

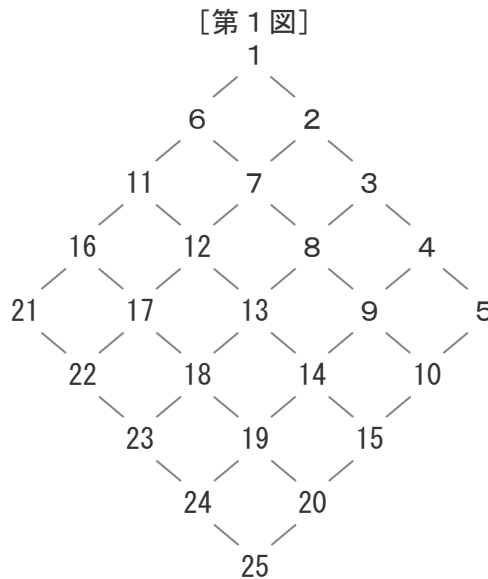
第3章：五方陣の最新研究： 摂田 寛二

第4節：「古典的構成法」と対称汎五方陣（最新）

1. 先ず奇数次の対称方陣のための「古典的構成法」について述べる。

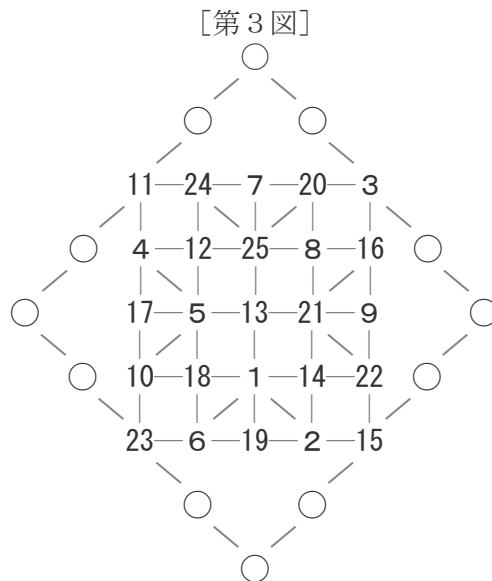
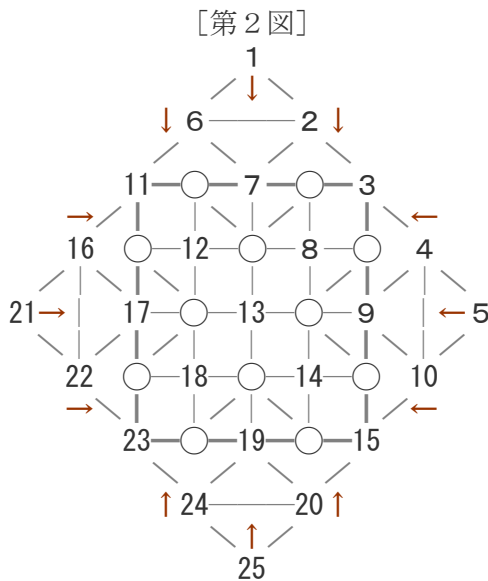
[原図]

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25



既に御存知だとは思いますが、古典的な構成法を5次の場合で説明しよう。
 [1] 先ず左の原図を時計まわりに45度回転する。そして、右図のようなひし形方陣を作る。

[2] 4辺の中点に位置する 3, 11, 23, 15を直線で結び、新たな五方陣の枠組みを作る。その枠内にゆるやかな間隔を置いて左下図のような五方陣図を作る。



[3] 第2図が得られたところで、外側の3×4数を内側に入れて行く。この時、三角形を成す3数ずつ（例. {1, 2, 6}あるいは{21, 16, 22}など）をまとめて相似に反対側に移動すると良い。

[4] 全部を内側にしまい終わったところで、第3図を得る。この内側に出来た五方陣が、我々が目標とする「対称五方陣」である。26の補数が、全て点対称の位置にあることを確認してほしい。次に各行・各列の和が65に等しくなっていることを確認してほしい。

2. 「古典的構成法」の解析

この構成法の始点と終点を抜き出せば、下図のようになる。すなわち、スタート方陣からゴール方陣への変換法を研究していることになる。この形は、原初方陣とひな形変換法の研究で再三試みたおなじみの組み合わせだ。ならば、同じ手法で、この2つを比較分析してみることにしよう。

[スタート方阵]										→	[ゴール方阵]									
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	11	24	7	20	3						
9	10	6	7	8	9	10	6	7	8	4	12	25	8	16						
14	15	11	12	13	14	15	11	12	13	17	5	13	21	9						
19	20	16	17	18	19	20	16	17	18	10	18	1	14	22						
24	25	21	22	23	24	25	21	22	23	23	6	19	2	15						
[拡張空間図]											[補数対称五方阵]									

スタート方阵は、基準配列をそのまま模倣したもので、普通は変数名を示す場所に名と同じ数値が入っている。これを並べ替えて目標方阵を作るのだが、原初方阵の性質を巧みに利用する。

原初方阵は、素敵なことに、実はそのまま「連立型」の対称汎五方阵なのである。先ず、次の補数ペアが、点对称に配置されていることを確かめてほしい。

(1, 25), (2, 24), (3, 23), (4, 22), (5, 21), (6, 20), (7, 19),
 (8, 18), (9, 17), (10, 16), (11, 15), (12, 14), (13, 13)

さらに、汎対角線の和をチェックしてみよう。

1 + 7 + 13 + 19 + 25 = 65 (1); 1 + 10 + 14 + 18 + 21 = 65 (2);
 2 + 8 + 14 + 20 + 21 = 65 (3); 2 + 6 + 15 + 19 + 23 = 65 (4);
 3 + 9 + 15 + 16 + 22 = 65 (5); 3 + 7 + 11 + 20 + 24 = 65 (6);
 4 + 10 + 11 + 17 + 23 = 65 (7); 4 + 8 + 12 + 16 + 25 = 65 (8);
 5 + 6 + 12 + 18 + 24 = 65 (9); 5 + 9 + 13 + 17 + 21 = 65 (10);

全 10本が、定数 65 に等しい。

行列の定和は、次の 2本しか成り立たないので、

3 + 8 + 13 + 18 + 23 = 65 ... (11); 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 65 ... (12);

「魔方陣」とは全然言えないのだが、それでもすでに対称性と汎性を両立させている。

この辺の必然性を論証したい人は、基本図を五進法分解して見るのが良いと思う。

[0]	/N5i	/D5i	High/Low
1 2 3 4 5	00 01 02 03 04	0 0 0 0 0	0 1 2 3 4
6 7 8 9 10	10 11 12 13 14	1 1 1 1 1	0 1 2 3 4
11 12 13 14 15	20 21 22 23 24	2 2 2 2 2	0 1 2 3 4
16 17 18 19 20	30 31 32 33 34	3 3 3 3 3	0 1 2 3 4
21 22 23 24 25	40 41 42 43 44	4 4 4 4 4	0 1 2 3 4

汎対角線は、すべて $(0 + 1 + 2 + 3 + 4) \times 5^1 + (0 + 1 + 2 + 3 + 4) \times 5^0 = 60_{(+)}$ という形で表わされる。定和の所以である。

補数の対称配置は、各面とも $(0 + 4) = (1 + 3) = (2 + 2) = 4$ の形で示されている。従って、 $4 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 24_{(+)}$

$60_{(+)}$, $24_{(+)}$ は、1~25を用いる古典的記数法では各々 $K=65$; $C=26$ に相当する。

次は、いよいよ変換法そのものを解析する。

数値 **1** の行方に注目しよう。内側に来る時に $10 + 18 + \mathbf{1} + 14 + 22$ の行に飛び込んでいる。これは、原初方阵では式(2)が表わす汎対角線の1本であった。

同様に数値 **2**, **6** は、 $23 + \mathbf{6} + 19 + \mathbf{2} + 15$ の行に飛び込んでいる。汎対角線(4)だ。

同様に数値 **21** は、 $2 + 14 + \mathbf{21} + 6 + 20$ の行に飛び込んでいる。これは汎対角線(3)だ。

同様に数値 **16**, **22** は、 $3 + \mathbf{16} + 9 + \mathbf{22} + 15$ の行に飛び込んでいる。汎対角線(5)だ。

.....

