

第3部：『魔方陣の新研究』： 撰田 寛二  
 第2章： 四方陣の代数的研究(新)  
 第4節： 正方連結汎四方陣の研究(新)

0. 「正方連結陣」とは、内部の任意の  $2 \times 2$  の正方四数の和が定和になるタイプの方陣のことだ。どの場所でも  $2 \times 2$  の四数の和が同じになる。昔は「相結陣」と言った。

1	12	6	15	$1+12+16+5=34$ ;	$12+6+5+11=34$ ;	$6+15+11+2=34$ ;
16	5	11	2	$16+5+3+10=34$ ;	$5+11+10+8=34$ ;	$11+2+8+13=34$ ;
3	10	8	13	$3+10+8+13=34$ ;	$10+8+7+9=34$ ;	$8+13+9+4=34$ ;
14	7	9	4	. . . . .		

もちろん、このタイプも四次の「魔方陣」には違いがないから、縦横の行列の定和や2本の主対角線上の四数定和という条件も当然備えているものとする。

このようかなり特殊な条件を与えられた正方連結型四方陣であるが、いったいどのような性質を備え、解は幾つあるのであろうか。研究してみよう。

基本条件を、いつものように基本図と連立方程式群で定義する。

1. 基本ポジションと変数名と連立方程式群：

-----	$n1+ n2+ n5+ n6=S$	....(1)
n1 n2 n3 n4	$n2+ n3+ n6+ n7=S$	....(2)
-----	$n3+ n4+ n7+ n8=S$	....(3)
n5 n6 n7 n8	$n5+ n6+ n9+n10=S$	....(4)
-----	$n6+ n7+n10+n11=S$	....(5)
n9 10 11 12	$n7+ n8+n11+n12=S$	....(6)
-----	$n9+n10+n13+n14=S$	....(7)
13 14 15 16	$n10+n11+n14+n15=S$	....(8)
-----	$n11+n12+n15+n16=S$	....(9)

という9本の「正方連結」条件を先ず仮定する。

魔方陣を作るには、この他に縦横の行列の定和と主対角線2本の定和の式を加える。

2. 先ず上の正方連結9条件だけから何が言い得るかを調べよう。

$$\begin{aligned}
 &(1)+(3)+(7)+(9) \\
 &n1+n2+n5+n6=S \quad \dots(1) \\
 &n3+n4+n7+n8=S \quad \dots(3) \\
 &n9+n10+n13+n14=S \quad \dots(7) \\
 &+)n11+n12+n15+n16=S \quad \dots(9)
 \end{aligned}$$

$$n1+n2+n3+n4+n5+n6+n7+n8+n9+n10+n11+n12+n13+n14+n15+n16=4S$$

左辺には 1~16 の自然数が全個重複なく入る。その総和は、

$$1+2+3+4+5+6+7+ \dots +14+15+16=4S$$

$$(1+16)+(2+15)+(3+14)+(4+13)+ \dots +(7+10)+(8+9)=4S$$

$$\text{すなわち, } 17 \times 8 = 4S \quad \therefore S = 34$$

つまり、正方連結四数の和は、必ず 34 になる。一般的な四方陣の行列の和 C と同じ値だ。

また、

$$(1), (2) \text{ から } n1+n5=S-(n2+n6) \quad \updownarrow$$

$$n3+n7=S-(n2+n6) \quad \updownarrow \quad n1+n5=n3+n7=E$$

$$(2), (3) \text{ から } n2+n6=S-(n3+n7) \quad \updownarrow$$

$$n4+n8=S-(n3+n7) \quad \updownarrow \quad n2+n6=n4+n8=F$$

$$\text{そして } E+F=S \quad \rightarrow \quad n4+n8+n1+n5=S \quad \dots(10)$$

同様にして

$$(4), (5) \text{ から } n_5+n_9=n_7+n_{11}=E_2=S-(n_6+n_{10})$$

$$(5), (6) \text{ から } n_6+n_{10}=n_8+n_{12}=F_2=S-(n_7+n_{11})$$

$$\text{そして } E_2+F_2=S \rightarrow n_8+n_{12}+n_5+n_9=S \quad \dots (11)$$

$$\text{また } (7), (8) \text{ から } n_9+n_{13}=n_{11}+n_{15}=E_3=S-(n_{10}+n_{14})$$

$$(8), (9) \text{ から } n_{10}+n_{14}=n_{12}+n_{16}=F_3=S-(n_{11}+n_{15})$$

$$\text{そして } E_3+F_3=S \rightarrow n_{12}+n_{16}+n_9+n_{13}=S \quad \dots (12)$$

(10), (11), (12) から、方陣の最左列 4 数を最右列の右に持って来ても、正方連結四数の定和が成り立つことがわかる。最右列を最左列の左に持って来ても良い。汎四方陣の性質とよく似ている。

また今度は連結を縦に調べて行く。

$$(1), (4) \text{ から } n_1+n_2=S-(n_5+n_6) \quad \uparrow$$

$$n_9+n_{10}=S-(n_5+n_6) \quad \downarrow \quad n_1+n_2=n_9+n_{10}=G$$

$$(4), (7) \text{ から } n_5+n_6=S-(n_9+n_{10}) \quad \uparrow$$

$$n_{13}+n_{14}=S-(n_9+n_{10}) \quad \downarrow \quad n_5+n_6=n_{13}+n_{14}=H$$

$$\text{そして } G+H=S \rightarrow n_{13}+n_{14}+n_1+n_2=S \quad \dots (13)$$

$$\text{同様にして } n_{14}+n_{15}+n_2+n_3=S \quad \dots (14)$$

$$n_{15}+n_{16}+n_3+n_4=S \quad \dots (15)$$

(13), (14), (15) から、方陣の最上行 4 数を最下行の下に持って来ても、正方連結四数の定和が成り立つことがわかる。最下行を最上行の上に持って来ても良い。汎四方陣の性質とよく似ている。

では、 $n_4+n_1+n_{16}+n_{13}=S$  は言えるか？

$$n_{13}+n_{14}+n_1+n_2=S \quad \dots (13)$$

$$+) n_{15}+n_{16}+n_3+n_4=S \quad \dots (15)$$

$$n_1+n_2+n_3+n_4+n_{13}+n_{14}+n_{15}+n_{16}=2S$$

これを 4 項ずつにまとめると、

$$(n_1+n_4+n_{13}+n_{16})+(n_2+n_3+n_{14}+n_{15})=2S$$

$$(n_1+n_4+n_{13}+n_{16})+S=2S \quad \uparrow (14)$$

$$\text{ゆえに } n_4+n_1+n_{16}+n_{13}=S \quad \dots (16)$$

3. 今度は行列の和について逐一調べよう。仮定する条件は、(1)~(9)のまま。

$$n_1+n_2+n_5+n_6=S \quad \dots (1)$$

$$+) n_3+n_4+n_7+n_8=S \quad \dots (3)$$

$$n_1+n_2+n_5+n_6+n_3+n_4+n_7+n_8=2S$$

次のように 4 項ずつまとめる。

$$(n_1+n_2+n_3+n_4)+(n_5+n_6+n_7+n_8)=2S$$

$$n_1+n_2+n_3+n_4=A$$

$$n_5+n_6+n_7+n_8=B \quad \text{とおく。もちろん } A+B=2S$$

$$n_5+n_6+n_9+n_{10}=S \quad \dots (4)$$

$$+) n_7+n_8+n_{11}+n_{12}=S \quad \dots (6)$$

$$n_5+n_6+n_9+n_{10}+n_7+n_8+n_{11}+n_{12}=2S$$

次のように 4 項ずつまとめる。

$$(n_5+n_6+n_7+n_8)+(n_9+n_{10}+n_{11}+n_{12})=2S$$

$$n_5+n_6+n_7+n_8=B \quad \text{であったから, } n_9+n_{10}+n_{11}+n_{12}=A$$

$$n_9+n_{10}+n_{13}+n_{14}=S \quad \dots (7)$$

$$+) n_{11}+n_{12}+n_{15}+n_{16}=S \quad \dots (9)$$

$$n_9+n_{10}+n_{13}+n_{14}+n_{11}+n_{12}+n_{15}+n_{16}=2S$$

次のように 4 項ずつまとめる。

$$(n_9+n_{10}+n_{11}+n_{12})+(n_{13}+n_{14}+n_{15}+n_{16})=2S$$

$$n_9+n_{10}+n_{11}+n_{12}=A \quad \text{であったから, } n_{13}+n_{14}+n_{15}+n_{16}=B$$

$$\text{つまり, } n_1+n_2+n_3+n_4=n_9+n_{10}+n_{11}+n_{12}=A$$

$$n_5+n_6+n_7+n_8=n_{13}+n_{14}+n_{15}+n_{16}=B$$

というふうに和によって2種類に分類できることがわかる。しかも、つねに  $A+B=2S$   
 もし  $A=S$  または  $B=S$  であれば、 $A=B=S$  が成り立つ。

縦の列も同様にして、

$$n_1+n_5+n_9+n_{13}=n_3+n_7+n_{11}+n_{15}=C$$

$$n_2+n_6+n_{10}+n_{14}=n_4+n_8+n_{12}+n_{16}=D$$

というふうに和によって2種類に分かれる。

しかも、 $C+D=2S$

だから、もし  $C=S$  または  $D=S$  であれば、 $C=D=S$  が成り立つ。

ただし、 $A=S(=34)$ および  $C=S(=34)$ などの条件は、外から与えてやらなければならない。上に掲げた正方連結9条件だけでは決まらないことだから。

