

第3部: 魔方陣の新研究: 摂田 寛二
 第4章: 六方陣の代数的研究(新)
 第5節: 六方陣「奇数偶数盤」の活用法

#0. 「奇数偶数盤」とは

この節では、六方陣の新しい研究法を紹介したい。「奇数偶数盤」の活用法である。

「奇数偶数盤」略して『奇偶盤』とは、下図のようなものを言う。左側が普通の六方陣、中央はその各数を奇数/偶数によって分類した表、右側はその分類表を奇数1, 偶数0と置き換えただけの数盤である。こんな簡単なものでも、使い方によっては、力を発揮する。

* 標準六方陣の「奇数偶数盤」とその数学的表現 *

	1/	/奇偶	/EOP
1 36 3 35 34 2	奇	偶 奇 奇 偶 偶	1 0 1 1 0 0
32 8 23 19 5 24	偶	偶 奇 奇 奇 偶	0 0 1 1 1 0
4 20 28 12 22 25	偶	偶 偶 偶 偶 奇	0 0 0 0 0 1
31 7 30 21 6 16	奇	奇 偶 奇 偶 偶	1 1 0 1 0 0
10 29 14 15 26 17	偶	奇 偶 奇 偶 奇	0 1 0 1 0 1
33 11 13 9 18 27	奇	奇 奇 奇 偶 奇	1 1 1 1 0 1
	2/	/奇偶	/EOP
1 36 3 35 34 2	奇	偶 奇 奇 偶 偶	1 0 1 1 0 0
32 8 21 19 5 26	偶	偶 奇 奇 奇 偶	0 0 1 1 1 0
4 20 28 12 23 24	偶	偶 偶 偶 偶 奇	0 0 0 0 1 0
31 7 30 22 6 15	奇	奇 偶 偶 偶 奇	1 1 0 0 0 1
10 29 16 14 25 17	偶	奇 偶 偶 奇 奇	0 1 0 0 1 1
33 11 13 9 18 27	奇	奇 奇 奇 奇 偶	1 1 1 1 0 1

この「奇偶盤」の持つ数学的特徴は、以下のようなものである。

- (1) この数表全体には、常に同数の18個ずつの 0 と 1 が含まれている。元の六方陣が {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 33, 34, 35, 36} という36個の連続する自然数によって構成されることから、奇数も偶数も18個ずつ含まなければならない。
- (2) 各行, 各列, 2本の対角線の構成を見てみよう。

1に注目してみると、1個、3個、5個含まれるものしか見当たらない。何故か?

元の方陣では、各行, 各列, 両対角線上の6数の和は、全て定和にならなければならない、その定和値は 111 であった。111 は、奇数である。6数の和が奇数になるためには、(偶数+偶数+偶数+偶数+偶数+奇数), (偶数+偶数+偶数+奇数+奇数+奇数), (偶数+奇数+奇数+奇数+奇数+奇数) の3通りの組合せしかない。

0+0+0+0+0+1=1(奇数); 0+0+0+1+1+1=3(奇数); 0+1+1+1+1+1=5(奇数);

1も3も5も、定数和の 111 を表すと言うのは、奇妙な感じがすると思うが、今我々は、奇数と偶数の2種類しか見ていない。つまり、0と1しか見ていない。1も3も5も、2で割れば余りはどれも1である。その余りの1だけを見ているのである。

次の実例の全部で、上の2つが成り立つことを確かめてほしい。

* 六次の標準型魔方陣: 『奇偶盤』つき解のリスト(一部分) *

	1/	/EOP	931/	/EOP
1 36 3 35 34 2	1	0 1 1 0 0	1 36 3 35 34 2	1 0 1 1 0 0
32 8 23 19 5 24	0	0 1 1 1 0	32 8 22 20 5 24	0 0 0 0 1 0
4 20 28 12 22 25	0	0 0 0 0 1	4 19 28 12 25 23	0 1 0 0 1 1
31 7 30 21 6 16	1	1 0 1 0 0	31 7 29 21 6 17	1 1 1 1 0 1
10 29 14 15 26 17	0	1 0 1 0 1	10 30 13 14 26 18	0 0 1 0 0 0
33 11 13 9 18 27	1	1 1 1 0 1	33 11 16 9 15 27	1 1 0 1 1 1