つまり、目標方陣で縦横の行列の定和を実現するために、原初方陣の汎対角線定和を利用しているのである。そして、それを可能にするために原初方陣を 45度回転させている。斜めに走る汎対角線を縦横の行列に作り変えるためである。

元から成り立っていた(11), (12)式は、目標方陣の主対角線として利用する。元の縦横の行列の定和を、45度回転して目標方陣の斜めの主対角線にしたのである。

この「古典的」構成法のマジックは、斜めの汎対角線を縦横の行列に読み換え、縦横の行列を斜めの主対角線に読み換えることだったのだ。

あとは、補数配置の対称性を崩さないように数をなるべく対称的に移動させることだ。相手を意識しながら、補数の移動を実際に確かめてほしい。

3. 古典的構成法の可能性を広げる

この「古典的構成法」は、基準配列から奇数次の対称方陣を構成するために作られた。3次でも、5次でも、7次でも、... どんな高次でも使える「万能」の変換法だが、誰も他の使い道にはほとんど言及していない。果たして他のタイプの変換には、全然使えないのだろうか。

ここで、前段の解析に戻る。この古典的構成法の本質は、対称汎方陣を補数対称型の魔方陣に変換するマジックであった。従って、元のスタート方陣は、(「魔方陣」でなくても良いから、そのかわりに) 是が非でも連立型の対称汎方陣でなければならなかった。

原初五方陣の場合には、そういう解集合をわざわざ作ってまで用意した。そうして、結局全数の対称五方陣を再現・構成することに成功した。

今回は、別の解集合を用意して、変換を試みたい。

狙いは、我が珠玉の「鈴木方陣」である。16個の連立型対称汎五方陣にこの「古典的変換法」を施す。結果はどうなるであろうか。とにかく実験して見よう。

4. 変換の実際

変換のための基本図は、下図のようにする。25個の変数を用意し、その名を下図のように決める。

[基準方陣]	→	[目的方陣]																																																		
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>n1</td><td>n2</td><td>n3</td><td>n4</td><td>n5</td></tr> <tr><td>n6</td><td>n7</td><td>n8</td><td>n9</td><td>10</td></tr> <tr><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr> <tr><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr> <tr><td>21</td><td>22</td><td>23</td><td>24</td><td>25</td></tr> </table>	n1	n2	n3	n4	n5	n6	n7	n8	n9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>11</td><td>24</td><td>n7</td><td>20</td><td>n3</td></tr> <tr><td>n4</td><td>12</td><td>25</td><td>n8</td><td>16</td></tr> <tr><td>17</td><td>n5</td><td>13</td><td>21</td><td>n9</td></tr> <tr><td>10</td><td>18</td><td>n1</td><td>14</td><td>22</td></tr> <tr><td>23</td><td>n6</td><td>19</td><td>n2</td><td>15</td></tr> </table>	11	24	n7	20	n3	n4	12	25	n8	16	17	n5	13	21	n9	10	18	n1	14	22	23	n6	19	n2	15
n1	n2	n3	n4	n5																																																
n6	n7	n8	n9	10																																																
11	12	13	14	15																																																
16	17	18	19	20																																																
21	22	23	24	25																																																
11	24	n7	20	n3																																																
n4	12	25	n8	16																																																
17	n5	13	21	n9																																																
10	18	n1	14	22																																																
23	n6	19	n2	15																																																
[基準配列]		[点对称五方陣]																																																		

変換のための規則は、次のように記述する。

「基準方陣の n1 の値を目的方陣の n18に入れる。」	<code>newn[18]=oldn[1];</code>
「基準方陣の n2 の値を目的方陣の n24に入れる。」	<code>newn[24]=oldn[2];</code>
「基準方陣の n3 の値を目的方陣の n5に入れる。」	<code>newn[5]=oldn[3];</code>
「基準方陣の n4 の値を目的方陣の n6に入れる。」	<code>newn[6]=oldn[4];</code>
.....	
「基準方陣の n24の値を目的方陣の n2に入れる。」	<code>newn[2]=oldn[24];</code>
「基準方陣の n25の値を目的方陣の n8に入れる。」	<code>newn[8]=oldn[25];</code>

これを例の 16 個の対称汎五方陣の解に施す。実験の結果は、次の通りだ。リストを示す。

** 対称汎五方陣の解に古典的変換法を施す実験 **

1/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
1 15 24 18 7	10 11 17 3 24	2 14 21 18 10	1 18 24 15 7
23 17 6 5 14	18 4 25 6 12	23 20 7 4 11	12 9 20 21 3
10 4 13 22 16	21 7 13 19 5	9 1 13 25 17	10 22 13 4 16
12 21 20 9 3	14 20 1 22 8	15 22 19 6 3	23 5 6 17 14
19 8 2 11 25	2 23 9 15 16	16 8 5 12 24	19 11 2 8 25
2/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
1 23 20 14 7	22 3 9 11 20	4 23 17 15 6	1 14 20 23 7
15 9 2 21 18	14 16 25 2 8	12 10 1 24 18	8 17 24 5 11
22 16 13 10 4	5 7 13 19 21	21 19 13 7 5	22 10 13 16 4
8 5 24 17 11	18 24 1 10 12	8 2 25 16 14	15 21 2 9 18
19 12 6 3 25	6 15 17 23 4	20 11 9 3 22	19 3 6 12 25
3/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
1 15 22 18 9	10 11 19 3 22	4 12 21 18 10	1 18 22 15 9
23 19 6 5 12	18 2 25 6 14	23 20 9 2 11	14 7 20 21 3
10 2 13 24 16	21 9 13 17 5	7 1 13 25 19	10 24 13 2 16
14 21 20 7 3	12 20 1 24 8	15 24 17 6 3	23 5 6 19 12
17 8 4 11 25	4 23 7 15 16	16 8 5 14 22	17 11 4 8 25
4/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
1 23 20 12 9	24 3 7 11 20	2 23 19 15 6	1 12 20 23 9
15 7 4 21 18	12 16 25 4 8	14 10 1 22 18	8 19 22 5 11
24 16 13 10 2	5 9 13 17 21	21 17 13 9 5	24 10 13 16 2
8 5 22 19 11	18 22 1 10 14	8 4 25 16 12	15 21 4 7 18
17 14 6 3 25	6 15 19 23 2	20 11 7 3 24	17 3 6 14 25
5/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
2 14 25 18 6	9 12 16 3 25	1 15 22 18 9	2 18 25 14 6
23 16 7 4 15	18 5 24 7 11	23 19 6 5 12	11 10 19 22 3
9 5 13 21 17	22 6 13 20 4	10 2 13 24 16	9 21 13 5 17
11 22 19 10 3	15 19 2 21 8	14 21 20 7 3	23 4 7 16 15
20 8 1 12 24	1 23 10 14 17	17 8 4 11 25	20 12 1 8 24
6/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
2 23 19 15 6	21 3 10 12 19	5 23 16 14 7	2 15 19 23 6
14 10 1 22 18	15 17 24 1 8	11 9 2 25 18	8 16 25 4 12
21 17 13 9 5	4 6 13 20 22	22 20 13 6 4	21 9 13 17 5
8 4 25 16 12	18 25 2 9 11	8 1 24 17 15	14 22 1 10 18
20 11 7 3 24	7 14 16 23 5	19 12 10 3 21	20 3 7 11 24
7/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
2 14 21 18 10	9 12 20 3 21	5 11 22 18 9	2 18 21 14 10
23 20 7 4 11	18 1 24 7 15	23 19 10 1 12	15 6 19 22 3
9 1 13 25 17	22 10 13 16 4	6 2 13 24 20	9 25 13 1 17
15 22 19 6 3	11 19 2 25 8	14 25 16 7 3	23 4 7 20 11
16 8 5 12 24	5 23 6 14 17	17 8 4 15 21	16 12 5 8 24
8/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
2 23 19 11 10	25 3 6 12 19	1 23 20 14 7	2 11 19 23 10
14 6 5 22 18	11 17 24 5 8	15 9 2 21 18	8 20 21 4 12
25 17 13 9 1	4 10 13 16 22	22 16 13 10 4	25 9 13 17 1
8 4 21 20 12	18 21 2 9 15	8 5 24 17 11	14 22 5 6 18
16 15 7 3 24	7 14 20 23 1	19 12 6 3 25	16 3 7 15 24
9/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
4 12 25 18 6	7 14 16 3 25	1 15 24 18 7	4 18 25 12 6
23 16 9 2 15	18 5 22 9 11	23 17 6 5 14	11 10 17 24 3
7 5 13 21 19	24 6 13 20 2	10 4 13 22 16	7 21 13 5 19
11 24 17 10 3	15 17 4 21 8	12 21 20 9 3	23 2 9 16 15
20 8 1 14 22	1 23 10 12 19	19 8 2 11 25	20 14 1 8 22

10/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
4 23 17 15 6	21 3 10 14 17	5 23 16 12 9	4 15 17 23 6
12 10 1 24 18	15 19 22 1 8	11 7 4 25 18	8 16 25 2 14
21 19 13 7 5	2 6 13 20 24	24 20 13 6 2	21 7 13 19 5
8 2 25 16 14	18 25 4 7 11	8 1 22 19 15	12 24 1 10 18
20 11 9 3 22	9 12 16 23 5	17 14 10 3 21	20 3 9 11 22
11/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
4 12 21 18 10	7 14 20 3 21	5 11 24 18 7	4 18 21 12 10
23 20 9 2 11	18 1 22 9 15	23 17 10 1 14	15 6 17 24 3
7 1 13 25 19	24 10 13 16 2	6 4 13 22 20	7 25 13 1 19
15 24 17 6 3	11 17 4 25 8	12 25 16 9 3	23 2 9 20 11
16 8 5 14 22	5 23 6 12 19	19 8 2 15 21	16 14 5 8 22
12/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
4 23 17 11 10	25 3 6 14 17	1 23 20 12 9	4 11 17 23 10
12 6 5 24 18	11 19 22 5 8	15 7 4 21 18	8 20 21 2 14
25 19 13 7 1	2 10 13 16 24	24 16 13 10 2	25 7 13 19 1
8 2 21 20 14	18 21 4 7 15	8 5 22 19 11	12 24 5 6 18
16 15 9 3 22	9 12 20 23 1	17 14 6 3 25	16 3 9 15 22
13/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
5 11 24 18 7	6 15 17 3 24	2 14 25 18 6	5 18 24 11 7
23 17 10 1 14	18 4 21 10 12	23 16 7 4 15	12 9 16 25 3
6 4 13 22 20	25 7 13 19 1	9 5 13 21 17	6 22 13 4 20
12 25 16 9 3	14 16 5 22 8	11 22 19 10 3	23 1 10 17 14
19 8 2 15 21	2 23 9 11 20	20 8 1 12 24	19 15 2 8 21
14/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
5 23 16 14 7	22 3 9 15 16	4 23 17 11 10	5 14 16 23 7
11 9 2 25 18	14 20 21 2 8	12 6 5 24 18	8 17 24 1 15
22 20 13 6 4	1 7 13 19 25	25 19 13 7 1	22 6 13 20 4
8 1 24 17 15	18 24 5 6 12	8 2 21 20 14	11 25 2 9 18
19 12 10 3 21	10 11 17 23 4	16 15 9 3 22	19 3 10 12 21
15/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
5 11 22 18 9	6 15 19 3 22	4 12 25 18 6	5 18 22 11 9
23 19 10 1 12	18 2 21 10 14	23 16 9 2 15	14 7 16 25 3
6 2 13 24 20	25 9 13 17 1	7 5 13 21 19	6 24 13 2 20
14 25 16 7 3	12 16 5 24 8	11 24 17 10 3	23 1 10 19 12
17 8 4 15 21	4 23 7 11 20	20 8 1 14 22	17 15 4 8 21
16/原形	/変換形-1	/清書形	/変換形-2
5 23 16 12 9	24 3 7 15 16	2 23 19 11 10	5 12 16 23 9
11 7 4 25 18	12 20 21 4 8	14 6 5 22 18	8 19 22 1 15
24 20 13 6 2	1 9 13 17 25	25 17 13 9 1	24 6 13 20 2
8 1 22 19 15	18 22 5 6 14	8 4 21 20 12	11 25 4 7 18
17 14 10 3 21	10 11 19 23 2	16 15 7 3 24	17 3 10 14 21

