 5 4	15 10 3 6	14 11 2 7	15 6 9 4	15 6 3 10	14 7 2 11
7/	8/	9/	10/	11/	12/
1 14 7 12	1 14 11 8	1 14 11 8	1 15 6 12	1 15 10 8	1 15 10 8
8 11 2 13	12 7 2 13	15 4 5 10	8 10 3 13	12 6 3 13	14 4 5 11
10 5 16 3	6 9 16 3	6 9 16 3	11 5 16 2	7 9 16 2	7 9 16 2
15 4 9 6	15 4 5 10	12 7 2 13	14 4 9 7	14 4 5 11	12 6 3 13
13/	14/	15/	16/	17/	18/
2 7 12 13	2 7 14 11	2 7 14 11	2 11 8 13	2 11 14 7	2 11 14 7
11 14 1 8	13 12 1 8	16 9 4 5	7 14 1 12	13 8 1 12	16 5 4 9
5 4 15 10	3 6 15 10	3 6 15 10	9 4 15 6	3 10 15 6	3 10 15 6
16 9 6 3	16 9 4 5	13 12 1 8	16 5 10 3	16 5 4 9	13 8 1 12
19/	20/	21/	22/	23/	24/
2 13 8 11	2 13 12 7	2 13 12 7	2 16 5 11	2 16 9 7	2 16 9 7
7 12 1 14	11 8 1 14	16 3 6 9	7 9 4 14	11 5 4 14	13 3 6 12
9 6 15 4	5 10 15 4	5 10 15 4	12 6 15 1	8 10 15 1	8 10 15 1
16 3 10 5	16 3 6 9	11 8 1 14	13 3 10 8	13 3 6 12	11 5 4 14
25/	26/	27/	28/	29/	30/
3 6 15 10	3 6 15 10	3 10 15 6	3 10 15 6	3 13 8 10	3 13 12 6
13 12 1 8	16 9 4 5	13 8 1 12	16 5 4 9	6 12 1 15	10 8 1 15
2 7 14 11	2 7 14 11	2 11 14 7	2 11 14 7	9 7 14 4	5 11 14 4
16 9 4 5	13 12 1 8	16 5 4 9	13 8 1 12	16 2 11 5	16 2 7 9

31/ 3 13 12 6 16 2 7 9 5 11 14 4 10 8 1 15	32/ 3 16 5 10 6 9 4 15 12 7 14 1 13 2 11 8	33/ 3 16 9 6 10 5 4 15 8 11 14 1 13 2 7 12	34/ 3 16 9 6 13 2 7 12 8 11 14 1 10 5 4 15	35/ 4 5 16 9 14 11 2 7 1 8 13 12 15 10 3 6	36/ 4 5 16 9 15 10 3 6 1 8 13 12 14 11 2 7
37/ 4 9 16 5 14 7 2 11 1 12 13 8 15 6 3 10	38/ 4 9 16 5 15 6 3 10 1 12 13 8 14 7 2 11	39/ 4 14 7 9 5 11 2 16 10 8 13 3 15 1 12 6	40/ 4 14 11 5 9 7 2 16 6 12 13 3 15 1 8 10	41/ 4 14 11 5 15 1 8 10 6 12 13 3 9 7 2 16	42/ 4 15 6 9 5 10 3 16 11 8 13 2 14 1 12 7
43/ 4 15 10 5 9 6 3 16 7 12 13 2 14 1 8 11	44/ 4 15 10 5 14 1 8 11 7 12 13 2 9 6 3 16	45/ 5 4 15 10 16 9 6 3 2 7 12 13 11 14 1 8	46/ 5 16 3 10 4 9 6 15 14 7 12 1 11 2 13 8	47/ 6 3 16 9 15 10 5 4 1 8 11 14 12 13 2 7	48/ 6 15 4 9 3 10 5 16 13 8 11 2 12 1 14 7

\* Count = 48 OK!