	1557/	/EOP		3912/	/EOP																		
1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0	1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0
32	7	21	20	5	26	0	1	1	0	1	0	32	7	24	18	5	25	0	1	0	0	1	1
4	18	29	13	24	23	0	0	1	1	0	1	4	20	29	13	23	22	0	0	1	1	1	0
31	6	30	22	8	14	1	0	0	0	0	0	31	6	28	21	8	17	1	0	0	1	0	1
10	28	17	12	25	19	0	0	1	0	1	1	10	30	16	9	27	19	0	0	0	1	1	1
33	16	11	9	15	27	1	0	1	1	1	1	33	12	11	15	14	26	1	0	1	1	0	0
	5414/	/EOP		10150/	/EOP																		
1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0	1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0
32	7	25	19	5	23	0	1	1	1	1	1	32	7	26	17	5	24	0	1	0	1	1	0
4	18	29	14	24	22	0	0	1	0	0	0	4	18	30	14	22	23	0	0	0	0	0	1
31	6	30	20	9	15	1	0	0	0	1	1	31	9	29	21	6	15	1	1	1	1	0	1
10	27	16	11	26	21	0	1	0	1	0	1	10	28	12	16	25	20	0	0	0	0	1	0
33	17	8	12	13	28	1	1	0	0	1	0	33	13	11	8	19	27	1	1	1	0	1	1
	14223/	/EOP		17822/	/EOP																		
1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0	1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0
32	6	23	21	5	24	0	0	1	1	1	0	32	6	24	18	5	26	0	0	0	0	1	0
4	17	30	14	20	26	0	1	0	0	0	0	4	20	29	14	21	23	0	0	1	0	1	1
31	8	28	22	9	13	1	0	0	0	1	1	31	7	27	22	8	16	1	1	1	0	0	0
10	29	16	12	25	19	0	1	0	0	1	1	10	30	11	13	28	19	0	0	1	1	0	1
33	15	11	7	18	27	1	1	1	1	0	1	33	12	17	9	15	25	1	0	1	1	1	1
	20189/	/EOP		28205/	/EOP																		
1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0	1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0
32	6	21	22	5	25	0	0	1	0	1	1	32	6	26	19	5	23	0	0	0	1	1	1
4	16	29	15	23	24	0	0	1	1	1	0	4	18	28	15	22	24	0	0	0	1	0	0
31	9	30	20	8	13	1	1	0	0	0	1	31	7	29	21	11	12	1	1	1	1	1	0
10	26	17	12	27	19	0	0	1	0	1	1	10	27	16	13	25	20	0	1	0	1	1	0
33	18	11	7	14	28	1	0	1	1	0	0	33	17	9	8	14	30	1	1	1	0	0	0
	36039/	/EOP		41759/	/EOP																		
1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0	1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0
32	6	26	17	5	25	0	0	0	1	1	1	32	6	27	18	5	23	0	0	1	0	1	1
4	20	30	15	23	19	0	0	0	1	1	1	4	19	29	15	20	24	0	1	1	1	0	0
31	8	27	22	7	16	1	0	1	0	1	0	31	9	26	22	7	16	1	1	0	0	1	0
10	29	14	13	24	21	0	1	0	1	0	1	10	30	14	8	28	21	0	0	0	0	0	1
33	12	11	9	18	28	1	0	1	1	0	0	33	11	12	13	17	25	1	1	0	1	1	1
	46553/	/EOP		58251/	/EOP																		
1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0	1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0
32	6	26	18	5	24	0	0	0	0	1	0	32	6	27	18	5	23	0	0	1	0	1	1
4	19	27	16	22	23	0	1	1	0	0	1	4	19	28	16	20	24	0	1	0	0	0	0
31	8	30	20	9	13	1	0	0	0	1	1	31	7	29	21	8	15	1	1	1	1	0	1
10	25	11	15	29	21	0	1	1	1	1	1	10	26	11	12	30	22	0	0	1	0	0	0
33	17	14	7	12	28	1	1	0	1	0	0	33	17	13	9	14	25	1	1	1	1	0	1
																						

1 . 「奇数偶数盤」は何通りあるのか

こうして実例を見て来ると，次のような疑問がわいて来ると思う。

一体標準型六方陣では，このような「奇偶盤」が一体幾つ可能なのか？ 相互に異なったものが幾つあるのか？ 盤の総数を，数えたくなくてくではないか。

さいわい形が「二進法分解図」の単位面に似ている。プログラムを組んで数えてみよう。各数が0あるいは1という2値しかとらないので，意外に数えやすいのではないか。

小生が仮定した基本図・定義式とプログラムの一部を次に示す。

* 六方陣の奇偶盤を作るための基本図と基本定義式 *

n1 n2 n3 n4 n5 n6	$n1+n2+n3+n4+n5+n6=K$ (b1)
n7 n8 n9 10 11 12	$n7+n8+n9+n10+n11+n12=K$ (b2)
n13 n14 n15 n16 n17 n18	$n13+n14+n15+n16+n17+n18=K$ (b3)
n19 n20 n21 n22 n23 n24	$n19+n20+n21+n22+n23+n24=K$ (b4)
n25 n26 n27 n28 n29 n30	$n25+n26+n27+n28+n29+n30=K$ (b5)
n31 n32 n33 n34 n35 n36	$n31+n32+n33+n34+n35+n36=K$ (b6)
n1+n7 n13 n19 n25 n31	$n1+n7+n13+n19+n25+n31=K$ (b7)
n2+n8 n14 n20 n26 n32	$n2+n8+n14+n20+n26+n32=K$ (b8)
n3+n9 n15 n21 n27 n33	$n3+n9+n15+n21+n27+n33=K$ (b9)
n4+n10 n16 n22 n28 n34	$n4+n10+n16+n22+n28+n34=K$ (b10)
n5+n11 n17 n23 n29 n35	$n5+n11+n17+n23+n29+n35=K$ (b11)
n6+n12 n18 n24 n30 n36	$n6+n12+n18+n24+n30+n36=K$ (b12)
n1+n8 n15 n22 n29 n36	$n1+n8+n15+n22+n29+n36=K$ (d1)
n6+n11 n16 n21 n26 n31	$n6+n11+n16+n21+n26+n31=K$ (d2)

- (1) 各数の取る値は，0 と 1 のみ。
 (2) 数盤の全体で，必ず 0 が 18 個，1 が 18 個なければならない。
 (3) 上の 14 式の和 K は，奇数という意味で，実際の和を 2 で割った余りが 1 になる。

```

/** Simulate MS66 by 'Even-Odd Patterns' */
/** 'SimlMS66EOP.c' built by Kanji Setsuda */
/** on Nov.22, '07 with MacOSX & Xcode 2 */
/**/
#include <stdio.h>
/* Global Variables */
long int cnt, cnt2;
long cntr[5];
short cnt3;
short nm[37],ucnt[2];
short anm[5][37];
/**/
/* Main Program for Research */
int main(){
    short n;
    printf("\n");
    printf("*** Simulate Magic Squares 6x6 by 'Even-Odd Patterns' **\n");
    printf(" ** by Kanji Setsuda on Nov.21, '07 with MacOSX **\n");
    cnt=0; cnt3=0;
    for(n=0;n<37;n++){nm[n]=-1;}; ucnt[0]=0; ucnt[1]=0;
    stp01(); /* Begin the Calculations */
    if(cnt3>0){pr2ans();}
    printf("\n [Count = %d]\n",cnt);
    printf(" OK!\n");
    return 0;
}
/* Begin the Calculations */
/* Search Level 1: */
/* Set n1 */
void stp01(){
    short a;
    for(a=0;a<2;a++){
        if(ucnt[a]<18){
            nm[1]=a; ucnt[a]++;
            stp02();
            ucnt[a]--;}
    }
}