4. 今度は対角線上の4数の和について逐一調べよう。はたして何が成り立つか。

$$n_6+n_7+n_{10}+n_{11}=S \quad \dots (5)$$

$$+) n_4+n_1+n_{16}+n_{13}=S \quad \dots (16)$$

$$n_6+n_7+n_{10}+n_{11}+n_4+n_1+n_{16}+n_{13}=2S$$

4項ずつ組み合わせて、

$$(n_1+n_6+n_{11}+n_{16})+(n_4+n_7+n_{10}+n_{13})=2S \quad \dots (17)$$

これは、主対角線の1本が成り立てば、他の1本も成り立つことを示す。

ここで主対角線2本の和にそれぞれ名前を付ける。

$$n_1+n_6+n_{11}+n_{16}=P \quad \text{および} \quad n_4+n_7+n_{10}+n_{13}=Q$$

(17)式は、 $P+Q=2S$  を表わす。

$$n_1+n_2+n_5+n_6=S \quad \dots (1)$$

$$+) n_{11}+n_{12}+n_{15}+n_{16}=S \quad \dots (9)$$

$$n_1+n_2+n_5+n_6+n_{11}+n_{12}+n_{15}+n_{16}=2S$$

$$(n_1+n_6+n_{11}+n_{16})+(n_2+n_5+n_{12}+n_{15})=2S \quad \dots (18)$$

$$n_3+n_4+n_7+n_8=S \quad \dots (3)$$

$$+) n_9+n_{10}+n_{13}+n_{14}=S \quad \dots (7)$$

$$n_3+n_4+n_7+n_8+n_9+n_{10}+n_{13}+n_{14}=2S$$

$$(n_4+n_7+n_{10}+n_{13})+(n_3+n_8+n_9+n_{14})=2S \quad \dots (19)$$

(18), (19)式の意味は、

$$P+(n_2+n_5+n_{12}+n_{15})=2S, \quad Q+(n_3+n_8+n_9+n_{14})=2S$$

$P+Q=2S$  なのだから、

$$n_2+n_5+n_{12}+n_{15}=Q, \quad n_3+n_8+n_9+n_{14}=P \quad \text{に他ならない。}$$

同様にして

$$n_4+n_8+n_1+n_5=S \quad \dots (10)$$

$$+) n_{10}+n_{11}+n_{14}+n_{15}=S \quad \dots (8)$$

$$n_4+n_8+n_1+n_5+n_{10}+n_{11}+n_{14}+n_{15}=2S$$

$$(n_1+n_8+n_{11}+n_{14})+(n_4+n_5+n_{10}+n_{15})=2S \quad \dots (20)$$

$$n_{13}+n_{14}+n_1+n_2=S \quad \dots (13)$$

$$+) n_7+n_8+n_{11}+n_{12}=S \quad \dots (6)$$

$$n_{13}+n_{14}+n_1+n_2+n_7+n_8+n_{11}+n_{12}=2S$$

$$(n_1+n_8+n_{11}+n_{14})+(n_2+n_7+n_{12}+n_{13})=2S \quad \dots (21)$$

$$n_2+n_3+n_6+n_7=S \quad \dots (2)$$

$$+) n_{12}+n_{16}+n_9+n_{13}=S \quad \dots (12)$$

$$n_2+n_3+n_6+n_7+n_{12}+n_{16}+n_9+n_{13}=2S$$

$$(n_2+n_7+n_{12}+n_{13})+(n_3+n_6+n_9+n_{16})=2S \quad \dots (22)$$

$$\begin{aligned} n5+n6+n9+n10 &= S && \dots (4) \\ +) n15+n16+n3+n4 &= S && \dots (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n3+n4+n5+n6+n9+n10+n15+n16 &= 2S \\ (n3+n6+n9+n16)+(n4+n5+n10+n15) &= 2S && \dots (23) \end{aligned}$$

(20)~(23)式から、

$$\begin{aligned} n1+n8+n11+n14 &= n3+n6+n9+n16 = U \\ n2+n7+n12+n13 &= n4+n5+n10+n15 = V \end{aligned}$$

というふうに和によって2つのグループに分けられる。

$$\begin{aligned} n1+n2+n5+n6 &= S && \dots (1) \\ n6+n7+n10+n11 &= S && \dots (5) \\ n11+n12+n15+n16 &= S && \dots (9) \\ +) n4+n1+n16+n13 &= S && \dots (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n1+n1+n2+n4+n5+n6+n6+n7+n10+n11+n11+n12+n13+n15+n16+n16 &= 4S \\ 2*(n1+n6+n11+n16)+(n2+n7+n12+n13)+(n4+n5+n10+n15) &= 4S && \dots (25) \end{aligned}$$

これは、 $2P+V+V=4S$ ,  $2P+2V=4S$  つまり  $P+V=2S$   
ところが、 $P+Q=2S$  だったのだから、 $V=Q$

同様に

$$\begin{aligned} n4+n8+n1+n5 &= S && \dots (10) \\ n7+n8+n11+n12 &= S && \dots (6) \\ n10+n11+n14+n15 &= S && \dots (8) \\ +) n13+n14+n1+n2 &= S && \dots (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n1+n1+n2+n4+n5+n7+n8+n8+n10+n11+n11+n12+n13+n14+n14+n15 &= 4S \\ 2*(n1+n8+n11+n14)+(n4+n7+n10+n13)+(n2+n5+n12+n15) &= 4S && \dots (26) \end{aligned}$$

この式も、 $2U+Q+Q=4S$  つまり  $U+Q=2S$   
ゆえに  $U=P$  とわかる。

15	16	13	14	15	16	13	14	15	*	汎対角線	*
										$n1+n6+n11+n16 = Pd1$	
n3	n4	n1	n2	n3	n4	n1	n2	n3		$n1+n8+n11+n14 = Pd2$	
		---+---+---+---								$n2+n7+n12+n13 = Pb3$	
n7	n8	n5	n6	n7	n8	n5	n6	n7		$n2+n5+n12+n15 = Pb4$	
		---+---+---+---								$n3+n8+n9+n14 = Pd5$	
11	12	n9	n10	n11	n12	n9	n10	11		$n3+n6+n9+n16 = Pd6$	
		---+---+---+---								$n4+n5+n10+n15 = Pb7$	
15	16	n13	n14	n15	n16	n13	n14	15		$n4+n7+n10+n13 = Pb8$	
		-----									
n3	n4	n1	n2	n3	n4	n1	n2	n3			

和によって分類整理すると、汎対角線の全てが **Pd**, **Pb** の2種類にグループ分けされる。

$$\begin{aligned} n1+n6+n11+n16 &= n1+n8+n11+n14 \\ &= n3+n6+n9+n16 = n3+n8+n9+n14 = Pd \\ n2+n5+n12+n15 &= n2+n7+n12+n13 \\ &= n4+n5+n10+n15 = n4+n7+n10+n13 = Pb \end{aligned}$$

これらを拡張空間で確かめると、右上がり/右下がりに関係なく **n1**, **n3** を含む対角線はすべて **Pd** 群に属し、**n2**, **n4** を含む対角線はすべて **Pb** 群に属して、1筋おきに並ぶことがわかる。そして、**Pd** 群の対角線上では、どの連続する4数を任意に選んで加えても、必ず和が **Pd** となる。**Pb** 群の対角線上では、どの連続する4数を任意に選んで加えても、必ず和が **Pb** となる。

しかも、 $Pd+Pb=2S$

以上は「汎対角線」の概念に良く似ている。

しかし、正方連結の9条件だけでは、 $Pd=Pb=S$  までは言えない。だから、まだ完全な「汎対角線」にはならないが、それでも既に相互に補完しあう2種類の「準汎対角線」を持っている、と言える。つまり、正方連結型の魔方陣は、最初の9条件だけで既に「準汎魔方陣」なのである。

無論、主対角線の1本が既に  $Pd=34$  または  $Pb=34$  ならば、 $Pd=Pb=34$  となり、全ての汎対角

線上の4数が定和になる。完全に汎魔方陣になるには、それだけで十分である。

ただし、この  $Pd=34$  または  $Pb=34$  の条件は、あくまで外から与えてやらなければならない。最初の9条件に内在する性質ではないのだから。

以上の考察をまとめて言えば、正方連結9条件に

$$n1+n2+n3+n4=34; \quad n1+n5+n9+n13=34; \quad n1+n6+n11+n16=34$$

の3式を加えさえすれば、この四方陣は完全に汎魔方陣になるのである。

5. 次に実際に正方連結9条件に上の3条件を順次プラスしてプログラムを組み、パソコンに解を求めさせてみよう。

(1) 先ず正方連結9条件だけで解を求めてみた。行列の定和や対角線の定和については、条件を一切付けない。成り立ってもよいし、成り立たないでもよいという立場をとる。

**\*\* 単なる「正方連結型」四方陣の構成：標準解のリスト：部分：チェック・サム付き \*\***

<p>1/ RW P1\ 1 16 2 15 34 20\ 14 3 13 4 34 48\ 9 8 10 7 34 20\ 12 5 11 6 34 48\ -----+  36 32 36 32 C1mSum /20/48/20/48 P2Sums</p>	<p>61/ RW P1\ 1 16 2 14 33 31\ 12 5 11 7 35 37\ 9 8 10 6 33 31\ 4 13 3 15 35 37\ -----+  26 42 26 42 C1mSum /31/37/31/37 P2Sums</p>	<p>121/ RW P1\ 1 16 2 12 31 29\ 14 3 13 7 37 39\ 9 8 10 4 31 29\ 6 11 5 15 37 39\ -----+  30 38 30 38 C1mSum /29/39/29/39 P2Sums</p>	<p>181/ RW P1\ 1 16 2 8 27 25\ 14 3 13 11 41 43\ 5 12 6 4 27 25\ 10 7 9 15 41 43\ -----+  30 38 30 38 C1mSum /25/43/25/43 P2Sums</p>
<p>241/ RW P1\ 1 15 2 16 34 20\ 14 4 13 3 34 48\ 9 7 10 8 34 20\ 12 6 11 5 34 48\ -----+  36 32 36 32 C1mSum /20/48/20/48 P2Sums</p>	<p>301/ RW P1\ 1 15 4 14 34 18\ 12 6 9 7 34 50\ 5 11 8 10 34 18\ 16 2 13 3 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums</p>	<p>307/ RW P1\ 1 15 2 13 31 33\ 12 6 11 8 37 35\ 9 7 10 5 31 33\ 4 14 3 16 37 35\ -----+  26 42 26 42 C1mSum /33/35/33/35 P2Sums</p>	<p>325/ RW P1\ 1 15 3 12 31 27\ 8 10 6 13 37 41\ 9 7 11 4 31 27\ 16 2 14 5 37 41\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /27/41/27/41 P2Sums</p>
<p>331/ RW P1\ 1 15 2 11 29 31\ 14 4 13 8 39 37\ 9 7 10 3 29 31\ 6 12 5 16 39 37\ -----+  30 38 30 38 C1mSum /31/37/31/37 P2Sums</p>	<p>349/ RW P1\ 1 15 3 8 27 23\ 12 6 10 13 41 45\ 5 11 7 4 27 23\ 16 2 14 9 41 45\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /23/45/23/45 P2Sums</p>	<p>355/ RW P1\ 1 15 2 7 25 27\ 14 4 13 12 43 41\ 5 11 6 3 25 27\ 10 8 9 16 43 41\ -----+  30 38 30 38 C1mSum /27/41/27/41 P2Sums</p>	<p>373/ RW P1\ 1 14 2 16 33 31\ 12 7 11 5 35 37\ 9 6 10 8 33 31\ 4 15 3 13 35 37\ -----+  26 42 26 42 C1mSum /31/37/31/37 P2Sums</p>
<p>423/ RW P1\ 1 14 4 15 34 18\ 12 7 9 6 34 50\ 5 10 8 11 34 18\ 16 3 13 2 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums</p>	<p>429/ RW P1\ 1 14 2 13 30 22\ 12 7 11 8 38 46\ 9 6 10 5 30 22\ 16 3 15 4 38 46\ -----+  38 30 38 30 C1mSum /22/46/22/46 P2Sums</p>	<p>447/ RW P1\ 1 14 2 12 29 27\ 8 11 7 13 39 41\ 9 6 10 4 29 27\ 16 3 15 5 39 41\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /27/41/27/41 P2Sums</p>	<p>450/ RW P1\ 1 14 3 10 28 32\ 8 11 6 15 40 36\ 2 13 4 9 28 32\ 7 12 5 16 40 36\ -----+  18 50 18 50 C1mSum /32/36/32/36 P2Sums</p>
<p>462/ RW P1\ 1 14 2 8 25 23\ 12 7 11 13 43 45\ 5 10 6 4 25 23\ 16 3 15 9 43 45\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /23/45/23/45 P2Sums</p>	<p>465/ RW P1\ 1 14 3 6 24 28\ 12 7 10 15 44 40\ 2 13 4 5 24 28\ 11 8 9 16 44 40\ -----+  26 42 26 42 C1mSum /28/40/28/40 P2Sums</p>	<p>477/ RW P1\ 1 13 2 15 31 33\ 12 8 11 6 37 35\ 9 5 10 7 31 33\ 4 16 3 14 37 35\ -----+  26 42 26 42 C1mSum /33/35/33/35 P2Sums</p>	<p>495/ RW P1\ 1 13 2 14 30 22\ 12 8 11 7 38 46\ 9 5 10 6 30 22\ 16 4 15 3 38 46\ -----+  38 30 38 30 C1mSum /22/46/22/46 P2Sums</p>