[Count = 16]

各リストの「清書形」の意味は、変換した結果が $n1 < n5 < n21$, $n1 < n25$ の範囲に収まるように、回転もしくは反転させて清書・変形しておいたということ。こうすると、自他のリストのどれと同じ解なのかを発見しやすくなる。

上のリストの最後にある /変換形-2 は、言わば「付録」で、次のような変換を表わしている。縦にも横にも2行列目と4行列目を交換する変換で、始点と終点のイメージを概念図で表わせば

0/原形	/変換形-2
1 2 3 4 5	1 4 3 2 5
6 7 8 9 10	16 19 18 17 20
11 12 13 14 15	11 14 13 12 15
16 17 18 19 20	6 9 8 7 10
21 22 23 24 25	21 24 23 22 25

上のようになる。

この変換を対称汎五方陣に施すと、完全オイラー方陣の特性を失わずに「別の」対称五方陣16個に書き換えることができる。もはや連立型の対称汎五方陣ではなくなってしまうが、それでも立派な完全オイラー型の対称五方陣になってくれる。

5. 結果の分析

上の結果から何がわかるであろうか。古典的構成法によって変換した結果はどれも、自らの解集合の中に戻って来ている。No. 1は、変換されて No. 7になっている。No. 2は、No. 10になっている。No. 3は No. 11 に、・・・、No. 16 は No. 8 に変換されている。結果はいずれも連立型対称汎五方陣であり、「完全オイラー方陣」なのである。

これには、いささか驚かされた。

これは、何を意味するか。対称汎五方陣の 16 個の解集合で

(No. 1 → No. 7), (No. 2 → No. 10), (No. 3 → No. 11), (No. 4 → No. 6),
 (No. 5 → No. 3), (No. 6 → No. 14), (No. 7 → No. 15), (No. 8 → No. 2),
 (No. 9 → No. 1), (No. 10 → No. 16), (No. 11 → No. 13), (No. 12 → No. 4),
 (No. 13 → No. 5), (No. 14 → No. 12), (No. 15 → No. 9), (No. 16 → No. 8)

という 16 組のペアリングが出来ると言うこと。

さらに、この変換を共通項を媒介にして連続して行えば、

(No. 1 → No. 7 → No. 15 → No. 9 → No. 1), (No. 2 → No. 10 → No. 16 → No. 8 → No. 2),
 (No. 3 → No. 11 → No. 13 → No. 5 → No. 3), (No. 4 → No. 6 → No. 14 → No. 12 → No. 4)

という 4 つのグルーピングができる。

4 × 4 に解を組分けしても、重複する解が無く、全てを尽くしている。まさか、このように円環を成す自己完結の連鎖があるとは、当初は予想すらしなかった。

次は、頭の 4 つの間で相互変換の可能性を探れば良い。基礎研究になると思われる。

* 古典的構成法による連続変換の結果 *

1/ 1 15 24 18 7	7/ 2 14 21 18 10	15/ 5 11 22 18 9	9/ 4 12 25 18 6	1/ 1 15 24 18 7
23 17 6 5 14	23 20 7 4 11	23 19 10 1 12	23 16 9 2 15	23 17 6 5 14
10 4 13 22 16	9 1 13 25 17	6 2 13 24 20	7 5 13 21 19	10 4 13 22 16
12 21 20 9 3	15 22 19 6 3	14 25 16 7 3	11 24 17 10 3	12 21 20 9 3
19 8 2 11 25	16 8 5 12 24	17 8 4 15 21	20 8 1 14 22	19 8 2 11 25
2/ 1 23 20 14 7	10/ 4 23 17 15 6	16/ 5 23 16 12 9	8/ 2 23 19 11 10	2/ 1 23 20 14 7
15 9 2 21 18	12 10 1 24 18	11 7 4 25 18	14 6 5 22 18	15 9 2 21 18
22 16 13 10 4	21 19 13 7 5	24 20 13 6 2	25 17 13 9 1	22 16 13 10 4
8 5 24 17 11	8 2 25 16 14	8 1 22 19 15	8 4 21 20 12	8 5 24 17 11
19 12 6 3 25	20 11 9 3 22	17 14 10 3 21	16 15 7 3 24	19 12 6 3 25
3/ 1 15 22 18 9	11/ 4 12 21 18 10	13/ 5 11 24 18 7	5/ 2 14 25 18 6	3/ 1 15 22 18 9
23 19 6 5 12	23 20 9 2 11	23 17 10 1 14	23 16 7 4 15	23 19 6 5 12
10 2 13 24 16	7 1 13 25 19	6 4 13 22 20	9 5 13 21 17	10 2 13 24 16
14 21 20 7 3	15 24 17 6 3	12 25 16 9 3	11 22 19 10 3	14 21 20 7 3
17 8 4 11 25	16 8 5 14 22	19 8 2 15 21	20 8 1 12 24	17 8 4 11 25
4/ 1 23 20 12 9	6/ 2 23 19 15 6	14/ 5 23 16 14 7	12/ 4 23 17 11 10	4/ 1 23 20 12 9
15 7 4 21 18	14 10 1 22 18	11 9 2 25 18	12 6 5 24 18	15 7 4 21 18
24 16 13 10 2	21 17 13 9 5	22 20 13 6 4	25 19 13 7 1	24 16 13 10 2
8 5 22 19 11	8 4 25 16 12	8 1 24 17 15	8 2 21 20 14	8 5 22 19 11
17 14 6 3 25	20 11 7 3 24	19 12 10 3 21	16 15 9 3 22	17 14 6 3 25

6. 変換法と大基本解

その後の対称汎五方陣の研究で、様々な変換法を組み合わせれば、たった 1 個の大基本解から他の 15 個の解の全てを再現・構成できることがわかった。

今までの研究で、変換法として「古典的構成法」を用いれば、
 (No. 1 → No. 7 → No. 15 → No. 9), (No. 2 → No. 10 → No. 16 → No. 8),
 (No. 3 → No. 11 → No. 13 → No. 5), (No. 4 → No. 6 → No. 14 → No. 12)
 というふうに頭の4個から他の4 × 3 = 12個が作れることがわかっている。残りは、その
 頭の4個をどう作るか。どれか1個から他の3個を作れるかどうかという課題が残る。

1/	2/	3/	4/
1 15 24 18 7	1 23 20 14 7	1 15 22 18 9	1 23 20 12 9
23 17 6 5 14	15 9 2 21 18	23 19 6 5 12	15 7 4 21 18
10 4 13 22 16	22 16 13 10 4	10 2 13 24 16	24 16 13 10 2
12 21 20 9 3	8 5 24 17 11	14 21 20 7 3	8 5 22 19 11
19 8 2 11 25	19 12 6 3 25	17 8 4 11 25	17 14 6 3 25

この解決のために解 1/～4/を相互に精密に比較し、変換法を探ることにする。シンプルな「変換法」にするために、動かす部分はなるべく少なくしたい。先ずは、2つの解を任意に選んで一致する部分をさがし、共通箇所の多いペアのみを残す。比較する相手としては、通常の形の解と右上/左下方向を鏡映反転させた解を用意する。調べた結果、次のような8個のペアが見つかった。