```

```

/* Set n2 */
void stp02(){
  short a;
  for(a=0;a<2;a++){
    if(ucnt[a]<18){
      nm[2]=a; ucnt[a]++;
      stp03();
      ucnt[a]--;}
  }
}
/* Set n3 */
void stp03(){
  short a;
  for(a=0;a<2;a++){
    if(ucnt[a]<18){
      nm[3]=a; ucnt[a]++;
      stp04();
      ucnt[a]--;}
  }
}
/* Set n4 */
void stp04(){
  short a;
  for(a=0;a<2;a++){
    if(ucnt[a]<18){
      nm[4]=a; ucnt[a]++;
      stp05();
      ucnt[a]--;}
  }
}
/* Set n5 */
void stp05(){
  short a;
  for(a=0;a<2;a++){
    if(ucnt[a]<18){
      nm[5]=a; ucnt[a]++;
      stp06();
      ucnt[a]--;}
  }
}
/* Set n6 & Check(n1+n2+n3+n4+n5+n6==1) */
void stp06(){
  short a,b;
  for(a=0;a<2;a++){
    if(ucnt[a]<18){
      nm[6]=a; ucnt[a]++;
      b=nm[1]+nm[2]+nm[3]+nm[4]+nm[5]+nm[6];
      if((b%2)>0){cnt2=0; stp07();}
      ucnt[a]--;}
  }
}
/* Set n7 */
void stp07(){
  short a;
  for(a=0;a<2;a++){
    if(ucnt[a]<18){
      nm[7]=a; ucnt[a]++;
      stp08();
      ucnt[a]--;}
  }
}

```

```

    }
}
/* Set n13 */
void stp08(){
    short a;
    for(a=0;a<2;a++){
        if(ucnt[a]<18){
            nm[13]=a; ucnt[a]++;
            stp09();
            ucnt[a]--;}
    }
}
/* Set n19 */
void stp09(){
    short a;
    for(a=0;a<2;a++){
        if(ucnt[a]<18){
            nm[19]=a; ucnt[a]++;
            stp10();
            ucnt[a]--;}
    }
}
/* Set n25 */
void stp10(){
    short a;
    for(a=0;a<2;a++){
        if(ucnt[a]<18){
            nm[25]=a; ucnt[a]++;
            stp11();
            ucnt[a]--;}
    }
}
/* Set n31 & Check(n1+n7+n13+n19+n25+n31==1) */
void stp11(){
    short a,b;
    for(a=0;a<2;a++){
        if(ucnt[a]<18){
            nm[31]=a; ucnt[a]++;
            b=nm[1]+nm[7]+nm[13]+nm[19]+nm[25]+nm[31];
            if((b%2)>0){stp12();}
            ucnt[a]--;}
    }
}
/* Search Level 2: */
/* Set n11 */
: : : :
: : : :
/* Search Level 6: */
/* Set n23 */
void stp31(){
    short a;
    for(a=0;a<2;a++){
        if(ucnt[a]<18){
            nm[23]=a; ucnt[a]++;
            stp32();
            ucnt[a]--;}
    }
}
/* Set n24 & Check(n19+n20+n21+n22+n23+n24==1) */

```

```

void stp32(){
  short a,b;
  for(a=0;a<2;a++){
    if(ucnt[a]<18){
      nm[24]=a; ucnt[a]++;
      b=nm[19]+nm[20]+nm[21]+nm[22]+nm[23]+nm[24];
      if((b%2)>0){stp33();}
      ucnt[a]--;}
  }
}
/* Set n35 & Check(n5+n11+n17+n23+n29+n35==1) */
void stp33(){
  short a,b;
  for(a=0;a<2;a++){
    if(ucnt[a]<18){
      nm[35]=a; ucnt[a]++;
      b=nm[5]+nm[11]+nm[17]+nm[23]+nm[29]+nm[35];
      if((b%2)>0){stp34();}
      ucnt[a]--;}
  }
}
/* Set n34 & Check(n31+n32+n33+n34+n35+n36==1) */
void stp34(){
  short a,b;
  for(a=0;a<2;a++){
    if(ucnt[a]<18){
      nm[34]=a; ucnt[a]++;
      b=nm[31]+nm[32]+nm[33]+nm[34]+nm[35]+nm[36];
      if((b%2)>0){stp35();}
      ucnt[a]--;}
  }
}
/* Set n28 & Check(n4+n10+n16+n22+n28+n34==1) */
void stp35(){
  short a,b;
  for(a=0;a<2;a++){
    if(ucnt[a]<18){
      nm[28]=a; ucnt[a]++;
      b=nm[4]+nm[10]+nm[16]+nm[22]+nm[28]+nm[34];
      if((b%2)>0){stp36();}
      ucnt[a]--;}
  }
}
/* Set n30 & Check(n6+n12+n18+n24+n30+n36==1) */
void stp36(){
  short a,b,c;
  for(a=0;a<2;a++){
    if(ucnt[a]<18){
      nm[30]=a; ucnt[a]++;
      b=nm[6]+nm[12]+nm[18]+nm[24]+nm[30]+nm[36];
      c=nm[25]+nm[26]+nm[27]+nm[28]+nm[29]+nm[30];
      if(((b%2)>0)&&((c%2)>0)){ansprint();}
      ucnt[a]--;}
  }
}
/**/
/* Print the Answers */
void ansprint(){
  short n;

```

```

cnt2++;
if(cnt2==1){cntr[cnt3]=cnt+1; cntr[cnt3+1]=0;
  for(n=1;n<37;n++){anm[cnt3][n]=nm[n]; anm[cnt3+1][n]=0;}
  cnt3++;
  if(cnt3==4){pr4ans(); cnt3=0;}
}
cnt++;
}
/**/
/* Print 4 Answers */
void pr4ans(){
short l,l6,m,n,d;
printf("%18d/%19d/%19d/%19d/\n",
  cntr[0],cntr[1],cntr[2],cntr[3]);
for(l=0;l<6;l++){l6=l*6;
  for(m=0;m<4;m++){printf(" ");
    for(n=1;n<7;n++){d=anm[m][l6+n];
      if(d>=0){printf("%3d",d);}else{printf("  _");}
    }
    printf(" ");
  }
  printf("\n");
}
}
/**/
/* Print 2 Answers */
void pr2ans(){
short l,l6,m,n,d;
printf("%18d/%19d/\n",cntr[0],cntr[1]);
for(l=0;l<6;l++){l6=l*6;
  for(m=0;m<2;m++){printf(" ");
    for(n=1;n<7;n++){d=anm[m][l6+n];
      if(d>=0){printf("%3d",d);}else{printf("  _");}
    }
    printf(" ");
  }
  printf("\n");
}
}
/**/