513/ RW P1\ 1 13 2 11 27 29\ 8 12 7 14 41 39\ 9 5 10 3 27 29\ 16 4 15 6 41 39\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /29/39/29/39 P2Sums	515/ RW P1\ 1 13 3 10 27 31\ 8 12 6 15 41 37\ 9 5 11 2 27 31\ 16 4 14 7 41 37\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /31/37/31/37 P2Sums	517/ RW P1\ 1 13 2 7 23 25\ 12 8 11 14 45 43\ 5 9 6 3 23 25\ 16 4 15 10 45 43\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /25/43/25/43 P2Sums	519/ RW P1\ 1 13 3 6 23 27\ 12 8 10 15 45 41\ 5 9 7 2 23 27\ 16 4 14 11 45 41\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /27/41/27/41 P2Sums		
521/ RW P1\ 1 12 2 16 31 29\ 8 13 7 9 37 39\ 3 10 4 14 31 29\ 6 15 5 11 37 39\ -----+  18 50 18 50 C1mSum /29/39/29/39 P2Sums	581/ RW P1\ 1 11 2 15 29 31\ 8 14 7 10 39 37\ 3 9 4 13 29 31\ 6 16 5 12 39 37\ -----+  18 50 18 50 C1mSum /31/37/31/37 P2Sums	609/ RW P1\ 1 10 3 14 28 32\ 8 15 6 11 40 36\ 2 9 4 13 28 32\ 7 16 5 12 40 36\ -----+  18 50 18 50 C1mSum /32/36/32/36 P2Sums	637/ RW P1\ 2 16 1 15 34 20\ 13 3 14 4 34 48\ 10 8 9 7 34 20\ 11 5 12 6 34 48\ -----+  36 32 36 32 C1mSum /20/48/20/48 P2Sums		
799/ RW P1\ 2 15 1 16 34 20\ 13 4 14 3 34 48\ 10 7 9 8 34 20\ 11 6 12 5 34 48\ -----+  36 32 36 32 C1mSum /20/48/20/48 P2Sums	1009/ RW P1\ 2 14 1 16 33 31\ 11 7 12 5 35 37\ 10 6 9 8 33 31\ 3 15 4 13 35 37\ -----+  26 42 26 42 C1mSum /31/37/31/37 P2Sums	1047/ RW P1\ 2 13 3 16 34 34\ 11 8 10 5 34 34\ 14 1 15 4 34 34\ 7 12 6 9 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	1137/ RW P1\ 2 12 1 16 31 29\ 7 13 8 9 37 39\ 4 10 3 14 31 29\ 5 15 6 11 37 39\ -----+  18 50 18 50 C1mSum /29/39/29/39 P2Sums		
1162/ 2 11 5 16 7 14 4 9 12 1 15 6 13 8 10 3	1215/ 2 9 4 14 7 16 5 11 10 1 12 6 15 8 13 3	1243/ 3 16 1 15 2 13 4 14 11 8 9 7 10 5 12 6	1383/ 3 15 1 16 2 14 4 13 11 7 9 8 10 6 12 5	1429/ 3 14 1 16 13 4 15 2 11 6 9 8 10 7 12 5	1579/ 3 13 2 16 10 8 11 5 15 1 14 4 6 12 7 9
1647/ 3 12 1 16 6 13 8 9 4 11 2 15 5 14 7 10	1667/ 3 10 1 14 6 15 8 11 4 9 2 13 5 16 7 12	1714/ 3 9 2 13 6 16 7 12 11 1 10 5 14 8 15 4	1737/ 4 16 2 15 1 13 3 14 12 8 10 7 9 5 11 6	1777/ 4 15 2 16 1 14 3 13 12 7 10 8 9 6 11 5	1903/ 4 14 2 16 13 3 15 1 12 6 10 8 9 7 11 5
2001/ 4 13 2 15 10 7 12 5 16 1 14 3 9 8 11 6	2121/ 4 11 2 15 6 13 8 9 3 12 1 16 5 14 7 10	2141/ 4 10 3 14 7 13 8 9 2 12 1 16 5 15 6 11	2161/ 4 9 2 13 6 15 8 11 3 10 1 14 5 16 7 12	2201/ 5 16 1 12 11 2 15 6 13 8 9 4 10 3 14 7	2269/ 5 15 1 11 12 2 16 6 13 7 9 3 10 4 14 8
2287/ 5 14 1 10 12 3 16 7 13 6 9 2 11 4 15 8	2305/ 5 12 1 11 2 15 6 16 13 4 9 3 10 7 14 8	2325/ 5 11 1 12 2 16 6 15 13 3 9 4 10 8 14 7	2343/ 5 10 1 12 3 16 7 14 13 2 9 4 11 8 15 6	2361/ 5 9 2 11 4 16 7 14 13 1 10 3 12 8 15 6	2373/ 6 16 2 12 11 1 15 5 14 8 10 4 9 3 13 7
2385/ 6 15 1 12 11 2 16 5 8 13 3 10 9 4 14 7	2439/ 6 13 1 10 3 12 8 15 14 5 9 2 11 4 16 7	2457/ 6 12 2 11 1 15 5 16 14 4 10 3 9 7 13 8	2475/ 6 11 2 12 1 16 5 15 14 3 10 4 9 8 13 7	2495/ 6 10 5 12 3 15 4 13 2 14 1 16 7 11 8 9	2504/ 6 9 5 11 3 16 4 14 2 13 1 15 7 12 8 10
2515/ 7 14 3 10 12 1 16 5 15 6 11 2 9 4 13 8	2529/ 7 13 3 9 12 2 16 6 15 5 11 1 10 4 14 8	2535/ 7 12 3 10 1 14 5 16 15 4 11 2 9 6 13 8	2542/ 7 11 4 9 2 14 5 16 15 3 12 1 10 6 13 8	[Count = 2544]	

[Listed by Kanji Setsuda on August 17, 2010 with MacOSX & Xcode 3.1.2]

(2) 次は、正方連結 9 条件に主対角線の定和式  $n1+n6+n11+n16=34$  を 1 本条件に加えた場合を調べよう。この際、さらにもう 1 本の主対角線の定和式  $n4+n7+n10+n13=34$  を加えてもよいが、絶対に必要というわけではない。あっても無くても、結果は変わらない。

これで汎対角線の全てが定和となるが、行列の定和は成り立つこともあれば、成り立たないこともある。行列の定和については、条件を付けていないので、「不定」となる。

**\*\* 「正方連結型」 汎対角線四方陣の構成：標準解のリスト：部分：チェック・サム付き \*\***

1/ RW P1\ 1 16 2 15 34 34\ 10 7 9 8 34 34\ 13 4 14 3 34 34\ 6 11 5 12 34 34\ -----+-----  30 38 30 38 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				7/ RW P1\ 1 16 3 14 34 34\ 11 6 9 8 34 34\ 13 4 15 2 34 34\ 7 10 5 12 34 34\ -----+-----  32 36 32 36 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				13/ RW P1\ 1 16 5 12 34 34\ 13 4 9 8 34 34\ 11 6 15 2 34 34\ 7 10 3 14 34 34\ -----+-----  32 36 32 36 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				19/ RW P1\ 1 16 9 8 34 34\ 13 4 5 12 34 34\ 7 10 15 2 34 34\ 11 6 3 14 34 34\ -----+-----  32 36 32 36 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums			
25/ RW P1\ 1 15 2 16 34 34\ 10 8 9 7 34 34\ 13 3 14 4 34 34\ 6 12 5 11 34 34\ -----+-----  30 38 30 38 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				31/ RW P1\ 1 15 4 14 34 34\ 12 6 9 7 34 34\ 13 3 16 2 34 34\ 8 10 5 11 34 34\ -----+-----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				33/ RW P1\ 1 15 3 13 32 34\ 12 6 10 8 36 34\ 9 7 11 5 32 34\ 4 14 2 16 36 34\ -----+-----  26 42 26 42 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				37/ RW P1\ 1 15 6 12 34 34\ 14 4 9 7 34 34\ 11 5 16 2 34 34\ 8 10 3 13 34 34\ -----+-----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums			
39/ RW P1\ 1 15 5 11 32 34\ 14 4 10 8 36 34\ 9 7 13 3 32 34\ 6 12 2 16 36 34\ -----+-----  30 38 30 38 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				43/ RW P1\ 1 15 10 8 34 34\ 14 4 5 11 34 34\ 7 9 16 2 34 34\ 12 6 3 13 34 34\ -----+-----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				45/ RW P1\ 1 15 9 7 32 34\ 14 4 6 12 36 34\ 5 11 13 3 32 34\ 10 8 2 16 36 34\ -----+-----  30 38 30 38 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				49/ RW P1\ 1 14 3 16 34 34\ 11 8 9 6 34 34\ 13 2 15 4 34 34\ 7 12 5 10 34 34\ -----+-----  32 36 32 36 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums			
55/ RW P1\ 1 14 4 15 34 34\ 12 7 9 6 34 34\ 13 2 16 3 34 34\ 8 11 5 10 34 34\ -----+-----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				57/ RW P1\ 1 14 2 13 30 34\ 12 7 11 8 38 34\ 9 6 10 5 30 34\ 4 15 3 16 38 34\ -----+-----  26 42 26 42 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				61/ RW P1\ 1 14 7 12 34 34\ 8 11 2 13 34 34\ 10 5 16 3 34 34\ 15 4 9 6 34 34\ -----+-----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				62/ RW P1\ 1 14 5 10 30 34\ 8 11 4 15 38 34\ 2 13 6 9 30 34\ 7 12 3 16 38 34\ -----+-----  18 50 18 50 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums			
65/ RW P1\ 1 14 11 8 34 34\ 12 7 2 13 34 34\ 6 9 16 3 34 34\ 15 4 5 10 34 34\ -----+-----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				66/ RW P1\ 1 14 9 6 30 34\ 12 7 4 15 38 34\ 2 13 10 5 30 34\ 11 8 3 16 38 34\ -----+-----  26 42 26 42 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				69/ RW P1\ 1 13 3 15 32 34\ 12 8 10 6 36 34\ 9 5 11 7 32 34\ 4 16 2 14 36 34\ -----+-----  26 42 26 42 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				73/ RW P1\ 1 13 2 14 30 34\ 12 8 11 7 38 34\ 9 5 10 6 30 34\ 4 16 3 15 38 34\ -----+-----  26 42 26 42 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums			
77/ RW P1\ 1 13 7 11 32 34\ 8 12 2 14 36 34\ 9 5 15 3 32 34\ 16 4 10 6 36 34\ -----+-----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				78/ RW P1\ 1 13 6 10 30 34\ 8 12 3 15 38 34\ 9 5 14 2 30 34\ 16 4 11 7 38 34\ -----+-----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				79/ RW P1\ 1 13 11 7 32 34\ 12 8 2 14 36 34\ 5 9 15 3 32 34\ 16 4 6 10 36 34\ -----+-----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				80/ RW P1\ 1 13 10 6 30 34\ 12 8 3 15 38 34\ 5 9 14 2 30 34\ 16 4 7 11 38 34\ -----+-----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums			