1/	/共通部分	3/原形
1 15 24 18 7	1 15 # 18 #	1 15 22 18 9
23 17 6 5 14	23 # 6 5 #	23 19 6 5 12
10 4 13 22 16	10 # 13 # 16	10 2 13 24 16
12 21 20 9 3	# 21 20 # 3	14 21 20 7 3
19 8 2 11 25	# 8 # 11 25	17 8 4 11 25
1/	/共通部分	4/反転形
1 15 24 18 7	1 15 24 # #	1 15 24 8 17
23 17 6 5 14	23 # # 5 14	23 7 16 5 14
10 4 13 22 16	# 4 13 22 #	20 4 13 22 6
12 21 20 9 3	12 21 # # 3	12 21 10 19 3
19 8 2 11 25	# # 2 11 25	9 18 2 11 25
2/	/共通部分	4/原形
1 23 20 14 7	1 23 20 # #	1 23 20 12 9
15 9 2 21 18	15 # # 21 18	15 7 4 21 18
22 16 13 10 4	# 16 13 10 #	24 16 13 10 2
8 5 24 17 11	8 5 # # 11	8 5 22 19 11
19 12 6 3 25	# # 6 3 25	17 14 6 3 25
2/	/共通部分	3/反転形
1 23 20 14 7	1 23 # 14 #	1 23 10 14 17
15 9 2 21 18	15 # 2 21 #	15 19 2 21 8
22 16 13 10 4	22 # 13 # 4	22 6 13 20 4
8 5 24 17 11	# 5 24 # 11	18 5 24 7 11
19 12 6 3 25	# 12 # 3 25	9 12 16 3 25
3/	/共通部分	1/原形
1 15 22 18 9	1 15 # 18 #	1 15 24 18 7
23 19 6 5 12	23 # 6 5 #	23 17 6 5 14
10 2 13 24 16	10 # 13 # 16	10 4 13 22 16
14 21 20 7 3	# 21 20 # 3	12 21 20 9 3
17 8 4 11 25	# 8 # 11 25	19 8 2 11 25
3/	/共通部分	2/反転形
1 15 22 18 9	1 15 22 # #	1 15 22 8 19
23 19 6 5 12	23 # # 5 12	23 9 16 5 12
10 2 13 24 16	# 2 13 24 #	20 2 13 24 6
14 21 20 7 3	14 21 # # 3	14 21 10 17 3
17 8 4 11 25	# # 4 11 25	7 18 4 11 25

4/		/共通部分	2/原形
1 23 20 12 9	1 23 20 # #	1 23 20 14 7	
15 7 4 21 18	15 # # 21 18	15 9 2 21 18	
24 16 13 10 2	# 16 13 10 #	22 16 13 10 4	
8 5 22 19 11	8 5 # # 11	8 5 24 17 11	
17 14 6 3 25	# # 6 3 25	19 12 6 3 25	
4/		/共通部分	1/反転形
1 23 20 12 9	1 23 # 12 #	1 23 10 12 19	
15 7 4 21 18	15 # 4 21 #	15 17 4 21 8	
24 16 13 10 2	24 # 13 # 2	24 6 13 20 2	
8 5 22 19 11	# 5 22 # 11	18 5 22 9 11	
17 14 6 3 25	# 14 # 3 25	7 14 16 3 25	

そうして、変換法をさぐる。詳しい説明は省くが、結局のところ、次の3つの変換法を用意し、それらを適宜組み合わせれば、1つの解から他の3つの解が再現・構成できることがわかった。ただし、頭が奇数番号のものと偶数番号のものでは、細かい手順が少し異なる。実際には、2系列の変換法を用意する必要がある。

```

/**/
/* 変換法 その1 */
void trnsf1(){
    d[1]=c[1];   d[2]=c[2];   d[3]=c[14];   d[4]=c[4];   d[5]=c[19];
    d[6]=c[6];   d[7]=c[21];  d[8]=c[8];   d[9]=c[9];   d[10]=c[16];
    d[11]=c[11]; d[12]=c[23];  d[13]=c[13]; d[14]=c[3];  d[15]=c[15];
    d[16]=c[10]; d[17]=c[17];  d[18]=c[18]; d[19]=c[5];  d[20]=c[20];
    d[21]=c[7];  d[22]=c[22];  d[23]=c[12]; d[24]=c[24]; d[25]=c[25];
}
/**/
/* 変換法 その2 */
void trnsf2(){
    d[1]=c[1];   d[2]=c[2];   d[3]=c[3];   d[4]=c[22];  d[5]=c[7];
    d[6]=c[6];   d[7]=c[5];   d[8]=c[15];  d[9]=c[9];   d[10]=c[10];
    d[11]=c[18]; d[12]=c[12];  d[13]=c[13]; d[14]=c[14];  d[15]=c[8];
    d[16]=c[16]; d[17]=c[17];  d[18]=c[11]; d[19]=c[21];  d[20]=c[20];
    d[21]=c[19]; d[22]=c[4];   d[23]=c[23]; d[24]=c[24];  d[25]=c[25];
}
/**/
/* 鏡映反転 */
void reflct(){
    d[1]=c[1];   d[2]=c[6];   d[3]=c[11];  d[4]=c[16];  d[5]=c[21];
    d[6]=c[2];   d[7]=c[7];   d[8]=c[12];  d[9]=c[17];  d[10]=c[22];
    d[11]=c[3];  d[12]=c[8];   d[13]=c[13]; d[14]=c[18];  d[15]=c[23];
    d[16]=c[4];  d[17]=c[9];   d[18]=c[14]; d[19]=c[19];  d[20]=c[24];
    d[21]=c[5];  d[22]=c[10];  d[23]=c[15]; d[24]=c[20];  d[25]=c[25];
}
/**/

```

原型を含めて4個を横に並べ、それぞれについて「古典的」変換法を施し、縦2列目を作る。そして次は、縦2列目の各々について古典的変換法を施し、縦3列目を作る。同様にして、縦4列目も作る。次の表の縦方向が、古典的変換法の連続適用の成果である。

*** 様々な変換法を用いて1個の解から他の15個の解を作る ***

1/Original	3/T1	4/T2	2/T3
1 15 24 18 7	1 15 22 18 9	1 23 20 12 9	1 23 20 14 7
23 17 6 5 14	23 19 6 5 12	15 7 4 21 18	15 9 2 21 18
10 4 13 22 16	10 2 13 24 16	24 16 13 10 2	22 16 13 10 4
12 21 20 9 3	14 21 20 7 3	8 5 22 19 11	8 5 24 17 11
19 8 2 11 25	17 8 4 11 25	17 14 6 3 25	19 12 6 3 25

7/T4	11/T5	6/T6	10/T7
2 14 21 18 10	4 12 21 18 10	2 23 19 15 6	4 23 17 15 6
23 20 7 4 11	23 20 9 2 11	14 10 1 22 18	12 10 1 24 18
9 1 13 25 17	7 1 13 25 19	21 17 13 9 5	21 19 13 7 5
15 22 19 6 3	15 24 17 6 3	8 4 25 16 12	8 2 25 16 14
16 8 5 12 24	16 8 5 14 22	20 11 7 3 24	20 11 9 3 22

15/T8	13/T9	14/T10	16/T11
5 11 22 18 9	5 11 24 18 7	5 23 16 14 7	5 23 16 12 9
23 19 10 1 12	23 17 10 1 14	11 9 2 25 18	11 7 4 25 18
6 2 13 24 20	6 4 13 22 20	22 20 13 6 4	24 20 13 6 2
14 25 16 7 3	12 25 16 9 3	8 1 24 17 15	8 1 22 19 15
17 8 4 15 21	19 8 2 15 21	19 12 10 3 21	17 14 10 3 21

9/T12	5/T13	12/T14	8/T15
4 12 25 18 6	2 14 25 18 6	4 23 17 11 10	2 23 19 11 10
23 16 9 2 15	23 16 7 4 15	12 6 5 24 18	14 6 5 22 18
7 5 13 21 19	9 5 13 21 17	25 19 13 7 1	25 17 13 9 1
11 24 17 10 3	11 22 19 10 3	8 2 21 20 14	8 4 21 20 12
20 8 1 14 22	20 8 1 12 24	16 15 9 3 22	16 15 7 3 24

2/Original	4/T1	3/T2	1/T3
1 23 20 14 7	1 23 20 12 9	1 15 22 18 9	1 15 24 18 7
15 9 2 21 18	15 7 4 21 18	23 19 6 5 12	23 17 6 5 14
22 16 13 10 4	24 16 13 10 2	10 2 13 24 16	10 4 13 22 16
8 5 24 17 11	8 5 22 19 11	14 21 20 7 3	12 21 20 9 3
19 12 6 3 25	17 14 6 3 25	17 8 4 11 25	19 8 2 11 25

10/T4	6/T5	11/T6	7/T7
4 23 17 15 6	2 23 19 15 6	4 12 21 18 10	2 14 21 18 10
12 10 1 24 18	14 10 1 22 18	23 20 9 2 11	23 20 7 4 11
21 19 13 7 5	21 17 13 9 5	7 1 13 25 19	9 1 13 25 17
8 2 25 16 14	8 4 25 16 12	15 24 17 6 3	15 22 19 6 3
20 11 9 3 22	20 11 7 3 24	16 8 5 14 22	16 8 5 12 24

16/T8	14/T9	13/T10	15/T11
5 23 16 12 9	5 23 16 14 7	5 11 24 18 7	5 11 22 18 9
11 7 4 25 18	11 9 2 25 18	23 17 10 1 14	23 19 10 1 12
24 20 13 6 2	22 20 13 6 4	6 4 13 22 20	6 2 13 24 20
8 1 22 19 15	8 1 24 17 15	12 25 16 9 3	14 25 16 7 3
17 14 10 3 21	19 12 10 3 21	19 8 2 15 21	17 8 4 15 21

8/T12	12/T13	5/T14	9/T15
2 23 19 11 10	4 23 17 11 10	2 14 25 18 6	4 12 25 18 6
14 6 5 22 18	12 6 5 24 18	23 16 7 4 15	23 16 9 2 15
25 17 13 9 1	25 19 13 7 1	9 5 13 21 17	7 5 13 21 19
8 4 21 20 12	8 2 21 20 14	11 22 19 10 3	11 24 17 10 3
16 15 7 3 24	16 15 9 3 22	20 8 1 12 24	20 8 1 14 22

.....