```

総数は、すぐに数え切れた。数えやすいのは良かったが、総数が予想外に多かった。奇偶盤だけでもこんなにある。だから、実際の六方陣は無数にあるわけだ。

* 六方陣の『奇偶盤』は、全部で幾つあるか *

1/					58817/					117609/					176401/				
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	
0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	1	
0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	
1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	
252593/					311385/					387577/					463353/				
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	
0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	
0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	
0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	

539337/ 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1	598129/ 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1 1	673905/ 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1	750097/ 0 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1
826081/ 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 1	902273/ 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 1 1	978257/ 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1	1054241/ 0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
1113057/ 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1	1171873/ 1 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1	1247857/ 1 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 1	1323841/ 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 0 1 1
1400033/ 1 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 1 1 1	1476017/ 1 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1	1552209/ 1 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1	1627985/ 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1
1686777/ 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1	1762761/ 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1 0 0 1 1 0 1	1838537/ 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 0 0 1	1914729/ 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0 1 0 1 1
1973521/ 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 1	2049713/ 1 1 1 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1	2108505/ 1 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1	2167297/ 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1

[Count = 2226112] OK!

2 . 1つずつの「奇偶盤」に対応する実際の六方陣はそれぞれ幾つあるか
とりあえず，奇偶盤を1つに限定して，実際の六方陣を再現して数えてみよう。

* 1つの奇偶盤に対応する実際の標準六方陣は幾つあるか *

1/ 1 36 3 35 34 2	/EOP 1 0 1 1 0 0	811/ 1 36 3 35 34 2	/EOP 1 0 1 1 0 0
32 8 23 19 5 24	0 0 1 1 1 0	32 8 19 21 7 24	0 0 1 1 1 0
4 20 28 12 22 25	0 0 0 0 0 1	4 18 26 12 22 29	0 0 0 0 0 1
31 7 30 21 6 16	1 1 0 1 0 0	31 5 30 23 6 16	1 1 0 1 0 0
10 29 14 15 26 17	0 1 0 1 0 1	10 27 20 11 28 15	0 1 0 1 0 1
33 11 13 9 18 27	1 1 1 1 0 1	33 17 13 9 14 25	1 1 1 1 0 1

	1930/	/EOP		3322/	/EOP																			
1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0	1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0	
32	12	21	11	9	26	0	0	1	1	1	0	0	32	12	21	9	11	26	0	0	1	1	1	0
4	22	28	8	24	25	0	0	0	0	0	1	0	4	24	28	8	18	29	0	0	0	0	0	1
31	7	30	23	6	14	1	1	0	1	0	0	0	31	5	30	25	6	14	1	1	0	1	0	0
10	29	16	19	20	17	0	1	0	1	0	1	0	10	27	16	19	22	17	0	1	0	1	0	1
33	5	13	15	18	27	1	1	1	1	0	1	0	33	7	13	15	20	23	1	1	1	1	0	1
	4988/	/EOP		6844/	/EOP																			
1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0	0	1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0
32	12	19	11	13	24	0	0	1	1	1	0	0	32	12	13	17	15	22	0	0	1	1	1	0
4	26	28	8	22	23	0	0	0	0	0	1	0	4	24	30	6	18	29	0	0	0	0	0	1
31	5	30	21	6	18	1	1	0	1	0	0	0	31	7	28	23	8	14	1	1	0	1	0	0
10	25	14	27	20	15	0	1	0	1	0	1	0	10	27	26	9	20	19	0	1	0	1	0	1
33	7	17	9	16	29	1	1	1	1	0	1	0	33	5	11	21	16	25	1	1	1	1	0	1
	8410/	/EOP		9800/	/EOP																			
1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0	0	1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0
32	20	7	13	17	22	0	0	1	1	1	0	0	32	14	9	13	19	24	0	0	1	1	1	0
4	18	28	6	26	29	0	0	0	0	0	1	0	4	26	30	6	16	29	0	0	0	0	0	1
31	5	30	21	8	16	1	1	0	1	0	0	0	31	5	28	17	12	18	1	1	0	1	0	0
10	23	24	25	14	15	0	1	0	1	0	1	0	10	23	20	25	22	11	0	1	0	1	0	1
33	9	19	11	12	27	1	1	1	1	0	1	0	33	7	21	15	8	27	1	1	1	1	0	1
	10833/	/EOP		11806/	/EOP																			
1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0	0	1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0
32	12	9	15	21	22	0	0	1	1	1	0	0	32	20	13	5	23	18	0	0	1	1	1	0
4	26	30	6	16	29	0	0	0	0	0	1	0	4	24	26	8	22	27	0	0	0	0	0	1
31	5	24	23	8	20	1	1	0	1	0	0	0	31	7	30	21	6	16	1	1	0	1	0	0
10	25	28	19	18	11	0	1	0	1	0	1	0	10	15	28	25	14	19	0	1	0	1	0	1
33	7	17	13	14	27	1	1	1	1	0	1	0	33	9	11	17	12	29	1	1	1	1	0	1
	12463/	/EOP		12857/	/EOP																			
1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0	0	1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0
32	16	11	9	25	18	0	0	1	1	1	0	0	32	18	7	5	27	22	0	0	1	1	1	0
4	28	30	8	14	27	0	0	0	0	0	1	0	4	24	26	12	16	29	0	0	0	0	0	1
31	7	24	15	12	22	1	1	0	1	0	0	0	31	11	28	21	6	14	1	1	0	1	0	0
10	19	26	23	20	13	0	1	0	1	0	1	0	10	9	30	23	20	19	0	1	0	1	0	1
33	5	17	21	6	29	1	1	1	1	0	1	0	33	13	17	15	8	25	1	1	1	1	0	1
	13040/	/EOP		13110/	/EOP																			
1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0	0	1	36	3	35	34	2	1	0	1	1	0	0
32	16	11	5	29	18	0	0	1	1	1	0	0	32	10	25	17	5	22	0	0	1	1	1	0
4	28	30	12	14	23	0	0	0	0	0	1	0	6	20	24	12	26	23	0	0	0	0	0	1
31	7	26	19	6	22	1	1	0	1	0	0	0	31	7	30	21	4	18	1	1	0	1	0	0
10	9	24	27	20	21	0	1	0	1	0	1	0	8	29	16	11	28	19	0	1	0	1	0	1
33	15	17	13	8	25	1	1	1	1	0	1	0	33	9	13	15	14	27	1	1	1	1	0	1

.....