解の総数が、原始解でも標準解でも、対称四方陣の場合とそっくりで、驚かされる。では、基本解も3個しか無いのであろうか。変換法の研究が必要になる。

4. 汎対角線魔方陣は、概念の最初から行列の逐次移動を可能としている。例の、最上行を最下行の下側に移動する、あるいは最左列を最右列の右側に移動する、... という変形だ。これは「変換法」そのものだ。ならば、この変換の方向や回数を組み合わせて、一体全部で幾つの異形を作り出すことが可能であろうか。

横移動は、4回繰り返すと元に戻る。縦移動も、4回繰り返すと元に戻る。

無変換と各3回の変換を仮定し、縦横を組み合わせると、結局4×4=16個の異形が出来ることがわかる。下図を見てほしい。

1/, 2/, 3/は、縦方向の行の移動を表現し、4/, 8/, 12/は、横方向の列の移動を表現する。5/は、1/, 4/の合成。10/は、2/, 8/の合成である。

\* 汎四方陣の16タイプの変換概念図 \*

0/ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16	1/ 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 1 2 3 4	2/ 9 10 11 12 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12	3/ 13 14 15 16 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
4/ 2 3 4 1 6 7 8 5 10 11 12 9 14 15 16 13	5/ 6 7 8 5 10 11 12 9 14 15 16 13 2 3 4 1	6/ 10 11 12 9 14 15 16 13 2 3 4 1 6 7 8 5	7/ 14 15 16 13 2 3 4 1 6 7 8 5 10 11 12 9
8/ 3 4 1 2 7 8 5 6 11 12 9 10 15 16 13 14	9/ 7 8 5 6 11 12 9 10 15 16 13 14 3 4 1 2	10/ 11 12 9 10 15 16 13 14 3 4 1 2 7 8 5 6	11/ 15 16 13 14 3 4 1 2 7 8 5 6 11 12 9 10
12/ 4 1 2 3 8 5 6 7 12 9 10 11 16 13 14 15	13/ 8 5 6 7 12 9 10 11 16 13 14 15 4 1 2 3	14/ 12 9 10 11 16 13 14 15 4 1 2 3 8 5 6 7	15/ 16 13 14 15 4 1 2 3 8 5 6 7 12 9 10 11

この変換法によって、原始解 384個を分類・整理すると、16個ずつのグループが 24個出来る。さらに反転形・回転形を整理すると、8分の1の3個が「基本解」ということになる（はずである）。

\* 「清書形」の概念図 \*

0/				1/			
1	2	3	4	1	2	3	4
5	6	7	8	13	14	15	16
9	10	11	12	9	10	11	12
13	14	15	16	5	6	7	8
4/				5/			
1	4	3	2	1	4	3	2
5	8	7	6	13	16	15	14
9	12	11	10	9	12	11	10
13	16	15	14	5	8	7	6

基本解は、 $n1 = 1$  の標準解の中からさがす。  
 上の図の一部を  $n1 < n4 < n13$ ;  $n1 < n16$ ; に  
 よって清書すると、左図のようになる。  
 必要な 0/, 1/, 4/, 5/のみを清書した。

{n2, n4} の列, {n5, n13} の行の間で、相互  
 に交換が起きていることがわかる。  
 ならば、例えば、 $n2 < n4$ ;  $n5 < n13$ ; という  
 不等式を仮定すれば、基本解が求まる!?

\* 汎四方陣の基本解3個のリスト \*

1/				2/				3/			
1	8	11	14	1	8	13	12	1	12	7	14
12	13	2	7	14	11	2	7	8	13	2	11
6	3	16	9	4	5	16	9	10	3	16	5
15	10	5	4	15	10	3	6	15	6	9	4

\* Count = 3

やはり、汎四方陣の場合も、基本解は3個ということになった。

5. 汎四方陣の概要を掴んだところで、代数的研究を試みる。定義を再録する。

14	15	16	13	14	15	16	13	14	15
2	3	4	1   2   3   4	1	2	3			
6	7	8	5   6   7   8	5	6	7			
10	11	12	9   10   11   12	9	10	11			
14	15	16	13   14   15   16	13	14	15			
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