81/ RW P1\ 1 12 5 16 34 34\ 7 14 3 10 34 34\ 11 2 15 6 34 34\ 13 8 9 4 34 34\ -----+-----  32 36 32 36 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				85/ RW P1\ 1 12 6 15 34 34\ 8 13 3 10 34 34\ 11 2 16 5 34 34\ 14 7 9 4 34 34\ -----+-----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				86/ RW P1\ 1 12 7 14 34 34\ 8 13 2 11 34 34\ 10 3 16 5 34 34\ 15 6 9 4 34 34\ -----+-----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				87/ RW P1\ 1 12 2 11 26 34\ 8 13 7 14 42 34\ 3 10 4 9 26 34\ 6 15 5 16 42 34\ -----+-----  18 50 18 50 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums			
90/ RW P1\ 1 12 3 10 26 34\ 8 13 6 15 42 34\ 2 11 4 9 26 34\ 7 14 5 16 42 34\ -----+-----  18 50 18 50 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				93/ RW P1\ 1 11 5 15 32 34\ 8 14 4 10 36 34\ 3 9 7 13 32 34\ 6 16 2 12 36 34\ -----+-----  18 50 18 50 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				96/ RW P1\ 1 11 7 13 32 34\ 8 14 2 12 36 34\ 9 3 15 5 32 34\ 16 6 10 4 36 34\ -----+-----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				97/ RW P1\ 1 11 2 12 26 34\ 8 14 7 13 42 34\ 3 9 4 10 26 34\ 6 16 5 15 42 34\ -----+-----  18 50 18 50 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums			
101/ 1 10 5 14 8 15 4 11 2 9 6 13 7 16 3 12		109/ 2 16 1 15 9 7 10 8 14 4 13 3 5 11 6 12		133/ 2 15 1 16 9 8 10 7 14 3 13 4 5 12 6 11		157/ 2 14 4 16 11 7 9 5 10 6 12 8 3 15 1 13		169/ 2 13 3 16 11 8 10 5 14 1 15 4 7 12 6 9		189/ 2 12 6 16 7 13 3 9 4 10 8 14 5 15 1 11					
197/ 2 11 5 16 7 14 4 9 12 1 15 6 13 8 10 3		209/ 2 9 5 14 7 16 4 11 10 1 13 6 15 8 12 3		217/ 3 16 4 15 2 13 1 14 11 8 12 7 10 5 9 6		237/ 3 15 4 16 2 14 1 13 11 7 12 8 10 6 9 5		249/ 3 14 1 16 9 8 11 6 15 2 13 4 5 12 7 10		265/ 3 13 2 16 10 8 11 5 15 1 14 4 6 12 7 9					
281/ 3 12 7 16 6 13 2 9 4 11 8 15 5 14 1 10		287/ 3 10 7 14 8 13 4 9 2 11 6 15 5 16 1 12		295/ 3 9 7 13 8 14 4 10 1 11 5 15 6 16 2 12		301/ 4 16 3 15 1 13 2 14 12 8 11 7 9 5 10 6		313/ 4 15 3 16 1 14 2 13 12 7 11 8 9 6 10 5		333/ 4 14 2 16 1 15 3 13 12 6 10 8 9 7 11 5					
349/ 4 13 2 15 10 7 12 5 16 1 14 3 6 11 8 9		365/ 4 11 8 15 6 13 2 9 3 12 7 16 5 14 1 10		371/ 4 10 8 14 7 13 3 9 2 12 6 16 5 15 1 11		377/ 4 9 8 13 7 14 3 10 1 12 5 16 6 15 2 11		385/ 5 16 1 12 3 10 7 14 15 6 11 2 9 4 13 8		393/ 5 15 1 11 2 12 6 16 13 7 9 3 10 4 14 8					
397/ 5 14 1 10 3 12 7 16 13 6 9 2 11 4 15 8		401/ 5 12 6 11 2 15 1 16 3 14 4 13 8 9 7 10		403/ 5 11 6 12 2 16 1 15 3 13 4 14 8 10 7 9		405/ 5 10 7 12 3 16 1 14 2 13 4 15 8 11 6 9		407/ 5 9 7 11 4 16 2 14 1 13 3 15 8 12 6 10		409/ 6 16 2 12 1 11 5 15 14 8 10 4 9 3 13 7					
413/ 6 15 1 12 3 10 8 13 16 5 11 2 9 4 14 7		421/ 6 13 1 10 3 12 8 15 14 5 9 2 11 4 16 7		425/ 6 12 5 11 1 15 2 16 4 14 3 13 7 9 8 10		427/ 6 11 5 12 1 16 2 15 4 13 3 14 7 10 8 9		429/ 6 10 8 12 3 15 1 13 2 14 4 16 7 11 5 9		431/ 6 9 8 11 4 15 2 13 1 14 3 16 7 12 5 10					

[Count = 432] OK!

[Listed by Kanji Setsuda on August 17, 2010 with MacOSX & Xcode 3.1.2]

(3) 次は、正方連結9条件に行列の定和式  $n_1+n_2+n_3+n_4=34$  と  $n_1+n_5+n_9+n_{13}=34$  の2本を加えた場合を調べよう。この2本があれば、全ての行列が定和となるが、汎対角線定和は成り立つこともあるし、成り立たないこともある。「不定」のままでも良しとする。

行列の定和が成り立てば、「魔方陣」としての格好は付く。そのうえ正方連結型は、既に「準汎魔方陣」としての性質を具有している。



\*\* 四次の正方連結型準汎魔方陣の構成：標準解：部分：チェック・サム付き \*\*

1/ RW P1\ 1 16 2 15 34 18\ 14 3 13 4 34 50\ 7 10 8 9 34 18\ 12 5 11 6 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums				7/ RW P1\ 1 16 3 14 34 18\ 15 2 13 4 34 50\ 6 11 8 9 34 18\ 12 5 10 7 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums				13/ RW P1\ 1 16 5 12 34 18\ 15 2 11 6 34 50\ 4 13 8 9 34 18\ 14 3 10 7 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums				19/ RW P1\ 1 16 9 8 34 26\ 15 2 7 10 34 42\ 4 13 12 5 34 26\ 14 3 6 11 34 42\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /26/42/26/42 P2Sums			
25/ RW P1\ 1 15 2 16 34 18\ 14 4 13 3 34 50\ 7 9 8 10 34 18\ 12 6 11 5 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums				31/ RW P1\ 1 15 4 14 34 18\ 12 6 9 7 34 50\ 5 11 8 10 34 18\ 16 2 13 3 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums				35/ RW P1\ 1 15 6 12 34 18\ 14 4 9 7 34 50\ 3 13 8 10 34 18\ 16 2 11 5 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums				39/ RW P1\ 1 15 10 8 34 26\ 14 4 5 11 34 42\ 3 13 12 6 34 26\ 16 2 7 9 34 42\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /26/42/26/42 P2Sums			
43/ RW P1\ 1 14 3 16 34 18\ 12 7 10 5 34 50\ 6 9 8 11 34 18\ 15 4 13 2 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums				47/ RW P1\ 1 14 4 15 34 18\ 12 7 9 6 34 50\ 5 10 8 11 34 18\ 16 3 13 2 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums				51/ RW P1\ 1 14 7 12 34 32\ 8 11 2 13 34 36\ 9 6 15 4 34 32\ 16 3 10 5 34 36\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /32/36/32/36 P2Sums				53/ RW P1\ 1 14 11 8 34 32\ 12 7 2 13 34 36\ 5 10 15 4 34 32\ 16 3 6 9 34 36\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /32/36/32/36 P2Sums			
55/ RW P1\ 1 12 5 16 34 30\ 8 13 4 9 34 38\ 10 3 14 7 34 30\ 15 6 11 2 34 38\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /30/38/30/38 P2Sums				57/ RW P1\ 1 12 6 15 34 30\ 8 13 3 10 34 38\ 9 4 14 7 34 30\ 16 5 11 2 34 38\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /30/38/30/38 P2Sums				59/ RW P1\ 1 12 7 14 34 32\ 8 13 2 11 34 36\ 9 4 15 6 34 32\ 16 5 10 3 34 36\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /32/36/32/36 P2Sums				61/ RW P1\ 2 16 1 15 34 18\ 13 3 14 4 34 50\ 8 10 7 9 34 18\ 11 5 12 6 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums			
67/ RW P1\ 2 16 3 13 34 18\ 15 1 14 4 34 50\ 6 12 7 9 34 18\ 11 5 10 8 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums				73/ RW P1\ 2 16 5 11 34 18\ 15 1 12 6 34 50\ 4 14 7 9 34 18\ 13 3 10 8 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums				79/ RW P1\ 2 16 9 7 34 26\ 15 1 8 10 34 42\ 4 14 11 5 34 26\ 13 3 6 12 34 42\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /26/42/26/42 P2Sums				85/ RW P1\ 2 15 1 16 34 18\ 13 4 14 3 34 50\ 8 9 7 10 34 18\ 11 6 12 5 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums			
91/ RW P1\ 2 15 4 13 34 18\ 11 6 9 8 34 50\ 5 12 7 10 34 18\ 16 1 14 3 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums				95/ RW P1\ 2 15 6 11 34 18\ 13 4 9 8 34 50\ 3 14 7 10 34 18\ 16 1 12 5 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums				99/ RW P1\ 2 15 10 7 34 26\ 13 4 5 12 34 42\ 3 14 11 6 34 26\ 16 1 8 9 34 42\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /26/42/26/42 P2Sums				103/ RW P1\ 2 13 3 16 34 34\ 11 8 10 5 34 34\ 14 1 15 4 34 34\ 7 12 6 9 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums			
105/ RW P1\ 2 13 4 15 34 36\ 11 8 9 6 34 32\ 14 1 16 3 34 36\ 7 12 5 10 34 32\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /36/32/36/32 P2Sums				107/ RW P1\ 2 13 8 11 34 34\ 7 12 1 14 34 34\ 9 6 15 4 34 34\ 16 3 10 5 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				109/ RW P1\ 2 13 12 7 34 34\ 11 8 1 14 34 34\ 5 10 15 4 34 34\ 16 3 6 9 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums				111/ RW P1\ 2 11 5 16 34 34\ 7 14 4 9 34 34\ 12 1 15 6 34 34\ 13 8 10 3 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums			