どのポジションが奇数か偶数かは、奇偶盤の通り。奇数のところには {1, 3, 5, 7, 9, 11, ..., 31, 33, 35}, 偶数のところには {2, 4, 6, 8, 10, 12, ..., 30, 32, 34, 36} を入れて調べればよい。随分と数えやすくなるはずだ。総数がわかるのではないか？

ところが、これが短時日には数え切れそうにないのである。単一の奇偶盤に基づいているのに。決して無限ではないが、殆ど数え切れなような感触なのだ。これには、参った。

標準型の六方陣は、これだから困る。もっと数の少ない珍しい六方陣をさがすべきなのだが、何しろ補数対称型も完全型も一切作れないことがわかっている。.....

3 . 「奇偶盤」の積極的な活用法

次にこの「奇偶盤」の積極的な活用法と意外なご利益とを示すことにしよう。

実は、この方法の開発にはある秘話があり、読者の一質問がきっかけになっている。アルメニア系の文化人 Dr. Arthur Babayan 氏から、次のような質問をいただいた。

次のような 8 つの数字の場所を固定して、標準型の六方陣は作れないか？ 例えば、下の左図のような 8 数の配置を持つ六方陣は、作れないか？ 是非にも作ってみてほしい。

早速にも取りかかったが、全然答えが出て来ない。プログラムをいろいろ工夫したが、全く反応が遅い。悪名高い六方陣のことだ。時間ばかり食って、探索が殆ど進まない。

悪い予感がする。実は「解無し」なのではあるまいか。探索に何ヵ月もかかった上に最後に「解無し」では、悲惨だ。かといって、不可能性の証明法も、全然思い浮かばない。

窮余の一策として、この方陣を、六方陣「奇偶盤」を作って、調べてみることにした。

右図の他の場所に 0 と 1 とを入れて、六方陣奇偶盤を作れるかどうかを調べるのである。

Type #6: {n9,n10,n14,n17,n20,n23,n27,n28}={1,5,7,8,11,21,24,34}

- - - - -		- - - - -
- - 1 11 - -	Anna Terean's Type #6	- - 1 1 - -
- 34 - - 8 -	of Magic Squares 6x6:	- 0 - - 0 -
- 5 - - 21 -		- 1 - - 1 -
- - 24 7 - -		- - 0 1 - -
- - - - -		- - - - -

答えは、すぐに出た。例の奇偶盤を作れないのである。途中を調べると、一部の行列あるいは対角線に和が偶数になるものがある。全体として奇数18個、偶数18個にならない。

これは何を意味するか？

一部の行列あるいは対角線の 6 数の和が 111 にならない。自然数 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 33, 34, 35, 36} を全部使い切れていない、ということだ。

Anna Terean's Type #6 of Magic Squares 6x6: [Count = 0]

* 作業途中を無理にのぞいてみると ... *

	1/	1663/	3429/	5091/
0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1
- 0 1 1 0 -	- 0 1 1 0 -	- 0 1 1 0 -	- 0 1 1 0 -	- 0 1 1 0 -
0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1	1 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0 0
0 1 0 0 1 1	0 1 1 0 1 0	0 1 0 0 1 1	0 1 1 0 1 0	0 1 1 0 1 0
- 1 0 1 0 -	- 1 0 1 0 -	- 1 0 1 0 -	- 1 0 1 0 -	- 1 0 1 0 -
1 1 0 1 - 1	0 1 1 1 - 1	1 1 0 1 - 1	0 1 1 1 - 1	0 1 1 1 - 1
	6857/	8525/	10285/	11779/
0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1
- 0 1 1 1 -	- 0 1 1 0 -	- 0 1 1 0 -	- 0 1 1 0 -	- 0 1 1 0 -
0 0 0 1 0 0	0 0 0 1 0 0	1 0 0 1 0 1	1 0 0 1 0 1	1 0 0 1 0 1
0 1 0 0 1 1	0 1 1 0 1 0	0 1 0 0 1 1	0 1 1 0 1 0	0 1 1 0 1 0
- 1 0 1 0 -	- 1 0 1 0 -	- 1 0 1 0 -	- 1 0 1 0 -	- 1 0 1 0 -
1 1 0 0 - 1	1 1 1 0 - 1	0 1 0 0 - 1	1 1 1 0 - 1	1 1 1 0 - 1
	12973/	14733/	16401/	17991/
0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1
- 0 1 1 0 -	- 0 1 1 1 -	- 0 1 1 0 -	- 0 1 1 0 -	- 0 1 1 0 -
0 0 1 0 0 0	0 0 1 0 0 0	1 0 1 0 0 1	1 0 1 0 0 1	1 0 1 0 0 1
0 1 0 0 1 1	0 1 1 0 1 0	0 1 0 0 1 1	0 1 1 0 1 0	0 1 1 0 1 0
- 1 0 1 0 -	- 1 0 1 0 -	- 1 0 1 0 -	- 1 0 1 0 -	- 1 0 1 0 -
1 1 1 1 - 0	1 1 0 1 - 0	1 1 1 1 - 0	0 1 0 1 - 0	0 1 0 1 - 0

19185/						20753/						21925/						23493/					
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
-	0	1	1	0	-	-	0	1	1	0	-	-	0	1	1	0	-	-	0	1	1	0	-
0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0
-	1	0	1	0	-	-	1	0	1	0	-	-	1	0	1	0	-	-	1	0	1	0	-
0	1	1	0	-	0	1	1	0	0	-	0	0	1	1	0	-	0	1	1	0	0	-	0

[Count = 24664] (このカウントに大した意味は無い！)