[行列の定和条件式]

- $n1+n2+n3+n4=34$  ... (1);
- $n5+n6+n7+n8=34$  ... (2);
- $n9+n10+n11+n12=34$  ... (3);
- $n13+n14+n15+n16=34$  ... (4);
- $n1+n5+n9+n13=34$  ... (5);
- $n2+n6+n10+n14=34$  ... (6);
- $n3+n7+n11+n15=34$  ... (7);
- $n4+n8+n12+n16=34$  ... (8);

[汎対角線定和の条件式]

- $n1+n6+n11+n16=34$  .... (9);
- $n1+n8+n11+n14=34$  ... (10);
- $n2+n7+n12+n13=34$  ... (11);
- $n2+n5+n12+n15=34$  ... (12);
- $n3+n8+n9+n14=34$  ... (13);
- $n3+n6+n9+n16=34$  ... (14);
- $n4+n5+n10+n15=34$  ... (15);
- $n4+n7+n10+n13=34$  ... (16);

この16本の式を適宜関わらせる。必要があれば加減算する。

先ず汎対角線の方程式の内から、共通項を含む2式ずつを取り出す。

$n1 + n6 + n11 + n16 = 34$	.... (9)	$n2 + n5 + n12 + n15 = 34$	... (11)
$n1 + n8 + n11 + n14 = 34$	... (10)	$n2 + n7 + n12 + n13 = 34$	... (12)
$n1 + n11 = C$	とおくと,	$n2 + n12 = D$	とおくと,
$n6 + n16 = n8 + n14 = 34 - C$	... (17)	$n5 + n15 = n7 + n13 = 34 - D$	... (18)

$$\begin{array}{l|l}
n_3 + n_6 + n_9 + n_{16} = 34 & \dots (13) \\
n_3 + n_8 + n_9 + n_{14} = 34 & \dots (14) \\
n_3 + n_9 = E & \text{とおくと,} \\
n_6 + n_{16} = n_8 + n_{14} = 34 - E & \dots (19) \\
\text{ところが, これは(17)式と内容が同じだ} & \\
\text{から, } E = C & 
\end{array}
\quad
\begin{array}{l|l}
n_4 + n_5 + n_{10} + n_{15} = 34 & \dots (15) \\
n_4 + n_7 + n_{10} + n_{13} = 34 & \dots (16) \\
n_4 + n_{10} = F & \text{とおくと,} \\
n_5 + n_{15} = n_7 + n_{13} = 34 - F & \dots (20) \\
\text{ところが, これは(18)式と内容が同じだ} & \\
\text{から, } F = D & 
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{一方, } n_1 + n_{11} = C \\
n_2 + n_{12} = D \\
n_3 + n_9 = C \\
+ ) n_4 + n_{10} = D
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\{n_1 + n_2 + n_3 + n_4\} + \{n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12}\} = 2 * (C + D) \\
K \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad K \qquad \qquad \qquad = 2 * (C + D)
\end{array}$$

両辺を2で割ると,  $K = C + D$   
つまり,  $C = 34 - D$  および  $D = 34 - C$   
これを(17)~(20)式に戻して整理すると,  
 $n_1 + n_{11} = n_3 + n_9 = n_5 + n_{15} = n_7 + n_{13} = C$   
 $n_2 + n_{12} = n_4 + n_{10} = n_6 + n_{16} = n_8 + n_{14} = D$   
(ただし,  $C + D = 34$ ) ... (21)