112/ RW P1\ 2 11 6 15 34 36\ 7 14 3 10 34 32\ 12 1 16 5 34 36\ 13 8 9 4 34 32\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /36/32/36/32 P2Sums	113/ RW P1\ 2 11 8 13 34 34\ 7 14 1 12 34 34\ 9 4 15 6 34 34\ 16 5 10 3 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	115/ RW P1\ 3 16 1 14 34 18\ 13 2 15 4 34 50\ 8 11 6 9 34 18\ 10 5 12 7 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums	121/ RW P1\ 3 16 2 13 34 18\ 14 1 15 4 34 50\ 7 12 6 9 34 18\ 10 5 11 8 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums		
127/ RW P1\ 3 16 5 10 34 18\ 14 1 12 7 34 50\ 4 15 6 9 34 18\ 13 2 11 8 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums	133/ RW P1\ 3 16 9 6 34 26\ 14 1 8 11 34 42\ 4 15 10 5 34 26\ 13 2 7 12 34 42\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /26/42/26/42 P2Sums	139/ RW P1\ 3 14 1 16 34 18\ 13 4 15 2 34 50\ 8 9 6 11 34 18\ 10 7 12 5 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums	143/ RW P1\ 3 14 4 13 34 38\ 10 7 9 8 34 30\ 15 2 16 1 34 38\ 6 11 5 12 34 30\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /38/30/38/30 P2Sums		
145/ RW P1\ 3 14 7 10 34 18\ 13 4 9 8 34 50\ 2 15 6 11 34 18\ 16 1 12 5 34 50\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums	149/ RW P1\ 3 14 11 6 34 26\ 13 4 5 12 34 42\ 2 15 10 7 34 26\ 16 1 8 9 34 42\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /26/42/26/42 P2Sums	153/ RW P1\ 3 13 2 16 34 34\ 10 8 11 5 34 34\ 15 1 14 4 34 34\ 6 12 7 9 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	155/ RW P1\ 3 13 4 14 34 38\ 10 8 9 7 34 30\ 15 1 16 2 34 38\ 6 12 5 11 34 30\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /38/30/38/30 P2Sums		
157/ RW P1\ 3 13 8 10 34 34\ 6 12 1 15 34 34\ 9 7 14 4 34 34\ 16 2 11 5 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	159/ RW P1\ 3 13 12 6 34 34\ 10 8 1 15 34 34\ 5 11 14 4 34 34\ 16 2 7 9 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	161/ RW P1\ 3 10 7 14 34 38\ 6 15 2 11 34 30\ 12 1 16 5 34 38\ 13 8 9 4 34 30\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /38/30/38/30 P2Sums	162/ RW P1\ 3 10 8 13 34 38\ 6 15 1 12 34 30\ 11 2 16 5 34 38\ 14 7 9 4 34 30\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /38/30/38/30 P2Sums		
163/ 4 15 1 14 13 2 16 3 8 11 5 10 9 6 12 7	183/ 4 14 1 15 13 3 16 2 8 10 5 11 9 7 12 6	197/ 4 13 2 15 9 8 11 6 16 1 14 3 5 12 7 10	205/ 5 16 1 12 11 2 15 6 8 13 4 9 10 3 14 7	217/ 5 12 6 11 4 13 3 14 15 2 16 1 10 7 9 8	219/ 5 11 6 12 4 14 3 13 15 1 16 2 10 8 9 7
221/ 5 10 7 12 4 15 2 13 14 1 16 3 11 8 9 6	223/ 6 15 1 12 11 2 16 5 8 13 3 10 9 4 14 7	231/ 6 12 5 11 3 13 4 14 16 2 15 1 9 7 10 8	233/ 6 11 5 12 3 14 4 13 16 1 15 2 9 8 10 7	235/ 7 14 3 10 12 1 16 5 6 15 2 11 9 4 13 8	239/ 7 12 5 10 2 13 4 15 16 3 14 1 9 6 11 8

[Count = 240] OK!

(4) 最後に正方連結9条件に下の3条件を全部加えてプログラムを組み、パソコンに解を探させてみよう。  $n1+n2+n3+n4=34$ ;  $n1+n5+n9+n13=34$ ;  $n1+n6+n11+n16=34$

\*\* 四次の正方連結型汎対角線魔方陣の構成 : 標準解 : 全数 : チェック・サム付き \*\*

[ 1] 32/ RW P1\ 1 15 4 14 34 34\ 12 6 9 7 34 34\ 13 3 16 2 34 34\ 8 10 5 11 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[ 2] 34/ RW P1\ 1 15 4 14 34 34\ 8 10 5 11 34 34\ 13 3 16 2 34 34\ 12 6 9 7 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[ 3] 36/ RW P1\ 1 15 6 12 34 34\ 14 4 9 7 34 34\ 11 5 16 2 34 34\ 8 10 3 13 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[ 4] 38/ RW P1\ 1 15 6 12 34 34\ 8 10 3 13 34 34\ 11 5 16 2 34 34\ 14 4 9 7 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums
--	--	--	--

[ 5] 40/ RW P1\ 1 15 10 8 34 34\ 14 4 5 11 34 34\ 7 9 16 2 34 34\ 12 6 3 13 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[ 6] 42/ RW P1\ 1 15 10 8 34 34\ 12 6 3 13 34 34\ 7 9 16 2 34 34\ 14 4 5 11 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[ 7] 48/ RW P1\ 1 14 4 15 34 34\ 12 7 9 6 34 34\ 13 2 16 3 34 34\ 8 11 5 10 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[ 8] 50/ RW P1\ 1 14 4 15 34 34\ 8 11 5 10 34 34\ 13 2 16 3 34 34\ 12 7 9 6 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums		
[ 9] 52/ RW P1\ 1 14 7 12 34 34\ 8 11 2 13 34 34\ 10 5 16 3 34 34\ 15 4 9 6 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[10] 54/ RW P1\ 1 14 11 8 34 34\ 12 7 2 13 34 34\ 6 9 16 3 34 34\ 15 4 5 10 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[11] 58/ RW P1\ 1 12 6 15 34 34\ 8 13 3 10 34 34\ 11 2 16 5 34 34\ 14 7 9 4 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[12] 60/ RW P1\ 1 12 7 14 34 34\ 8 13 2 11 34 34\ 10 3 16 5 34 34\ 15 6 9 4 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums		
[13] 70/ RW P1\ 2 16 3 13 34 34\ 11 5 10 8 34 34\ 14 4 15 1 34 34\ 7 9 6 12 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[14] 72/ RW P1\ 2 16 3 13 34 34\ 7 9 6 12 34 34\ 14 4 15 1 34 34\ 11 5 10 8 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[15] 76/ RW P1\ 2 16 5 11 34 34\ 13 3 10 8 34 34\ 12 6 15 1 34 34\ 7 9 4 14 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[16] 78/ RW P1\ 2 16 5 11 34 34\ 7 9 4 14 34 34\ 12 6 15 1 34 34\ 13 3 10 8 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums		
[17] 82/ RW P1\ 2 16 9 7 34 34\ 13 3 6 12 34 34\ 8 10 15 1 34 34\ 11 5 4 14 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[18] 84/ RW P1\ 2 16 9 7 34 34\ 11 5 4 14 34 34\ 8 10 15 1 34 34\ 13 3 6 12 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[19] 103/ RW P1\ 2 13 3 16 34 34\ 11 8 10 5 34 34\ 14 1 15 4 34 34\ 7 12 6 9 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[20] 104/ RW P1\ 2 13 3 16 34 34\ 7 12 6 9 34 34\ 14 1 15 4 34 34\ 11 8 10 5 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums		
[21] 107/ RW P1\ 2 13 8 11 34 34\ 7 12 1 14 34 34\ 9 6 15 4 34 34\ 16 3 10 5 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[22] 109/ RW P1\ 2 13 12 7 34 34\ 11 8 1 14 34 34\ 5 10 15 4 34 34\ 16 3 6 9 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[23] 111/ RW P1\ 2 11 5 16 34 34\ 7 14 4 9 34 34\ 12 1 15 6 34 34\ 13 8 10 3 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[24] 113/ RW P1\ 2 11 8 13 34 34\ 7 14 1 12 34 34\ 9 4 15 6 34 34\ 16 5 10 3 34 34\ -----+  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums		
[25] 124/ 3 16 2 13 10 5 11 8 15 4 14 1 6 9 7 12	[26] 126/ 3 16 2 13 6 9 7 12 15 4 14 1 10 5 11 8	[27] 130/ 3 16 5 10 13 2 11 8 12 7 14 1 6 9 4 15	[28] 132/ 3 16 5 10 6 9 4 15 12 7 14 1 13 2 11 8	[29] 136/ 3 16 9 6 13 2 7 12 8 11 14 1 10 5 4 15	[30] 138/ 3 16 9 6 10 5 4 15 8 11 14 1 13 2 7 12
[31] 153/ 3 13 2 16 10 8 11 5 15 1 14 4 6 12 7 9	[32] 154/ 3 13 2 16 6 12 7 9 15 1 14 4 10 8 11 5	[33] 157/ 3 13 8 10 6 12 1 15 9 7 14 4 16 2 11 5	[34] 159/ 3 13 12 6 10 8 1 15 5 11 14 4 16 2 7 9	[35] 165/ 4 15 1 14 9 6 12 7 16 3 13 2 5 10 8 11	[36] 166/ 4 15 1 14 5 10 8 11 16 3 13 2 9 6 12 7
[37] 172/ 4 15 6 9 14 1 12 7 11 8 13 2 5 10 3 16	[38] 175/ 4 15 6 9 5 10 3 16 11 8 13 2 14 1 12 7	[39] 178/ 4 15 10 5 14 1 8 11 7 12 13 2 9 6 3 16	[40] 181/ 4 15 10 5 9 6 3 16 7 12 13 2 14 1 8 11	[41] 185/ 4 14 1 15 9 7 12 6 16 2 13 3 5 11 8 10	[42] 186/ 4 14 1 15 5 11 8 10 16 2 13 3 9 7 12 6

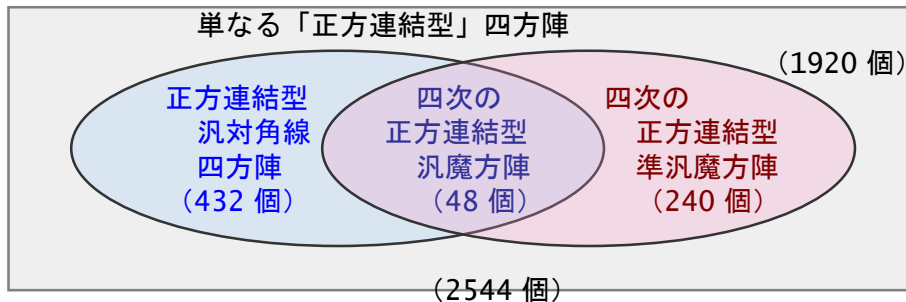
[43]	191/	[44]	195/	[45]	212/	[46]	216/	[47]	224/	[48]	229/
4	14 7 9	4	14 11 5	5	16 2 11	5	16 3 10	6	15 1 12	6	15 4 9
5	11 2 16	9	7 2 16	4	9 7 14	4	9 6 15	3	10 8 13	3	10 5 16
10	8 13 3	6	12 13 3	15	6 12 1	14	7 12 1	16	5 11 2	13	8 11 2
15	1 12 6	15	1 8 10	10	3 13 8	11	2 13 8	9	4 14 7	12	1 14 7

[Count(CPMS44/C&SemiPM) = 48/240] OK!