すなわち、これは、要求する六方陣を1つも作れないことを意味する。我々は、奇偶盤によって、目的方陣の構成不可能性を確かめることができたのではあるまいか？

全数を調べている時間は時間ばかりかかってラチがあかない場合に、より少数の奇偶盤を調べることによって、本当にそれだけで、全体の重要な特徴を把握できることになる。

これは、件の奇偶盤が元の方陣の良いアブストラクト(抽象物)になっていることを示すものと、思われる。

4 . 汎対角線型六方陣が構成不可能であることを確かめる

ここで、懸案の難問に挑戦することにする。我が「奇偶盤」を使って。

六次の場合、補数対称型や完全型魔方陣の構成は不可能だ。一般的な汎対角線型の魔方陣も、作り難いことがわかっている。だが、汎対角線陣が一個も無いとは、小生自身まだ証明していない。計数によってもまだ確かめていない。それがずっと気がかりだった。

今回初めて、この問題に真正面から挑戦する。「六次の汎対角線型魔方陣は、はたして構成不可能なのだろうか？」

そのために専用の「奇偶盤」を作る。基本図と定義式を、いつもの通りに示そう。

** Basic Form of Pan-Magic Squares of Order 6 **

34	35	36	31	32	33	34	35	36	31	32	33
4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3
10	11	12	7	8	9	10	11	12	7	8	9
16	17	18	13	14	15	16	17	18	13	14	15
22	23	24	19	20	21	22	23	24	19	20	21
28	29	30	25	26	27	28	29	30	25	26	27
34	35	36	31	32	33	34	35	36	31	32	33
4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3

** Basic Equations: **

n1+n2+n3+n4+n5+n6=K (b1)	n1+n7+n13+n19+n25+n31=K (b7)
n7+n8+n9+n10+n11+n12=K (b2)	n2+n8+n14+n20+n26+n32=K (b8)
n13+n14+n15+n16+n17+n18=K (b3)	n3+n9+n15+n21+n27+n33=K (b9)
n19+n20+n21+n22+n23+n24=K (b4)	n4+n10+n16+n22+n28+n34=K (b10)
n25+n26+n27+n28+n29+n30=K (b5)	n5+n11+n17+n23+n29+n35=K (b11)
n31+n32+n33+n34+n35+n36=K (b6)	n6+n12+n18+n24+n30+n36=K (b12)

** Pan-Diagonal Equations: **

n1+n8+n15+n22+n29+n36=K (p1)	n1+n12+n17+n22+n27+n32=K (p2)
n2+n9+n16+n23+n30+n31=K (p3)	n2+n7+n18+n23+n28+n33=K (p4)
n3+n10+n17+n24+n25+n32=K (p5)	n3+n8+n13+n24+n29+n34=K (p6)
n4+n11+n18+n19+n26+n33=K (p7)	n4+n9+n14+n19+n30+n35=K (p8)
n5+n12+n13+n20+n27+n34=K (p9)	n5+n10+n15+n20+n25+n36=K (p10)
n6+n7+n14+n21+n28+n35=K (p11)	n6+n11+n16+n21+n26+n31=K (p12)

- (1) 各数の取る値は, 0と1のみ。
- (2) 数盤の全体で, 必ず0が18個, 1が18個なければならない。
- (3) 上の定義式の和 K は, 奇数という意味。実際の和を2で割った余りが1になる。これらの諸条件を全て満たす奇偶盤を作りたい。はたして作れるだろうか?

プログラムのリストは省略する。概略が前と同じだ。早速にも実行結果を示そう。

実行中の計算スピードは, 速かった。すぐにも [Count = 0] を返してよこした。上の条件を全て満たす目的の奇偶盤は1つも作れなかったのである。

作業の途中を無理にものぞいて調べてみると, 全体で0と1とが18個ずつにならない。あるいは, 上の24式の各和が必ずしも奇数にならない。

自然数 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ..., 33, 34, 35, 36} を全部使い切れない。あるいは, 行列あるいは汎対角線の一部の6数の和が 111 にならない。と言うことだ。これで, 六次の汎対角線魔方陣が一切作れないことが確かめられてしまった。

* 六次の汎対角線型魔方陣のために「奇偶盤」を作る *

[Count = 0]

* 作業の途中を無理にものぞいてみると *

	1/	1425/	2783/	4141/
0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 1 0	0 0 0 1 0 0	0 0 0 1 1 1	0 0 0 1 1 1
0 1 1 0 0 1	0 1 0 1 0 1	0 1 1 0 0 1	0 1 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0
0 1 0 0 1 1	0 0 1 0 1 1	0 1 0 1 1 0	0 1 0 0 1 1	0 1 0 0 1 1
0 1 0 1 0 1	0 1 1 1 1 1	0 0 0 0 1 0	0 1 0 0 1 1	0 1 0 0 1 1
0 1 1 1 1 1	0 1 0 0 1 1	0 1 1 1 1 1	0 1 1 1 1 1	0 1 1 1 1 1
1 1 1 - - 0	1 0 1 - - 1	1 0 1 - - 1	1 1 0 - - 1	1 1 0 - - 1
	5805/	7229/	8899/	10569/
0 0 1 0 0 0	0 0 1 0 1 1	0 0 1 1 0 1	0 0 1 1 1 0	0 0 1 1 1 0
0 0 1 1 0 1	0 1 0 1 0 1	0 0 0 0 0 1	0 0 0 1 0 0	0 0 0 1 0 0
0 1 0 0 1 1	0 0 1 0 1 1	0 0 1 0 1 1	0 1 0 0 1 1	0 1 0 0 1 1
0 1 0 1 0 1	0 1 0 1 1 0	0 1 1 0 0 1	0 1 0 0 1 1	0 1 0 0 1 1
0 0 1 0 1 1	0 1 0 0 1 1	0 0 1 1 1 0	0 0 1 0 1 1	0 0 1 0 1 1
1 1 0 - - 1	1 0 1 - - 1	1 0 1 - - 1	1 1 1 - - 0	1 1 1 - - 0
	12233/	13587/	15543/	17259/
0 1 0 0 0 0	0 1 0 0 1 1	0 1 0 1 0 1	0 1 0 1 1 0	0 1 0 1 1 0
0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1	0 0 1 1 0 1	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1
0 1 0 0 1 1	0 0 1 0 1 1	0 0 0 0 1 0	0 1 0 0 1 1	0 1 0 0 1 1
0 1 1 1 1 1	0 0 0 1 1 1	0 1 0 0 1 1	0 1 1 0 0 1	0 1 1 0 0 1
0 1 1 1 0 0	0 1 1 1 0 0	0 1 1 0 0 1	0 1 0 1 0 1	0 1 0 1 0 1
1 1 1 - - 0	1 1 1 - - 1	1 0 1 - - 1	1 1 0 - - 1	1 1 0 - - 1
	18969/	20679/	22635/	24351/
0 1 1 0 0 1	0 1 1 0 1 0	0 1 1 1 0 0	0 1 1 1 1 1	0 1 1 1 1 1
0 0 0 0 0 1	0 0 1 1 0 1	0 1 1 0 0 1	0 0 0 0 0 1	0 0 0 0 0 1
0 1 0 0 1 1	0 1 0 0 1 1	0 0 1 0 1 1	0 1 0 0 1 1	0 1 0 0 1 1
0 1 0 1 1 0	0 0 0 1 1 1	0 1 0 0 1 1	0 1 0 0 0 0	0 1 0 0 0 0
0 1 1 1 0 0	0 0 1 0 1 1	0 0 1 1 0 1	0 1 0 1 0 1	0 1 0 1 0 1
1 1 1 - - 0	1 1 0 - - 1	1 0 1 - - 1	1 1 0 - - 1	1 1 0 - - 1
	25705/	27059/	28775/	30731/
1 0 0 0 0 0	1 0 0 0 1 1	1 0 0 1 0 1	1 0 0 1 1 0	1 0 0 1 1 0
0 1 0 0 0 0	0 1 1 0 0 1	0 0 1 1 0 1	0 1 1 0 0 1	0 1 1 0 0 1
0 1 1 1 1 1	0 0 0 0 1 0	0 1 0 0 1 1	0 0 0 0 1 0	0 0 0 0 1 0
0 1 1 0 0 1	0 1 0 0 1 1	0 0 0 1 1 1	0 1 0 1 1 0	0 1 0 1 1 0
0 1 0 1 1 0	0 0 1 1 0 1	0 0 1 0 1 1	0 1 1 1 1 1	0 1 1 1 1 1
0 1 1 - - 1	0 1 1 - - 1	0 0 1 - - 0	0 0 1 - - 0	0 0 1 - - 0