4/Original	2/T1	1/T2	3/T3
1 23 20 12 9	1 23 20 14 7	1 15 24 18 7	1 15 22 18 9
15 7 4 21 18	15 9 2 21 18	23 17 6 5 14	23 19 6 5 12
24 16 13 10 2	22 16 13 10 4	10 4 13 22 16	10 2 13 24 16
8 5 22 19 11	8 5 24 17 11	12 21 20 9 3	14 21 20 7 3
17 14 6 3 25	19 12 6 3 25	19 8 2 11 25	17 8 4 11 25

6/T4	10/T5	7/T6	11/T7
2 23 19 15 6	4 23 17 15 6	2 14 21 18 10	4 12 21 18 10
14 10 1 22 18	12 10 1 24 18	23 20 7 4 11	23 20 9 2 11
21 17 13 9 5	21 19 13 7 5	9 1 13 25 17	7 1 13 25 19
8 4 25 16 12	8 2 25 16 14	15 22 19 6 3	15 24 17 6 3
20 11 7 3 24	20 11 9 3 22	16 8 5 12 24	16 8 5 14 22

14/T8	16/T9	15/T10	13/T11
5 23 16 14 7	5 23 16 12 9	5 11 22 18 9	5 11 24 18 7
11 9 2 25 18	11 7 4 25 18	23 19 10 1 12	23 17 10 1 14
22 20 13 6 4	24 20 13 6 2	6 2 13 24 20	6 4 13 22 20
8 1 24 17 15	8 1 22 19 15	14 25 16 7 3	12 25 16 9 3
19 12 10 3 21	17 14 10 3 21	17 8 4 15 21	19 8 2 15 21
12/T12	8/T13	9/T14	5/T15
4 23 17 11 10	2 23 19 11 10	4 12 25 18 6	2 14 25 18 6
12 6 5 24 18	14 6 5 22 18	23 16 9 2 15	23 16 7 4 15
25 19 13 7 1	25 17 13 9 1	7 5 13 21 19	9 5 13 21 17
8 2 21 20 14	8 4 21 20 12	11 24 17 10 3	11 22 19 10 3
16 15 9 3 22	16 15 7 3 24	20 8 1 14 22	20 8 1 12 24

上の例は、No. 1, 2, 4を原型にした場合であるが、どれもうまく他の15個を再現・構成することができている。「大基本解」としてどの1つを指名しても良いことになる。

今回は、No. 4を「代表解」としたい。なぜなら、原初五方陣の稿で詳述したように、それならば基準配列から規則的に構成することができるからである。

以上の成果は、我々が「鈴木方陣(対称汎五方陣)」の堅固な内的構造と峻厳な自己完結性を物語っているように、思う。それが具体的・客観的に確かめられた、と思う。

7. 再び「古典的構成法」について追加研究の報告

例の「古典的構成法」が対称汎五方陣に対してユニークな変換をするという発見は、その後もいつも心に懸かっていた。特に出力を入力に接続して変換を4回繰り返すと解が元に戻るといった面白い性質が、いつまでも頭を悩ました。どうしてそうなるのか。変換法にどんな構造的な特徴があるのか？

その答が、五進法分解図に関する最近の研究中に得られたので、追加報告する。

* 4個の基本解にそれぞれ「古典的構成法」による変換を施す *

1/	7/	15/	9/
1 15 24 18 7	2 14 21 18 10	5 11 22 18 9	4 12 25 18 6
23 17 6 5 14	23 20 7 4 11	23 19 10 1 12	23 16 9 2 15
10 4 13 22 16	9 1 13 25 17	6 2 13 24 20	7 5 13 21 19
12 21 20 9 3	15 22 19 6 3	14 25 16 7 3	11 24 17 10 3
19 8 2 11 25	16 8 5 12 24	17 8 4 15 21	20 8 1 14 22
2/	10/	16/	8/
1 23 20 14 7	4 23 17 15 6	5 23 16 12 9	2 23 19 11 10
15 9 2 21 18	12 10 1 24 18	11 7 4 25 18	14 6 5 22 18
22 16 13 10 4	21 19 13 7 5	24 20 13 6 2	25 17 13 9 1
8 5 24 17 11	8 2 25 16 14	8 1 22 19 15	8 4 21 20 12
19 12 6 3 25	20 11 9 3 22	17 14 10 3 21	16 15 7 3 24
3/	11/	13/	5/
1 15 22 18 9	4 12 21 18 10	5 11 24 18 7	2 14 25 18 6
23 19 6 5 12	23 20 9 2 11	23 17 10 1 14	23 16 7 4 15
10 2 13 24 16	7 1 13 25 19	6 4 13 22 20	9 5 13 21 17
14 21 20 7 3	15 24 17 6 3	12 25 16 9 3	11 22 19 10 3
17 8 4 11 25	16 8 5 14 22	19 8 2 15 21	20 8 1 12 24
4/	6/	14/	12/
1 23 20 12 9	2 23 19 15 6	5 23 16 14 7	4 23 17 11 10
15 7 4 21 18	14 10 1 22 18	11 9 2 25 18	12 6 5 24 18
24 16 13 10 2	21 17 13 9 5	22 20 13 6 4	25 19 13 7 1
8 5 22 19 11	8 4 25 16 12	8 1 24 17 15	8 2 21 20 14
17 14 6 3 25	20 11 7 3 24	19 12 10 3 21	16 15 9 3 22

[Count = 16] OK!

上のリストは、古典的構成法を連続して実行した結果、4×4のグルーピングが出来た連立型対称汎五方陣の解全16個を示している。既に何回も示したもののだが、再録した。

*** 同じ表を五進法分解図で表したリスト ***

2/ 02431	4/ 04321	2/ 02431	8/ 13024	2/ 02431	12/ 40123	2/ 02431	16/ 31420
43102	21043	43102	24130	43102	23401	43102	20314
10243	43210	10243	30241	10243	01234	10243	14203
24310	10432	24310	41302	24310	34012	24310	03142
31024	32104	31024	02413	31024	12340	31024	42031
4/ 04321	2/ 02431	4/ 04321	6/ 32140	4/ 04321	10/ 42013	4/ 04321	14/ 12304
21043	43102	21043	14032	21043	01342	21043	30412
43210	10243	43210	03214	43210	34201	43210	41230
10432	24310	10432	21403	10432	20134	10432	23041
32104	31024	32104	40321	32104	13420	32104	04123
2/ 02431	3/ 04123	2/ 02431	7/ 31024	2/ 02431	11/ 40321	2/ 02431	15/ 13420
43102	23041	43102	24310	43102	21403	43102	20134
10243	41230	10243	10243	10243	03214	10243	34201
24310	30412	24310	43102	24310	14032	24310	01342
31024	12304	31024	02431	31024	32140	31024	42013
4/ 04321	1/ 02413	4/ 04321	5/ 12340	4/ 04321	9/ 42031	4/ 04321	13/ 32104
21043	41302	21043	34012	21043	03142	21043	10432
43210	30241	43210	01234	43210	14203	43210	43210
10432	24130	10432	23401	10432	20314	10432	21043
32104	13024	32104	40123	32104	31420	32104	04321

[Count = 16] OK!

[使用されている 16パターン]

1/ 02413	2/ 02431	3/ 04123	4/ 04321
41302	43102	23041	21043
30241	10243	41230	43210
24130	24310	30412	10432
13024	31024	12304	32104
5/ 12340	6/ 32140	7/ 31024	8/ 13024
34012	14032	24310	24130
01234	03214	10243	30241
23401	21403	43102	41302
40123	40321	02431	02413
9/ 42031	10/ 42013	11/ 40321	12/ 40123
03142	01342	21403	23401
14203	34201	03214	01234
20314	20134	14032	34012
31420	13420	32140	12340
13/ 32104	14/ 12304	15/ 13420	16/ 31420
10432	30412	20134	20314
43210	41230	34201	14203
21043	23041	01342	03142
04321	04123	42013	42031

[Count of Layer Units = 16]

今回は、さらに上図のような五進法分解図のリストを添付する。解の順番をその上のリストと全く同じにしてある。

ここで使われている分解図のパターンを上位/下位に関係なく抜き出して調べてみたところ、16面しかなく、しかも4×4のグルーピングが出来ることがわかった。そのリストも示した。上のリストで使われている番号は、下のパターン番号である。

新たに加えたこの2図から、何がわかるであろうか。

(1) 対称汎五方陣の解の16個は、全て「完全オイラー方陣」である。すなわち、各行列・各汎対角線の5数の内容が、{0, 1, 2, 3, 4}で出来ていて(順不同)、特定の数字の重複も欠落も見られない。上位と下位の数字の組み合わせにも、重複・欠落が無い。この性質が全ての解の分解図の上位面でも下位面でも、きれいに成り立っている。

(2) 上位面には、分解図の2/と4/の2面しか使われていない。

(3) ユニットの4つのグループ内で、縦に見て行くと90度ずつの回転が起きている。実際に使われているのは、時計回りと反時計回りの2種類あるが、いずれにしても同一のユニットを「回し」ながら最大限に使っている。