[Listed by Kanji Setsuda on August 17, 2010 with MacOSX & Xcode 3.1.2]

この48個の解集合は、今までの3つの解集合全部に既に含まれていた。上のリストでは、直前のリストの正方連結準汎魔方陣(240個)の解番号も一々添えておいた。

#### 4タイプの標準解の関係を表す集合図



6. この四次の正方連結型汎対角線魔方陣 48 個の解集合は、調べて見ると、既に求めた汎対角線型魔方陣および完全型魔方陣のそれと全く同じ解集合であった(共通の条件:  $n1 < n4$ ;  $n1 < n13$ ;  $n1 < n16$ ;  $n2 > n5$  で整理)。つまり、四方陣では、「汎対角線型魔方陣」, 「完全型汎魔方陣」そして「正方連結型汎魔方陣」の3種類の解集合が見事に一致する。

高次方陣になると、3タイプのそれぞれが別の解集合を持つようになることが、知られている。六方陣ではたまたま特別の事情で3つとも解無しとなるが、八方陣の調査では、重なる部分が多少あっても、全然別個の解集合を作ることが確かめられている。

だから、四方陣でのこの3タイプの一致は、言うならば「奇跡」に近い。

あるいは、こう言ったら良いかもしれない。ちょっと想像し難い表現だが、四方陣では、3タイプの違った名前を持つ1つの実体があるのみである、と。

しかも、この一体のものには、さらに解が相互に一対一対応するところの「補数対称型魔方陣」48個が裏側にピッタリ張り付いている。

その理由には、四方陣では、行列四数, 対角線四数, 正方連結四数の各和が完全に一致する(=34)ことをあげられよう。そのためにこうした奇跡が起きるのだ、と考えられる。

#### 7. 正方連結「準汎四方陣」の研究

ここで一つ元に戻って、対角線定和を外し行列の定和のみを定義式に加えた「準汎魔方陣」を掘り下げて研究しよう。

代数的研究で既にわかったことだが、正方連結陣には、汎対角線に良く似たPd, Pbという2種類の準汎対角線がある(必ずしも  $Pd=Pb$  にはならないが,  $Pd+Pb=2S=68$ )。

はたしてこの場合でも、汎対角線四方陣同様に

(1) 方陣拡張空間を構成できるか。

(2) 拡張空間から派生形を読み取った場合、どのくらい原型の性質を保存しているか。

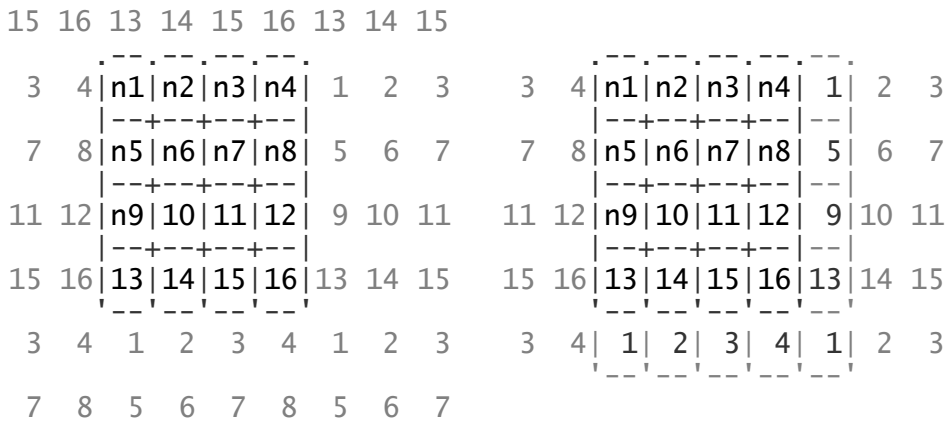
(3) 変換法を仮定し、 $n1=1$  の「基本解」という定番をここでも想定することができるであろうか。

これらの課題を考えて行こう。

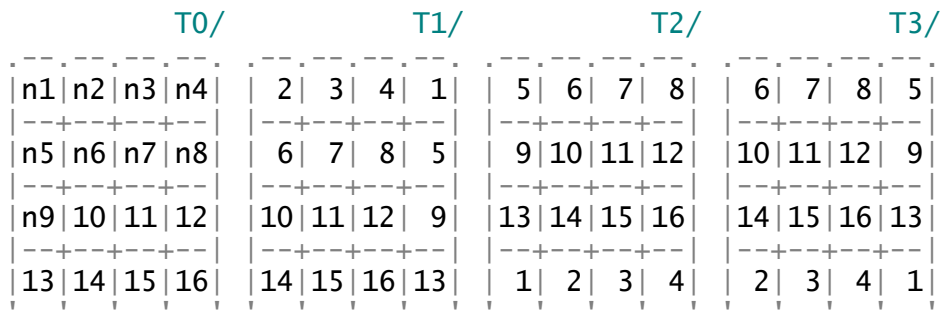
第2分節の考察から、最左列を最右列の右に持ってくることは可能で、その場合でも正方連結四数の定和は保たれるのであった。最右列を最左列の左に持ってくることも可能。また最上行を最下行の下に持ってくることもできるのであった。最下行を最上行の上に持ってきて

てもよい。

\* 方陣拡張空間と方陣枠の移動 \*



\* 方陣拡張空間から4形を読み出す \*



そうした作業を連続して行っても良い。これは、汎魔方陣と全く同じ性質である。だから、汎魔方陣でできたことは、ここでもできるというわけだ。

要するに、上図のような方陣拡張空間を構成することが可能で、行列の逐次移動をこの空間内での方陣枠の移動に置き換えることもできるということだ。

それができれば、準汎対角線を調べるのに何かと便利になる。派生形を読み取る時にも重宝に使える。

新たに作った四方陣の内部で、元の行列の定和が壊れていないことを確認しておこう。例えば、元の n1 を含む縦横の行列は、新しい四方陣でもメンバーが同じであり、和も当然変わらない。

問題は、対角線だ。上図の新方陣 T1/~T3/ では n6+n11+n16+n1 の対角線だけが元のままで問題ないが、他はすっかり入れ替わっている。

n1+n8+n11+n14; n2+n7+n12+n13; n2+n5+n12+n15; n4+n5+n10+n15; は、全然別物だ。大丈夫だろうか。

とはいえ、これらの対角線は全てが、拡張空間から切り取って来た準汎対角線の一部だ。

第4分節の考察でわかったように、n1, n3 を含む準汎対角線上では、どの連続4数を取っても、和が Pd となるのであった。n2, n4 を含む準汎対角線上では、どの連続4数を取っても和が Pb となる。つまり、

$$\begin{aligned}
 n1+n6+n11+n16 &= n1+n8+n11+n14 \\
 &= n3+n6+n9+n16 = n3+n8+n9+n14 = Pd \\
 n2+n5+n12+n15 &= n2+n7+n12+n13 \\
 &= n4+n5+n10+n15 = n4+n7+n10+n13 = Pb
 \end{aligned}$$

であった。だから、元の方陣の準汎対角線と同じ和の組み合わせ(Pd, Pb)になるのである。

この不思議な性質は、この方陣拡張空間に固有の性質と言って良い。だから、この方陣空間そのものを研究すれば、それに属する全ての解を研究したと同じことになる。

こうした一切が、汎対角線魔方陣の場合と良く似ている。拡張空間を作る意味は十分に  
あることになる。

この空間内を移動する限りは、正方連結四数の定和も、行列の定和も、2種類の対角線四  
数の定和も元の形を壊さずにシフトすることができる。

\* 方陣上側の左肩に  $n1==1$  が来るように清書する \*

T0/	T1/	T2/	T3/
1   2   3   4	1   4   3   2	1   2   3   4	1   4   3   2
5   6   7   8	5   8   7   6	13   14   15   16	13   16   15   14
9   10   11   12	9   12   11   10	9   10   11   12	9   12   11   10
13   14   15   16	13   16   15   14	5   6   7   8	5   8   7   6

そして、方陣枠が拡張空間内を自由に移動できるからには、どこに数値 **1** があっても、そ  
の **1** を方陣の4頂点のいずれにも自在に持ってくることができる。

もちろんホーム-ポジションの左上  $n1$  に数値 **1** を自由に持ってくる  
ことができる。

つまり、「標準形」や「基本形」を仮定する意味があるわけだ。そしてその性質を調べ、  
それを全体に及ぼして考えることができる。

次に上図で行列の交換可能性をチェックしておこう。

T1/は、T0/の左右方向の(2-4)列を交換した形だ。

T2/は、T0/の上下方向の(2-4)行を交換した形だ。

T3/は、T0/の左右方向の(2-4)列と上下方向の(2-4)行を両方同時に交換した形だ。

(1-3)行列の交換も本来可能なのだが、 $n1==1$  の基本形では考えなくて済むことだ。

8. では、以上の性質を実際に使ってみよう。

例えば、誰かが次のような解を得たとしよう。もちろん、正方連結準汎四方陣だ。これを  
どの「基本解」に比定できるか。その手順を研究しよう。

(1) 数 **1** がホーム・ポジションにある解#1 の場合は、簡単だ。反転・回転・行列交換し  
て  $n2>n5$ ;  $n2>n4$ ;  $n5>n13$  になるように清書するのみ。

\* 解#1 の清書形 \*

[原形]	T0/	[反転]	T1/	[行列交換]	T2/
1   14   4   15	1   14   4   15	1   12   5   16	1   12   5   16	1   16   5   12	1   16   5   12
12   7   9   6	12   7   9   6	14   7   10   3	14   7   10   3	15   2   11   6	15   2   11   6
5   10   8   11	5   10   8   11	4   9   8   13	4   9   8   13	4   13   8   9	4   13   8   9
16   3   13   2	16   3   13   2	15   6   11   2	15   6   11   2	14   3   10   7	14   3   10   7

この最終パターン T2/がどの「基本解」と一致するかを調べればよいのである。

数 **1** が左上にない下の解#2 の場合は、どうするか。

次図のように方陣空間を拡張し、そこから数 **1** が四隅にある解の4パターンを読み出す。

そして、反転・回転・行列交換して清書する。ただし、最終的に次の条件を守るようにす  
ること:  $n1==1$ ;  $n2>n4$ ;  $n2>n5$ ;  $n5>n13$ ;

基本解のリストが、そのように整理されているからだ。それに合わせないと、どの基本解  
に比定するのか、なかなかわかりにくい。



\* 解#2 の方陣拡張空間と方陣枠の移動 \*

9	8	13	4	9	8	13	4	9										
6	11	2	15	6	11	2	15	6	5	16	1	12	5	16	1	12	5	
12	5	16	1	12	5	16	1	12	10	3	14	7	10	3	14	7	10	
7	10	3	14	7	10	3	14	7	8	13	4	9	8	13	4	9	8	
9	8	13	4	9	8	13	4	9	11	2	15	6	11	2	15	6	11	
6	11	2	15	6	11	2	15	6	5	16	1	12	5	16	1	12	5	
12	5	16	1	12	5	16	1	12										