32441/ 1 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 - - 0	34151/ 1 0 1 0 1 0 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 - - 1	35867/ 1 0 1 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 - - 1	37823/ 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 - - 1
39177/ 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 - - 1	40841/ 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 - - 1	42511/ 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 - - 1	44181/ 1 1 0 1 1 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 1 1 1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 - - 0
45605/ 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 - - 1	47269/ 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 1 0 1 0 - - 1	48627/ 1 1 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 - - 1	49985/ 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 1 - - 1

[Count = 51408] (このカウントに大した意味は無い！)

そうは言っても、奇偶盤が1個も作れないことが、即ち目的方陣が1個も作れないことになるという論理的必然性に、納得し難いものを感じる読者も居られることだろう。

この疑問には、こう答えよう。

もしある汎対角線六方陣が正しい奇偶盤を持たないと仮定しよう。例えば、0と1とが18個ずつ無いと仮定しよう。仮に15個と21個と仮定すると、奇数が偶数より6個多いことになる。ところが、その目的方陣が連続する自然数 {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 33, 34, 35, 36} を各1個ずつもれなく使っている限りは、そういうことは起こらない。そういうことが起きるのは、どれかを重複して使っているか。他の36より大きな奇数を使っている場合である。そういう方陣は、基本の約束に反していて、元から正しくない。

あるいは、行列や汎対角線の一部に和が奇数にならないものがあると仮定しよう。だが、定和の111は奇数であるから、全ての和が111でなければならないという定義に反する。そういう方陣は、基本の約束に反していて、元から正しくない。

正しい奇偶盤を持たないものは、元から正しい汎対角線六方陣ではないのである。故に、正しい奇偶盤を作れないならば、正しい汎対角線六方陣も作ることができないのである。

この考え方は、背理法による証明に良く似ている。

本来ならば、「正しい奇偶盤を作れない」ということの方を背理法によって論理的に証明しなければならない。この証明の方が、実はずっと難しい。場合分けなどが煩雑になり過ぎる嫌いがある。小生などは、どうしてもすくんでしまって、挑戦し難いものを感じる。

そんな時に、たとえコンピュータの力を借りたとは言っても、実際に奇偶盤を作ってみて汎対角線六方陣が構成不可能であることが短時間で確かめられたことは、大きかった。

奇偶盤を積極的に活用すると、「出来ないものは出来ない」と言うことを簡単に確かめることができる。難問に苦しんでいる研究者には、もしかしたら朗報となるかもしれない。

(On November 24, 2007 by Kanji Setsuda with MacOSX & Xcode 2)

【追加報告】
5 . 背理法による問題の解決

実は, Dr. Arthur Babayan 氏からは, 六方陣に関して他にも面白い質問をいろいろいただいている。そして, その解答の過程で, ある証明法を思い付いた。「奇偶盤」には直接に関係が無いが, 同じ六方陣なので, ここで説明しておきたい。質問の趣旨は,

1/					2/					3/					4/				
1	-	-	-	5	11	-	-	-	21	-	11	-	-	-	-	1	-	-	-
-	-	-	21	-	-	-	-	5	-	-	-	-	-	21	-	-	-	-	5
-	11	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	1	5	-	-	-	-	11	21
-	-	-	24	-	-	-	-	7	-	-	-	8	7	-	-	-	-	34	24
-	-	34	-	-	-	-	8	-	-	34	-	-	-	-	8	-	-	-	
8	-	-	-	7	34	-	-	-	24	-	-	-	-	24	-	-	-	-	7

上のように各数の場所を指定した上で, 6 次の標準型の魔方陣を作れないかと言うのだ。外見が比較的簡単なので, 答をすぐにも見つけられそうな気がしたが, これが, 中々に見つからない。どうも, 1 つも作れないような感触なのだ。最後まで数えて「解無し」とわかる悲劇は避けたい。いったい何日間コンピュータを動かさなければならぬだろうか。