(1)~(16)式から  $n_1, n_{11}$ を含む式を選んで辺々を足す。

$$\begin{array}{l}
n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 34 \qquad \dots (1) \\
n_1 + n_5 + n_9 + n_{13} = 34 \qquad \dots (5) \\
n_1 + n_6 + n_{11} + n_{16} = 34 \qquad \dots (9) \\
n_1 + n_8 + n_{11} + n_{14} = 34 \qquad \dots (10) \\
n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12} = 34 \qquad \dots (3) \\
+ ) n_3 + n_7 + n_{11} + n_{15} = 34 \qquad \dots (7)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} + n_{11} + n_{12} + n_{13} + n_{14} + n_{15} + n_{16}\} + \\
3 * \{n_1 + n_{11}\} + \{n_3 + n_9\} = 204 \\
\{n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_{15} + n_{16}\} + 3 * \{n_1 + n_{11}\} + \{n_3 + n_9\} = 204 \\
136 \qquad \qquad \qquad + 3 * C \qquad \qquad \qquad + \qquad C \qquad \qquad \qquad = 204
\end{array}$$

ゆえに  $4 * C = 68$   
つまり  $C = 17$   
したがって  $D = 34 - C = 34 - 17 = 17 = C$   
だから, (21)式は,

$$\begin{array}{l}
n_1 + n_{11} = n_2 + n_{12} = n_3 + n_9 = n_4 + n_{10} = \\
n_5 + n_{15} = n_6 + n_{16} = n_7 + n_{13} = n_8 + n_{14} = 17 \qquad \dots (22)
\end{array}$$

とまとめられる。この8組16数のペアは“17の補数を成す”。

(22)式の意味は、「汎対角線上の1つおきの任意の2数の和は17である」ということ。汎対角線上にこれら「17の補数」のペア8組が全て並ぶことになる。

(22)式の配置を図で確認しておこう。

基本図				補数表現					
1	2	3	4	4	1	2	3	4	1
5	6	7	8	8	5	6	7	8	5
9	10	11	12	2	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>2</u>	3
13	14	15	16	6	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	7

[汎四角陣の補数表現]

補数の確認には、左図のような表現形が何かと便利である。 $n_1$ の補数を  $n_{\underline{1}}$  と表し、それがあつ場所に置く。  
つまり,  $(17 - n_1)$  の値を  $n_{\underline{1}}$  におく。  
また  $n_2$  の補数を  $n_{\underline{2}}$  と表し,  $n_{12}$  の所に置く。  
ゆえに  $n_1 + n_{\underline{1}} = 17$   
また  $n_2 + n_{\underline{2}} = 17$   
 $n_3 + n_{\underline{3}} = 17$

こうすると、例えば汎対角線の4数の和は、 .....

$$\begin{aligned}n_1 + n_6 + n_{11} + n_{16} &= n_1 + n_6 + \underline{n_1} + \underline{n_6} \\ &= (n_1 + \underline{n_1}) + (n_6 + \underline{n_6}) = 17 + 17 = 34 \\ n_1 + n_8 + n_{11} + n_{14} &= n_1 + n_8 + \underline{n_1} + \underline{n_8} \\ &= (n_1 + \underline{n_1}) + (n_8 + \underline{n_8}) = 17 + 17 = 34 \\ n_2 + n_5 + n_{12} + n_{15} &= n_2 + n_5 + \underline{n_2} + \underline{n_5} \\ &= (n_2 + \underline{n_2}) + (n_5 + \underline{n_5}) = 17 + 17 = 34 \\ &.....\end{aligned}$$

と表され、定和の条件を満たしていることが、一目で読み取れる。

これらの性質は、昔から「完全四方陣」の本質として珍重されてきた有名なものだ。

小生は、この際「完全型」という魔方陣の古い呼称をぜひ復活させたいと思う。

8ペアの「17の補数」が全て汎対角線上に並ぶ四方陣のことをあえて「完全四方陣」と呼びたいのである。四次の場合は、「汎四方陣」と「完全四方陣」とは論理的に「同値」の概念である。解集合がまったく同じなのである。

ちなみに八次の場合は、「完全八方陣」の解集合は「汎八方陣」の解の部分集合を形成する。解の総数が全然違うことがわかっている。

(May 27, 2000(初稿); Jan. 22, 2005(全面改訂稿); July 9, 2010(加筆改訂稿)  
MacOSX & Xcode 1.5 による計数・作表; 著者: 摂田 寛二(Kanji Setsuda))

---