\* 方陣拡張空間から次の4形を読み出す \*

T0/	T1/	T2/	T3/												
1	12	5	16	12	5	16	1	14	7	10	3	7	10	3	14
14	7	10	3	7	10	3	14	4	9	8	13	9	8	13	4
4	9	8	13	9	8	13	4	15	6	11	2	6	11	2	15
15	6	11	2	6	11	2	15	1	12	5	16	12	5	16	1

\* 方陣上側の左肩に  $n1==1$  が来て、 $n2>n5$  になるようにそれぞれを清書する \*

T0/	T1/	T2/	T3/												
1	14	4	15	1	16	5	12	1	15	4	14	1	16	5	12
12	7	9	6	14	3	10	7	12	6	9	7	15	2	11	6
5	10	8	11	4	13	8	9	5	11	8	10	4	13	8	9
16	3	13	2	15	2	11	6	16	2	13	3	14	3	10	7

この4形の中から  $n2>n4$ ;  $n2>n5$ ;  $n5>n13$  の並び方になっているものを抜き出す。T3/だ。そして、それと同じものを基本解のリストの中から探し出そう。

では、次の解#3 は、どのような基本解に比定されるか。

上の場合と同じようにやって見よう。方陣空間を拡張して、右図を作り出す。

そして、そこから数 1 が四隅にあるパターンを抽出する。

\* 解#3 の方陣拡張空間と方陣枠の移動 \*

14	4	9	7	14	4	9	7	14										
3	13	8	10	3	13	8	10	3	6	12	1	15	6	12	1	15	6	
16	2	11	5	16	2	11	5	16	9	7	14	4	9	7	14	4	9	
1	15	6	12	1	15	6	12	1	8	10	3	13	8	10	3	13	8	
14	4	9	7	14	4	9	7	14	11	5	16	2	11	5	16	2	11	
3	13	8	10	3	13	8	10	3	6	12	1	15	6	12	1	15	6	
16	2	11	5	16	2	11	5	16										

\* 方陣拡張空間から次の4形を読み出す \*



T0/	T1/	T2/	T3/
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</table>   15   6   12	15   6   12   <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</table>	14   4   9   7	4   9   7   14
14   4   9   7	4   9   7   14	3   13   8   10	13   8   10   3
3   13   8   10	13   8   10   3	16   2   11   5	2   11   5   16
16   2   11   5	2   11   5   16	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</table>   15   6   12	15   6   12   <table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</table>

\* 方陣上側の左肩に  $n1=1$  が来て、さらに  $n2>n5$  になるようにそれぞれを清書する \*

T0/	T1/	T2/	T3/
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</table>   15   6   12	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</table>   14   3   16	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</table>   16   3   14	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 20px; height: 20px; text-align: center;">1</table>   16   3   14
14   4   9   7	12   7   10   5	15   2   13   4	12   5   10   7
3   13   8   10	6   9   8   11	6   11   8   9	6   11   8   9
16   2   11   5	15   4   13   2	12   5   10   7	15   2   13   4

この4形の中から  $n2>n4$ ;  $n2>n5$ ;  $n5>n13$  の条件に合うものを選び出す。/T2だ。

\* 正方連結準汎四方陣の「基本解」15個のリスト: チェック・サム付き \*

1/ RW P1\ 1 16 2 15 34 18\ 14 3 13 4 34 50\ 7 10 8 9 34 18\ 12 5 11 6 34 50 -----  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums	2/ RW P1\ 1 16 2 15 34 26\ 14 3 13 4 34 42\ 11 6 12 5 34 26\ 8 9 7 10 34 42 -----  34 34 34 34 C1mSum /26/42/26/42 P2Sums	3/ RW P1\ 1 16 2 15 34 30\ 12 5 11 6 34 38\ 13 4 14 3 34 30\ 8 9 7 10 34 38 -----  34 34 34 34 C1mSum /30/38/30/38 P2Sums	4/ RW P1\ 1 16 3 14 34 18\ 15 2 13 4 34 50\ 6 11 8 9 34 18\ 12 5 10 7 34 50 -----  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums
5/ RW P1\ 1 16 3 14 34 26\ 15 2 13 4 34 42\ 10 7 12 5 34 26\ 8 9 6 11 34 42 -----  34 34 34 34 C1mSum /26/42/26/42 P2Sums	6/ RW P1\ 1 16 3 14 34 32\ 12 5 10 7 34 36\ 13 4 15 2 34 32\ 8 9 6 11 34 36 -----  34 34 34 34 C1mSum /32/36/32/36 P2Sums	7/ RW P1\ 1 16 5 12 34 18\ 15 2 11 6 34 50\ 4 13 8 9 34 18\ 14 3 10 7 34 50 -----  34 34 34 34 C1mSum /18/50/18/50 P2Sums	8/ RW P1\ 1 16 5 12 34 30\ 15 2 11 6 34 38\ 10 7 14 3 34 30\ 8 9 4 13 34 38 -----  34 34 34 34 C1mSum /30/38/30/38 P2Sums
9/ RW P1\ 1 16 5 12 34 32\ 14 3 10 7 34 36\ 11 6 15 2 34 32\ 8 9 4 13 34 36 -----  34 34 34 34 C1mSum /32/36/32/36 P2Sums	10/ RW P1\ 1 16 9 8 34 26\ 15 2 7 10 34 42\ 4 13 12 5 34 26\ 14 3 6 11 34 42 -----  34 34 34 34 C1mSum /26/42/26/42 P2Sums	11/ RW P1\ 1 16 9 8 34 30\ 15 2 7 10 34 38\ 6 11 14 3 34 30\ 12 5 4 13 34 38 -----  34 34 34 34 C1mSum /30/38/30/38 P2Sums	12/ RW P1\ 1 16 9 8 34 32\ 14 3 6 11 34 36\ 7 10 15 2 34 32\ 12 5 4 13 34 36 -----  34 34 34 34 C1mSum /32/36/32/36 P2Sums
13/ RW P1\ 1 15 4 14 34 34\ 12 6 9 7 34 34\ 13 3 16 2 34 34\ 8 10 5 11 34 34 -----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	14/ RW P1\ 1 15 6 12 34 34\ 14 4 9 7 34 34\ 11 5 16 2 34 34\ 8 10 3 13 34 34 -----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	15/ RW P1\ 1 15 10 8 34 34\ 14 4 5 11 34 34\ 7 9 16 2 34 34\ 12 6 3 13 34 34 -----  34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	[Count = 15] OK!

[Listed by Kanji Setsuda on March 5, 2013 with MacOSX 10.8.2 & Xcode 4.6]

今までの研究では、以上のリストのような 15個の基本解を想定すると、全ての正方連結準汎四方陣 240個(標準解)をカバーできていることがわかっている。

この 15個の基本解の出力は、 $n1==1$ ;  $n2>n4$ ;  $n2>n5>n13$ ; という不等式によって、ふるいにかけて選別されている。今までにもう何度も出て来た不等式だ。

これらのリストの中には、もちろん正方連結汎対角線魔方陣の基本解も含まれている。最後にその基本解 3 個を示そう。

\* 正方連結汎対角線魔方陣の基本解 3 個のリスト: チェック・サム付き \*

[ 1 ]	13/ RW P1\	[ 2 ]	14/ RW P1\	[ 3 ]	15/ RW P1\
1 15 4 14 34 34\ 12 6 9 7 34 34\ 13 3 16 2 34 34\ 8 10 5 11 34 34\ -----+-----		1 15 6 12 34 34\ 14 4 9 7 34 34\ 11 5 16 2 34 34\ 8 10 3 13 34 34\ -----+-----		1 15 10 8 34 34\ 14 4 5 11 34 34\ 7 9 16 2 34 34\ 12 6 3 13 34 34\ -----+-----	
34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums		34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums		34 34 34 34 C1mSum /34/34/34/34 P2Sums	

[Count(CPMS44/C&SemiPM) = 3/15] OK!

[Listed by Kanji Setsuda on March 5, 2013 with MacOSX 10.8.2 & Xcode 4.6]

## 9. 終わりに

あるいは、読者の中にはこう思う人が居るかもしれない: 「たかが正方連結四方陣ごときに随分と力が入った研究だな。はたしてそんな必要があるのかしらん。」

それがするのである。これは順次系統的に調べてみてわかったことだが、正方連結陣は、四次・六次・八次の汎魔方陣にとって必須の研究対象なのである。低次の時に研究して基礎的な技術と知識を蓄積して置かないことには、いざ高次の時に実力を発揮できない悔いを残すのではないかと、思われる。

ぜひ読者も研究して、自分なりの分析力・応用力を身に付けていただきたい。

例えば、六次の場合には、補数対称型も汎対角線型も、構成が不可能である。行列と主対角線の定和を要請する魔方陣としては、作ることができない。だが、正方連結型の準汎魔方陣ならば、六方陣でも作ることができる。これはちょっとした救いになる。小生などは、何も無い砂漠を旅する寂しさを、このオアシスで随分と慰められたものだ。

また、八次では、連立型の一部に正方連結条件を加えると、大変に美しい稀少な魔方陣を作ることができる。構造研究も可能になり、すぐにも成果を上げることができる。

高次の場合、一般型は解の総数がすぐに億の壁を超えてしまう。余りの多さに何をどう研究すれば良いのか、たちまち五里霧中になる。無数の星を見渡して困惑したことのある天文ファンと同じだ。そんな時もし観察しやすい少数の美しい星が見つければ、どんなにか幸福なことだろう。まるで自分専用の星のように思えて観察にも身が入ることだろう。

正方連結型に限って、高次になっても、解の総数が無茶苦茶には増えない。あの悪名高い総数のインフレーションを抑えるという絶妙の特長がある。だから、細かい分類も構造解析も可能になり、何かと研究しやすいのだ。

しかも、正方連結型の汎魔方陣は、稀少なわりに奇抜過ぎないのが良い。言うならば、「基本解」としての品格が既に備わっている。平面の汎四方陣には、元からあった性質でもあり、立体の汎四方陣や平面の汎八方陣を研究してみると、その美しさにいつも感銘を受ける。

小生は、その高貴な性質が果たして何に由来するものなのか、終始不思議に思っていた。そして、謎を気長に解明する過程で、ついに多次元超立体二方陣の存在に思い到った。

孤軍奮闘の末に、今やその謎の一部を何とか解明することができた、と自負している。

だから、研究の過程で正方連結型に出遭えたことに、小生はほとんど運命的なものを感じているのである。

顧みれば、最初の出会いは、阿部楽方老師の著作の中であった。1980年代だから、もう三十年も前のことになるが、正方連結型の完全立体四方陣の研究にすぐに夢中になったことを思い出す。

なお、この節の研究については、最初期に鈴木睦前教授とメールを何度も交換して懇切丁寧な御指導をいただいた(2000~2001年)。だから、ほとんど「共同研究」と言ってもよい。このことを忘れずに記して、先生に対する深い感謝の意をあらためて表しておきたい。

(初稿：2000年；改訂稿：2001年，2005年；改訂新稿：2006年，2010年8月27日；清書稿：2013年3月5日 with MacOSX 10.8.2 & Xcode 4.6 by 撰田 寛二(Kanji Setsuda))