これが、「古典的構成法」を用いて構成した解のグループ内の「円環構造」と対応する。0度→90度→180度→270度→0度、あるいは0度→-90度→-180度→-270度→0度という回転が、「古典的構成法を4回連続して実行すると元に戻る」性質と対応するのだ。

(4) グループの先頭のユニットどうしでは、1/と4/、2/と3/の間で「反転」が起きている。主対角線の1本を対称軸として要素の対称移動が見られる。

(5) この2つの変換(3)と(4)を使えば、2つの基本ユニットから16個のユニット全部を再構成できることになる。つまるところ、対称汎五方陣の解16個は、分解図の2つの基本ユニットにまで還元されることになる。

では、上位面にはなぜ2/と4/の2パターンしか来ないのか。

これには、リスト出力用の不等式が関わっている。我々は、解の出力を $n1 < n25$; $n1 < n5 < n21$; の範囲に収まるようにいつもふるいを掛けている。これを五進法分解図で見ると、数値の大小判断に関わるのは、上位の方が下位より決定的であるから、上位面ではいつも $n1 = 0$ にならざるを得ない(0が最小値だから)。すると、 $n25 = 4$ になる。

一方 $n13 = 2$ と決まっているから、残りの $n5$, $n21$ には、1と3のいずれかが入る。

(正方連結五数の定和により $\{n1, n5, n13, n21, n25\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ だから)

$n5 < n21$; があるので、 $n5 = 1$; $n21 = 3$; とならざるを得ない。

こうした条件を満たしているパターン・ユニットは、2/と4/の2個しかない。

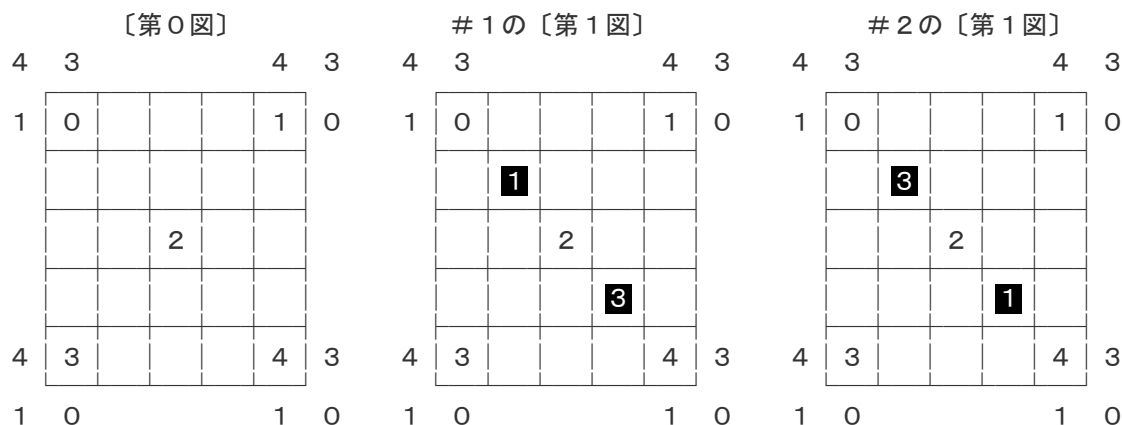
2/と4/の2ユニットがあれば、「反転」によって、3/と1/の2ユニットは作れる。

1/, 2/, 3/, 4/があれば、後は「回転」によって、全16面を作れる。

全16面が出来れば、リストを逆に使って、対称汎五方陣の解全16個を再構成できる。

では、2/と4/の2ユニットをどう作るか。設計の手順を示そう。

*** 五進法分解図の2つの基本パターン・ユニットを作る (その1) ***



先ずスタートは、上図の第0図のようにする。次は、n7, n19 を決めて主対角線の1本を作ろう。4/用と 2/用の2面を設計する。

*** 五進法分解図の2つの基本ユニットを作る (その2) ***

1 [第1図] [第2図] [第3図]

4	3					1	0
1	0					1	0
		1					
			2				
				3			
4	3					4	3
1	0					1	0

4	3					0	4	3
1	0					1	0	
		1	0					
0			2			0		
		0		3				
4	3					0	4	3
1	0					1	0	

4	3					1	0	4	3
1	0					1	0		
		1	0						
0			2	1	0				
		1	0			3			1
4	3					1	0	4	3
1	0					1	0		

[第4図] [第5図] [第6図]

4	3	2	1	0	4	3
1	0			2	1	0
	2	1	0			
0			2	1	0	
2	1	0		3	2	1
4	3	2	1	0	4	3
1	0			2	1	0

4	3	2	1	0	4	3	
1	0		3	2	1	0	
3	2	1	0		3	2	
0		3	2	1	0		
2	1	0		3	2	1	
4	3	2	1	0	4	3	
1	0			3	2	1	0

4	3	2	1	0	4	3
1	0	4	3	2	1	0
3	2	1	0	4	3	2
0	4	3	2	1	0	4
2	1	0	4	3	2	1
4	3	2	1	0	4	3
1	0	4	3	2	1	0

2 [第1図] [第2図] [第3図]

4	3					1	0
1	0					1	0
		3					
			2				
				1			
4	3					4	3
1	0					1	0

4	3					0	4	3
1	0					1	0	
		3		0				
		0	2					
0				1	0			
4	3					0	4	3
1	0					1	0	

4	3					0	4	3
1	0					3	1	0
		3		0				
3		0	2			3		
0				3	1	0		
4	3					0	4	3
1	0					3	1	0

[第4図] [第5図] [第6図]

4	3			0	2	4	3
1	0	2			3	1	0
2		3			0	2	
3		0	2			3	
0	2		3	1	0		2
4	3			0	2	4	3
1	0	2			3	1	0

4	3	1	0	2	4	3	
1	0	2			3	1	0
2		3	1	0	2		
3	1	0	2			3	1
0	2		3	1	0		2
4	3	1	0	2	4	3	
1	0	2			3	1	0

4	3	1	0	2	4	3
1	0	2	4	3	1	0
2	4	3	1	0	2	4
3	1	0	2	4	3	1
0	2	4	3	1	0	2
4	3	1	0	2	4	3
1	0	2	4	3	1	0

手順を6つのステップに分解して示した。主対角線が決まったら、後は「桂馬跳び法」で主対角線上の数値をコピーして行けば良い。# 1は「右1上2」、# 2は「右2上1」という

2種類の跳び方をして、同じ数値を埋めて行く。

こうしないと、「完全オイラー方陣」の分解図は作れないことがわかっている。

この後は、「反転」によって、2/から3/を、4/から1/を作る。1段目がそろったら、今度は縦に「90度ずつの回転形」（あるいは「反時計回りの回転形」）を作っていく。

(下図で 1/→5/→9/→13/, 2/→6/→10/→14/, 3/→7/→11/→15/, 4/→8/→12/→16/)

1/	2/	3/	4/
02413	02431	04123	04321
41302	43102	23041	21043
30241	10243	41230	43210
24130	24310	30412	10432
13024	31024	12304	32104
5/	6/	7/	8/
12340	32140	31024	13024
34012	14032	24310	24130
01234	03214	10243	30241
23401	21403	43102	41302
40123	40321	02431	02413
9/	10/	11/	12/
42031	42013	40321	40123
03142	01342	21403	23401
14203	34201	03214	01234
20314	20134	14032	34012
31420	13420	32140	12340
13/	14/	15/	16/
32104	12304	13420	31420
10432	30412	20134	20314
43210	41230	34201	14203
21043	23041	01342	03142
04321	04123	42013	42031

この16面を下図の通り組み合わせさせて「五進法分解図」とする。後は、計算で合成する。

[五進法分解図による計算で解を合成する：使用面/と解番号#]

2/H	3/L		1#	2/H	4/L		2#
02431	04123	1 15 22 18	9	02431	04321	1 15 24 18	7
43102	23041	23 19 6 5	12	43102	21043	23 17 6 5	14
10243	41230	10 2 13 24	16	10243	43210	10 4 13 22	16
24310	30412	14 21 20 7	3	24310	10432	12 21 20 9	3
31024	12304	17 8 4 11	25	31024	32104	19 8 2 11	25
2/H	7/L		3#	2/H	8/L		4#
02431	31024	4 12 21 18	10	02431	13024	2 14 21 18	10
43102	24310	23 20 9 2	11	43102	24130	23 20 7 4	11
10243	10243	7 1 13 25	19	10243	30241	9 1 13 25	17
24310	43102	15 24 17 6	3	24310	41302	15 22 19 6	3
31024	02431	16 8 5 14	22	31024	02413	16 8 5 12	24
2/H	11/L		5#	2/H	12/L		6#
02431	40321	5 11 24 18	7	02431	40123	5 11 22 18	9
43102	21403	23 17 10 1	14	43102	23401	23 19 10 1	12
10243	03214	6 4 13 22	20	10243	01234	6 2 13 24	20
24310	14032	12 25 16 9	3	24310	34012	14 25 16 7	3
31024	32140	19 8 2 15	21	31024	12340	17 8 4 15	21

2/H	15/L			7#	2/H	16/L			8#				
02431	13420	2	14	25	18	6	02431	31420	4	12	25	18	6
43102	20134	23	16	7	4	15	43102	20314	23	16	9	2	15
10243	34201	9	5	13	21	17	10243	14203	7	5	13	21	19
24310	01342	11	22	19	10	3	24310	03142	11	24	17	10	3
31024	42013	20	8	1	12	24	31024	42031	20	8	1	14	22

4/H	1/L			9#	4/H	2/L			10#				
04321	02413	1	23	20	12	9	04321	02431	1	23	20	14	7
21043	41302	15	7	4	21	18	21043	43102	15	9	2	21	18
43210	30241	24	16	13	10	2	43210	10243	22	16	13	10	4
10432	24130	8	5	22	19	11	10432	24310	8	5	24	17	11
32104	13024	17	14	6	3	25	32104	31024	19	12	6	3	25

4/H	5/L			11#	4/H	6/L			12#				
04321	12340	2	23	19	15	6	04321	32140	4	23	17	15	6
21043	34012	14	10	1	22	18	21043	14032	12	10	1	24	18
43210	01234	21	17	13	9	5	43210	03214	21	19	13	7	5
10432	23401	8	4	25	16	12	10432	21403	8	2	25	16	14
32104	40123	20	11	7	3	24	32104	40321	20	11	9	3	22

4/H	9/L			13#	4/H	10/L			14#				
04321	42031	5	23	16	14	7	04321	42013	5	23	16	12	9
21043	03142	11	9	2	25	18	21043	01342	11	7	4	25	18
43210	14203	22	20	13	6	4	43210	34201	24	20	13	6	2
10432	20314	8	1	24	17	15	10432	20134	8	1	22	19	15
32104	31420	19	12	10	3	21	32104	13420	17	14	10	3	21

4/H	13/L			15#	4/H	14/L			16#				
04321	32104	4	23	17	11	10	04321	12304	2	23	19	11	10
21043	10432	12	6	5	24	18	21043	30412	14	6	5	22	18
43210	43210	25	19	13	7	1	43210	41230	25	17	13	9	1
10432	21043	8	2	21	20	14	10432	23041	8	4	21	20	12
32104	04321	16	15	9	3	22	32104	04123	16	15	7	3	24

[Count = 16] (合成のために用いた計算式は、 $Vn = vHn \times 5 + vLn + 1$)

かくして、めでたく連立型対称汎五方陣の解全 16 個を「完全オイラー方陣」として再構成することができた。これは構造研究にも貢献する重要な成果だと、思う。

8. 対称五方陣にオイラー型は幾つあるか。

「オイラー型」(あるいは「グレコ-ラテン型」とも言う)の対称五方陣は、いったい幾つあるのだろうか。もちろん五進法分解してみた話である。

(1) 上位の面にも下位の面にも $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ が同数ずつあること。

(2) 各行列の構成が $(0 + 1 + 2 + 3 + 4) \times 5 + (0 + 1 + 2 + 3 + 4) = 60_{(+)}$ という定和式を満たすこと。

(3) 上位と下位の数の組み合わせにも重複が無いこと。つまり、方陣構成に $0 \sim 44_{(五)}$ の整数をもれ落ちなく重複なく各 1 回ずつ使っていること。

(4) さらに主対角線の 2 本についても (2) を満たせば、「完全オイラー方陣」になる。

調べた結果、48544 個の解の中で (1) ~ (3) を満たす広義の「オイラー方陣」は、全部で 384 個見つかった。

(1) ~ (4) を満たす「完全オイラー方陣」は、32 個しかなかった。その内わけは、対称汎五方陣 16 個と、前のリストの /変換形-2 の 16 個である。前者は連立型なので、汎五方陣でもあるが、同時に対称五方陣でもあるので、ちゃんとカウントされている。

** 対称五方陣の解の中から「完全オイラー方陣」をさがす **

1/ /D5i					2/ /D5i						
1 18 22 15 9	0 3 4 2 1	0 2 1 4 3	14 7 20 21 3	2 1 3 4 0	3 1 4 0 2	1 23 20 12 9	0 4 3 2 1	0 2 4 1 3	15 7 4 21 18	2 1 0 4 3	4 1 3 0 2
10 24 13 2 16	1 4 2 0 3	4 3 2 1 0	23 5 6 19 12	4 0 1 3 2	2 4 0 3 1	24 16 13 10 2	4 3 2 1 0	3 0 2 4 1	8 5 22 19 11	1 0 4 3 2	2 4 1 3 0
17 11 4 8 25	3 2 0 1 4	1 0 3 2 4	17 11 4 8 25	3 2 0 1 4	1 0 3 2 4	17 14 6 3 25	3 2 1 0 4	1 3 0 2 4			
3/ /D5i					4/ /D5i						
1 18 24 15 7	0 3 4 2 1	0 2 3 4 1	12 9 20 21 3	2 1 3 4 0	1 3 4 0 2	1 23 20 14 7	0 4 3 2 1	0 2 4 3 1	15 9 2 21 18	2 1 0 4 3	4 3 1 0 2
10 22 13 4 16	1 4 2 0 3	4 1 2 3 0	23 5 6 17 14	4 0 1 3 2	2 4 0 1 3	22 16 13 10 4	4 3 2 1 0	1 0 2 4 3	8 5 24 17 11	1 0 4 3 2	2 4 3 1 0
19 11 2 8 25	3 2 0 1 4	3 0 1 2 4	19 11 2 8 25	3 2 0 1 4	3 0 1 2 4	19 12 6 3 25	3 2 1 0 4	3 1 0 2 4			
5/ /D5i					6/ /D5i						
1 14 20 23 7	0 2 3 4 1	0 3 4 2 1	8 17 24 5 11	1 3 4 0 2	2 1 3 4 0	1 15 24 18 7	0 2 4 3 1	0 4 3 2 1	23 17 6 5 14	4 3 1 0 2	2 1 0 4 3
22 10 13 16 4	4 1 2 3 0	1 4 2 0 3	15 21 2 9 18	2 4 0 1 3	4 0 1 3 2	10 4 13 22 16	1 0 2 4 3	4 3 2 1 0	12 21 20 9 3	2 4 3 1 0	1 0 4 3 2
19 3 6 12 25	3 0 1 2 4	3 2 0 1 4	19 3 6 12 25	3 0 1 2 4	3 2 0 1 4	19 8 2 11 25	3 1 0 2 4	3 2 1 0 4			
7/ /D5i					8/ /D5i						
1 12 20 23 9	0 2 3 4 1	0 1 4 2 3	8 19 22 5 11	1 3 4 0 2	2 3 1 4 0	1 15 22 18 9	0 2 4 3 1	0 4 1 2 3	23 19 6 5 12	4 3 1 0 2	2 3 0 4 1
24 10 13 16 2	4 1 2 3 0	3 4 2 0 1	15 21 4 7 18	2 4 0 1 3	4 0 3 1 2	10 2 13 24 16	1 0 2 4 3	4 1 2 3 0	14 21 20 7 3	2 4 3 1 0	3 0 4 1 2
17 3 6 14 25	3 0 1 2 4	1 2 0 3 4	17 3 6 14 25	3 0 1 2 4	1 2 0 3 4	17 8 4 11 25	3 1 0 2 4	1 2 3 0 4			
9/ /D5i					10/ /D5i						
2 18 21 14 10	0 3 4 2 1	1 2 0 3 4	15 6 19 22 3	2 1 3 4 0	4 0 3 1 2	2 23 19 11 10	0 4 3 2 1	1 2 3 0 4	14 6 5 22 18	2 1 0 4 3	3 0 4 1 2
9 25 13 1 17	1 4 2 0 3	3 4 2 0 1	23 4 7 20 11	4 0 1 3 2	2 3 1 4 0	25 17 13 9 1	4 3 2 1 0	4 1 2 3 0	8 4 21 20 12	1 0 4 3 2	2 3 0 4 1
16 12 5 8 24	3 2 0 1 4	0 1 4 2 3	16 12 5 8 24	3 2 0 1 4	0 1 4 2 3	16 15 7 3 24	3 2 1 0 4	0 4 1 2 3			
11/ /D5i					12/ /D5i						
2 18 25 14 6	0 3 4 2 1	1 2 4 3 0	11 10 19 22 3	2 1 3 4 0	0 4 3 1 2	2 23 19 15 6	0 4 3 2 1	1 2 3 4 0	14 10 1 22 18	2 1 0 4 3	3 4 0 1 2
9 21 13 5 17	1 4 2 0 3	3 0 2 4 1	23 4 7 16 15	4 0 1 3 2	2 3 1 0 4	21 17 13 9 5	4 3 2 1 0	0 1 2 3 4	8 4 25 16 12	1 0 4 3 2	2 3 4 0 1
20 12 1 8 24	3 2 0 1 4	4 1 0 2 3	20 12 1 8 24	3 2 0 1 4	4 1 0 2 3	20 11 7 3 24	3 2 1 0 4	4 0 1 2 3			
13/ /D5i					14/ /D5i						
2 14 25 18 6	0 2 4 3 1	1 3 4 2 0	23 16 7 4 15	4 3 1 0 2	2 0 1 3 4	2 15 19 23 6	0 2 3 4 1	1 4 3 2 0	8 16 25 4 12	1 3 4 0 2	2 0 4 3 1
9 5 13 21 17	1 0 2 4 3	3 4 2 0 1	11 22 19 10 3	2 4 3 1 0	0 1 3 4 2	21 9 13 17 5	4 1 2 3 0	0 3 2 1 4	14 22 1 10 18	2 4 0 1 3	3 1 0 4 2
20 8 1 12 24	3 1 0 2 4	4 2 0 1 3	20 8 1 12 24	3 1 0 2 4	4 2 0 1 3	20 3 7 11 24	3 0 1 2 4	4 2 1 0 3			
15/ /D5i					16/ /D5i						
2 11 19 23 10	0 2 3 4 1	1 0 3 2 4	8 20 21 4 12	1 3 4 0 2	2 4 0 3 1	2 14 21 18 10	0 2 4 3 1	1 3 0 2 4	23 20 7 4 11	4 3 1 0 2	2 4 1 3 0
25 9 13 17 1	4 1 2 3 0	4 3 2 1 0	14 22 5 6 18	2 4 0 1 3	3 1 4 0 2	9 1 13 25 17	1 0 2 4 3	3 0 2 4 1	15 22 19 6 3	2 4 3 1 0	4 1 3 0 2
16 3 7 15 24	3 0 1 2 4	0 2 1 4 3	16 3 7 15 24	3 0 1 2 4	0 2 1 4 3	16 8 5 12 24	3 1 0 2 4	0 2 4 1 3			
17/ /D5i					18/ /D5i						
4 18 21 12 10	0 3 4 2 1	3 2 0 1 4	15 6 17 24 3	2 1 3 4 0	4 0 1 3 2	4 23 17 11 10	0 4 3 2 1	3 2 1 0 4	12 6 5 24 18	2 1 0 4 3	1 0 4 3 2
7 25 13 1 19	1 4 2 0 3	1 4 2 0 3	23 2 9 20 11	4 0 1 3 2	2 1 3 4 0	25 19 13 7 1	4 3 2 1 0	4 3 2 1 0	8 2 21 20 14	1 0 4 3 2	2 1 0 4 3
16 14 5 8 22	3 2 0 1 4	0 3 4 2 1	16 14 5 8 22	3 2 0 1 4	0 3 4 2 1	16 15 9 3 22	3 2 1 0 4	0 4 3 2 1			