### 【附録】プログラム・リスト：正方連結準汎四方陣の基本解を求める：チェック・サム付き

```

/** 'Composite' Semi-Panmagic Squares of Order 4 **
/** The 15 Fundamental Solutions with Check-Sums **
/** "CmpstSPMS4F.c": Dictated by Kanji Setsuda **
/** in 2004, 2006; and on Aug.24,'10; Mar. 5,'13 **
/** Working with MacOSX 10.8.2 and Xcode 4.6 **
//
// 15 16 13 14 15 16 13 14 11 8 10 5 11 8
//      .----- .-----
// 3 4| 1| 2| 3| 4| 1 2 14| 1|15| 4|14| 1
//      |---+---+---| |---+---+---|
// 7 8| 5| 6| 7| 8| 5 6 7|12| 6| 9| 7|12
//      |---+---+---| |---+---+---|
// 11 12| 9|10|11|12| 9 10 2|13| 3|16| 2|13
//      |---+---+---| |---+---+---|
// 15 16|13|14|15|16|13 14 11| 8|10| 5|11| 8
//      '-----' '-----'
// 3 4 1 2 3 4 1 2 14 1 15 4 14 1
// [Composite Conditions] [Basic Conditions]
// n1+n2+n5+n6=CC ...Cst1; n1+n2+n3+n4=C ...rw1;
// n2+n3+n6+n7=CC ...Cst2; n1+n5+n9+n13=C ...cl1;
// n3+n4+n7+n8=CC ...Cst3;
// n5+n6+n9+n10=CC ...Cst4;
// n6+n7+n10+n11=CC ...Cst5;
// n7+n8+n11+n12=CC ...Cst6;
// n9+n10+n13+n14=CC ...Cst7;
// n10+n11+n14+n15=CC ...Cst8;
// n11+n12+n15+n16=CC ...Cst9;
// [List-forming Inequality Conditions]
// n1==1; n2>n4; n2>n5>n13;
//
#include <stdio.h>
//
short cnt, cnt2, cnt3;
short LSM;
short nm[17], uflg[17];
short d[4][18];
short lns[4][9], pdsm[4][9];
//
void stp01(void), stp02(void), stp03(void), stp04(void);
void stp05(void), stp06(void), stp07(void), stp08(void);
void stp09(void), stp10(void), stp11(void), stp12(void);
void stp13(void), stp14(void), stp15(void), stp16(void);
void ansprint(void), ansprpms(void);

```

```

void print6sol(short x);
void pr4sol(short x);
void chksum(void);
//
/* Main Program *
int main(){
  short n;
  printf("\n** 'Composite' Semi-Panmagic Squares of Order 4 **\n");
  printf(" [List of Fundamental Solutions: Sol.Count/|Check-Sums/]\n");
  for(n=0;n<17;n++){nm[n]=0; uflg[n]=0;}
  LSM=34; cnt=0; cnt3=0;
  nm[1]=1; uflg[1]=1;
  stp02();          //Begin the Calculations
  if(cnt3>0){pr4sol(cnt3);}
  printf(" [Count = %d] OK!\n",cnt);
  printf(" [Listed by Kanji Setsuda on March 5, 2013 with MacOSX 10.8.2 & Xcode 4.6]\n");
  return 0;
}
/* Begin the Calculations *
// Set N1
void stp01(){
  short a;
  for(a=1;a<2;a++){
    if(uflg[a]==0){
      nm[1]=a; uflg[a]=1;
      stp02();
      uflg[a]=0;}
  }
}
// Set N2
void stp02(){
  short a;
  for(a=16;a>1;a--){
    if(uflg[a]==0){
      nm[2]=a; uflg[a]=1;
      stp03();
      uflg[a]=0;}
  }
}
// Set N4(>n2)
void stp03(){
  short a;
  for(a=nm[2]-1;a>1;a--){
    if(uflg[a]==0){
      nm[4]=a; uflg[a]=1;
      stp04();
      uflg[a]=0;}
  }
}
// Set n3=LSM-n1-n2-n4
void stp04(){
  short a;
  a=LSM-nm[1]-nm[2]-nm[4];
  if((1<a)&&(a<17)){
    if(uflg[a]==0){
      nm[3]=a; uflg[a]=1;
      stp05();
      uflg[a]=0;}}
}

```

```

// Set N5(<n2)
void stp05(){
  short a;
  for(a=nm[2]-1;a>1;a--){
    if(uflg[a]==0){
      nm[5]=a; uflg[a]=1;
      stp06();
      uflg[a]=0;}
  }
}
// Set n6=LSM-n1-n2-n5
void stp06(){
  short a;
  a=LSM-nm[1]-nm[2]-nm[5];
  if((1<a)&&(a<17)){
    if(uflg[a]==0){
      nm[6]=a; uflg[a]=1;
      stp07();
      uflg[a]=0;}}
}
// Set n7=LSM-n2-n3-n6
void stp07(){
  short a;
  a=LSM-nm[2]-nm[3]-nm[6];
  if((1<a)&&(a<17)){
    if(uflg[a]==0){
      nm[7]=a; uflg[a]=1;
      stp08();
      uflg[a]=0;}}
}
// Set n8=LSM-n3-n4-n7
void stp08(){
  short a,b;
  a=LSM-nm[3]-nm[4]-nm[7];
  if((1<a)&&(a<17)){
    b=LSM-nm[4]-nm[1]-nm[5];
    if(a==b){
      if(uflg[a]==0){
        nm[8]=a; uflg[a]=1;
        stp09();
        uflg[a]=0;}}}}
}
// Set N13(>n5)
void stp09(){
  short a;
  for(a=nm[5]-1;a>1;a--){
    if(uflg[a]==0){cnt2=0;
      nm[13]=a; uflg[a]=1;
      stp10();
      uflg[a]=0;}
  }
}
// Set n9=LSM-n1-n5-n13
void stp10(){
  short a;
  a=LSM-nm[1]-nm[5]-nm[13];
  if((1<a)&&(a<17)){
    if(uflg[a]==0){
      nm[9]=a; uflg[a]=1;

```

```

        stp11();
        uflg[a]=0;}}
}
// Set n16=LSM-n1-n4-n13
void stp11(){
    short a;
    a=LSM-nm[1]-nm[4]-nm[13];
    if((1<a)&&(a<17)){
        if(uflg[a]==0){
            nm[16]=a; uflg[a]=1;
            stp12();
            uflg[a]=0;}}
}
// Set n10=LSM-n5-n6-n9
void stp12(){
    short a;
    a=LSM-nm[5]-nm[6]-nm[9];
    if((1<a)&&(a<17)){
        if(uflg[a]==0){
            nm[10]=a; uflg[a]=1;
            stp13();
            uflg[a]=0;}}
}
// Set n11=LSM-n6-n7-n10
void stp13(){
    short a;
    a=LSM-nm[6]-nm[7]-nm[10];
    if((1<a)&&(a<17)){
        if(uflg[a]==0){
            nm[11]=a; uflg[a]=1;
            stp14();
            uflg[a]=0;}}
}
// Set n12=LSM-n7-n8-n11
void stp14(){
    short a,b,c;
    a=LSM-nm[7]-nm[8]-nm[11];
    if((1<a)&&(a<17)){
        b=LSM-nm[8]-nm[5]-nm[9];
        c=LSM-nm[9]-nm[16]-nm[13];
        if((a==b)&&(a==c)){
            if(uflg[a]==0){
                nm[12]=a; uflg[a]=1;
                stp15();
                uflg[a]=0;}}}}
}
// Set n14=LSM-n9-n10-n13
void stp15(){
    short a,b;
    a=LSM-nm[9]-nm[10]-nm[13];
    if((1<a)&&(a<17)){
        b=LSM-nm[13]-nm[1]-nm[2];
        if(a==b){
            if(uflg[a]==0){
                nm[14]=a; uflg[a]=1;
                stp16();
                uflg[a]=0;}}}}
}
// Set n15=LSM-n10-n11-n14

```

```

void stp16(){
short a,b,c,d;
a=LSM-nm[10]-nm[11]-nm[14];
if((1<a)&&(a<17)){
b=LSM-nm[11]-nm[12]-nm[16];
c=LSM-nm[14]-nm[2]-nm[3];
d=LSM-nm[16]-nm[3]-nm[4];
if((a==b)&&(a==c)&&(a==d)){
if(uflg[a]==0){
nm[15]=a; uflg[a]=1;
ansprint();
uflg[a]=0;}}}}
}
//
/* Print the List of Solutions *
void ansprint(){
short n;
cnt++; cnt2++;
if(cnt2==1){
d[cnt3][0]=cnt;
for(n=1;n<17;n++){d[cnt3][n]=nm[n];}
cnt3++; if(cnt3==4){pr4sol(cnt3); cnt3=0;}
}
}
//
/* Print 4 Solutions *
void pr4sol(short x){
short l,l4,m,n;
chksum();
for(m=0;m<x;m++){
printf("%11d/IRWIP1\\",d[m][0]);
if(m<(x-1)){printf(" ");}
}
printf("\n");
for(l=0;l<4;l++){l4=l*4;
for(m=0;m<x;m++){
for(n=1;n<5;n++){printf("%3d",d[m][l4+n]);}
printf("|%2d|%2d\\",
lnsm[m][l],pdsm[m][l+4]);
if(m<(x-1)){printf(" ");}
}
printf("\n");
}
for(m=0;m<x;m++){
printf("-----+-----");
if(m<(x-1)){printf(" ");}
}
printf("\n");
for(m=0;m<x;m++){
for(n=0;n<4;n++){printf("%2d",lnsm[m][n+4]);}
printf("|ClmSum");
if(m<(x-1)){printf(" ");}
}
printf("\n");
for(m=0;m<x;m++){
for(n=0;n<4;n++){printf("/%2d",pdsm[m][n]);}
printf("|P2Sums");
if(m<(x-1)){printf(" ");}
}
}
}

```



```

printf("\n");
}
//
/* Check every sums of rows and columns *
void chksum(){
short l,m,m4,n,s;
for(l=0;l<4;l++){
for(m=0;m<4;m++){m4=m*4; s=0;
for(n=1;n<5;n++){s=s+d[l][m4+n];}
lnsm[l][m]=s; s=0;
for(n=0;n<4;n++){s=s+d[l][n*4+m+1];}
lnsm[l][m+4]=s;
}
pdsm[l][0]=d[l][1]+d[l][6]+d[l][11]+d[l][16];
pdsm[l][1]=d[l][2]+d[l][7]+d[l][12]+d[l][13];
pdsm[l][2]=d[l][3]+d[l][8]+d[l][9]+d[l][14];
pdsm[l][3]=d[l][4]+d[l][5]+d[l][10]+d[l][15];
pdsm[l][4]=d[l][1]+d[l][8]+d[l][11]+d[l][14];
pdsm[l][5]=d[l][2]+d[l][5]+d[l][12]+d[l][15];
pdsm[l][6]=d[l][3]+d[l][6]+d[l][9]+d[l][16];
pdsm[l][7]=d[l][4]+d[l][7]+d[l][10]+d[l][13];
}
}
//

```