19/ /D5i	20/ /D5i
4 18 25 12 6 0 3 4 2 1 3 2 4 1 0	4 23 17 15 6 0 4 3 2 1 3 2 1 4 0
11 10 17 24 3 2 1 3 4 0 0 4 1 3 2	12 10 1 24 18 2 1 0 4 3 1 4 0 3 2
7 21 13 5 19 1 4 2 0 3 1 0 2 4 3	21 19 13 7 5 4 3 2 1 0 0 3 2 1 4
23 2 9 16 15 4 0 1 3 2 2 1 3 0 4	8 2 25 16 14 1 0 4 3 2 2 1 4 0 3
20 14 1 8 22 3 2 0 1 4 4 3 0 2 1	20 11 9 3 22 3 2 1 0 4 4 0 3 2 1
21/ /D5i	22/ /D5i
4 12 25 18 6 0 2 4 3 1 3 1 4 2 0	4 15 17 23 6 0 2 3 4 1 3 4 1 2 0
23 16 9 2 15 4 3 1 0 2 2 0 3 1 4	8 16 25 2 14 1 3 4 0 2 2 0 4 1 3
7 5 13 21 19 1 0 2 4 3 1 4 2 0 3	21 7 13 19 5 4 1 2 3 0 0 1 2 3 4
11 24 17 10 3 2 4 3 1 0 0 3 1 4 2	12 24 1 10 18 2 4 0 1 3 1 3 0 4 2
20 8 1 14 22 3 1 0 2 4 4 2 0 3 1	20 3 9 11 22 3 0 1 2 4 4 2 3 0 1
23/ /D5i	24/ /D5i
4 11 17 23 10 0 2 3 4 1 3 0 1 2 4	4 12 21 18 10 0 2 4 3 1 3 1 0 2 4
8 20 21 2 14 1 3 4 0 2 2 4 0 1 3	23 20 9 2 11 4 3 1 0 2 2 4 3 1 0
25 7 13 19 1 4 1 2 3 0 4 1 2 3 0	7 1 13 25 19 1 0 2 4 3 1 0 2 4 3
12 24 5 6 18 2 4 0 1 3 1 3 4 0 2	15 24 17 6 3 2 4 3 1 0 4 3 1 0 2
16 3 9 15 22 3 0 1 2 4 0 2 3 4 1	16 8 5 14 22 3 1 0 2 4 0 2 4 3 1
25/ /D5i	26/ /D5i
5 18 22 11 9 0 3 4 2 1 4 2 1 0 3	5 23 16 12 9 0 4 3 2 1 4 2 0 1 3
14 7 16 25 3 2 1 3 4 0 3 1 0 4 2	11 7 4 25 18 2 1 0 4 3 0 1 3 4 2
6 24 13 2 20 1 4 2 0 3 0 3 2 1 4	24 20 13 6 2 4 3 2 1 0 3 4 2 0 1
23 1 10 19 12 4 0 1 3 2 2 0 4 3 1	8 1 22 19 15 1 0 4 3 2 2 0 1 3 4
17 15 4 8 21 3 2 0 1 4 1 4 3 2 0	17 14 10 3 21 3 2 1 0 4 1 3 4 2 0
27/ /D5i	28/ /D5i
5 18 24 11 7 0 3 4 2 1 4 2 3 0 1	5 23 16 14 7 0 4 3 2 1 4 2 0 3 1
12 9 16 25 3 2 1 3 4 0 1 3 0 4 2	11 9 2 25 18 2 1 0 4 3 0 3 1 4 2
6 22 13 4 20 1 4 2 0 3 0 1 2 3 4	22 20 13 6 4 4 3 2 1 0 1 4 2 0 3
23 1 10 17 14 4 0 1 3 2 2 0 4 1 3	8 1 24 17 15 1 0 4 3 2 2 0 3 1 4
19 15 2 8 21 3 2 0 1 4 3 4 1 2 0	19 12 10 3 21 3 2 1 0 4 3 1 4 2 0
29/ /D5i	30/ /D5i
5 11 24 18 7 0 2 4 3 1 4 0 3 2 1	5 14 16 23 7 0 2 3 4 1 4 3 0 2 1
23 17 10 1 14 4 3 1 0 2 2 1 4 0 3	8 17 24 1 15 1 3 4 0 2 2 1 3 0 4
6 4 13 22 20 1 0 2 4 3 0 3 2 1 4	22 6 13 20 4 4 1 2 3 0 1 0 2 4 3
12 25 16 9 3 2 4 3 1 0 1 4 0 3 2	11 25 2 9 18 2 4 0 1 3 0 4 1 3 2
19 8 2 15 21 3 1 0 2 4 3 2 1 4 0	19 3 10 12 21 3 0 1 2 4 3 2 4 1 0
31/ /D5i	32/ /D5i
5 11 22 18 9 0 2 4 3 1 4 0 1 2 3	5 12 16 23 9 0 2 3 4 1 4 1 0 2 3
23 19 10 1 12 4 3 1 0 2 2 3 4 0 1	8 19 22 1 15 1 3 4 0 2 2 3 1 0 4
6 2 13 24 20 1 0 2 4 3 0 1 2 3 4	24 6 13 20 2 4 1 2 3 0 3 0 2 4 1
14 25 16 7 3 2 4 3 1 0 3 4 0 1 2	11 25 4 7 18 2 4 0 1 3 0 4 3 1 2
17 8 4 15 21 3 1 0 2 4 1 2 3 4 0	17 3 10 14 21 3 0 1 2 4 1 2 4 3 0

[Count = 32]

「完全オイラー方陣」の解の総数が意外に少ないと感じる人も居ると思うが、これが実態である。その理由は、何故であろうか。完全オイラー方陣がもともと汎魔方陣用の概念で、対称型には不向きなせいであると思われる。

かつて調べたところでは、汎五方陣の基本解 144 個はすべて「完全オイラー方陣」であった。今度あらためて調べたら、一般解 3600 個のすべてが「完全オイラー方陣」であることが確かめられた。

オイラーの示した理念は必ずしも万能ではなく、どうやら向き・不向きがあるようだ。

では、今回何故 32 個も見つかったのだろうか。それは、「鈴木方陣」が連立型で、既に汎魔方陣でもあるからだ。残りの 16 個は、どれも「鈴木方陣」の特殊な変形で、基準にすれ

すれで合格した完全オイラー型の対称五方陣だったからである（鈴木方陣は、汎対角線10本の全てがオイラー型だが、後者の16解は、主対角線2本のみがオイラー型だ）。

「完全オイラー方陣」は、高次の魔方陣ではだんだん稀少になる。六方陣には無く、七方陣では、そうでない汎魔方陣の方が数が圧倒的に多い。八方陣では、八進法分解も四進法分解も役に立たない。二進法分解でしか実現せず、正方連結形汎魔方陣ならばかろうじて全てが「完全オイラー方陣」になる。

その理由は、二進法が二方陣に結び付いていて、最初から多重二方陣型の汎八方陣でなければならないからみたいなのだ。九方陣の場合にも、多重三方陣型の汎九方陣を三進法分解すると「完全オイラー方陣」が見つかる。それが、どうも「超立体四次元三方陣」を次元分解したものに限り、実現可能のようなのだ。八方陣の場合にも、正方連結形は「超立体六次元二方陣」を次元分解したものであった。

高次では、「完全オイラー方陣」は、特別の極めて美しい珍品しか作らなくなるようだ。

(May 5, 2002(初稿); Dec. 5, 2002(二稿); Feb. 12, 2005(改訂稿); Feb. 22, 2006(清書稿);
MacOSX & Xcode 1.5 による計数・作表・執筆: 摂田 寛二(Kanji Setsuda))

E-Mail Address: jag12001@nifty.ne.jp