悪い予感がするので, 背理法で「不可能性」を証明することにした。その方が早そうだ。

4 数は, 行列 4 本に含まれるばかりでなく, 対角線の 2 本中にも含まれている。関係する 6 本の定和式を立てて, 特性を観察することにした。

AT1/					AT2/					AT3/					AT4/								
1	a	b	c	d	5	11	a	b	c	d	21	a	11	i	m	-	e	a	1	i	m	-	e
e	i	-	21	m	q	e	i	-	1	m	q	-	b	j	n	f	21	-	b	j	n	f	5
f	11	j	n	-	r	f	8	j	n	-	r	q	r	1	5	s	t	q	r	11	21	s	t
g	-	o	k	24	s	g	-	o	k	5	s	u	v	8	7	w	x	u	v	34	24	w	x
h	p	34	-	l	t	h	p	7	-	l	t	34	g	k	o	c	-	8	g	k	o	c	-
8	u	v	x	y	7	34	u	v	x	y	24	h	-	l	p	24	d	h	-	l	p	7	d

各式の辺々を加えると, 用いた変数 24 文字の取る数値の総和が得られる。

$$\begin{array}{ll}
 \text{AT1/ } 1+a+b+c+d+5=111 & \rightarrow a+b+c+d=111-1-5=105 \\
 1+e+f+g+h+8=111 & \rightarrow e+f+g+h=111-1-8=102 \\
 1+i+j+k+l+7=111 & \rightarrow i+j+k+l=111-1-7=103 \\
 5+m+n+o+p+8=111 & \rightarrow m+n+o+p=111-5-8=98 \\
 5+q+r+s+t+7=111 & \rightarrow q+r+s+t=111-5-7=99 \\
 8+u+v+w+x+7=111 & \rightarrow u+v+w+x=111-8-7=96 \quad (+
 \end{array}$$

$$a+b+c+d + e+f+g+h + i+j+k+l + m+n+o+p + q+r+s+t + u+v+w+x = 603 \quad \dots \text{Sm1}$$

この 24 文字の変数には, どんな数値が収まるのか。もちろん {1, 2, 3, 4, 5, ..., 33, 34, 35, 36} の 36 個の自然数以外には無い。我々は, 重複使用しない約束を守りつつ魔方陣を作っている。だから, 1, 5, 7, 8 はもう使わない。では, 和が 603 になるような 24 数とは, どのような数の組合せが可能か? 試しに, できるだけ大きい数字から並べて見ると,

$$\begin{array}{r}
 36+35+33+32 + 31+30+29+28 + 27+26+25+23 + 22+20+19+18 + 17+16+15+14 + 13+12+10+9 = \\
 136 \quad + \quad 118 \quad + \quad 101 \quad + \quad 79 \quad + \quad 62 \quad + \quad 44 \quad = 540
 \end{array}$$

何と, 603 に満たないのである! 540 より大きな和は作れない。作りようが無い。

$$(a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l+m+n+o+p+q+r+s+t+u+v+w+x) \leq 540 \quad \dots \text{Sm2}$$

このような矛盾する結果になったのは, 最初の設定が無理なせいである。ゆえに構成は不可能。

$$\begin{array}{ll}
 \text{AT2/ } 11+a+b+c+d+21=111 & \rightarrow a+b+c+d=111-11-21=79 \\
 11+e+f+g+h+34=111 & \rightarrow e+f+g+h=111-11-34=66 \\
 11+i+j+k+l+24=111 & \rightarrow i+j+k+l=111-11-24=76 \\
 21+m+n+o+p+34=111 & \rightarrow m+n+o+p=111-21-34=56 \\
 21+q+r+s+t+24=111 & \rightarrow q+r+s+t=111-21-24=66 \\
 34+u+v+w+x+24=111 & \rightarrow u+v+w+x=111-34-24=53 \quad (+
 \end{array}$$

$$a+b+c+d + e+f+g+h + i+j+k+l + m+n+o+p + q+r+s+t + u+v+w+x = 396 \quad \dots \text{Sm1}$$

今度の和は，相当小さい。どのような数の組合せが可能か？ {1, 5, 7, 8, 11, 21, 24, 34} は既に使われているから，それを外して，試みになるべく小さい数字から並べて見ると，

$$2+3+4+6 +9+10+12+13 +14+15+16+17 +18+19+20+22 +23+25+26+27 +28+29+30+31 =$$

$$15 + 44 + 62 + 79 + 101 + 118 = 419$$

何と，396を超えてしまう。419より小さい和は作れない。作りようが無い。

$$(a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l+m+n+o+p+q+r+s+t+u+v+w+x) \geq 419 \dots Sm2$$

このような矛盾に陥るのは，最初の設定が無理なせいである。ゆえに構成は不可能である。

	AT1/		AT2/		AT3/		AT4/
1	a b c d 5	11	a b c d 21	a 11	i m - e	a 1	i m - e
e	i - 21 m q	e	i - 1 m q	- b	j n f 21	- b	j n f 5
f	11 j n - r	f	8 j n - r	q r	1 5 s t	q r	11 21 s t
g	- o k 24 s	g	- o k 5 s	u v	8 7 w x	u v	34 24 w x
h	p 34 - l t	h	p 7 - l t	34	g k o c -	8	g k o c -
8	u v x y 7	34	u v x y 24	h - l	p 24 d	h - l	p 7 d

AT3/ a+b+1+7+c+d=111 -> a+b+c+d=111-1-7=103
 e+f+5+8+g+h=111 -> e+f+g+h=111-5-8=98
 i+j+1+8+k+l=111 -> i+j+k+l=111-1-8=102
 m+n+5+7+o+p=111 -> m+n+o+p=111-5-7=99
 q+r+1+5+s+t=111 -> q+r+s+t=111-1-5=105
 u+v+8+7+w+x=111 -> u+v+w+x=111-8-7=96 (+

$$a+b+c+d +e+f+g+h +i+j+k+l +m+n+o+p +q+r+s+t +u+v+w+x = 603 \dots Sm1$$

和が 603とは，どのような数の組合せか？ 試みに，なるべく大きい数字から並べて見ると，

$$36+35+33+32 +31+30+29+28 +27+26+25+23 +22+20+19+18 +17+16+15+14 +13+12+10+9 =$$

$$136 + 118 + 101 + 79 + 62 + 44 = 540$$

何と，603に満たないのである！ 540より大きな和は作れない。作りようが無い。

$$(a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l+m+n+o+p+q+r+s+t+u+v+w+x) \leq 540 \dots Sm2$$

このような矛盾に陥るのは，最初の設定が無理なせいである。ゆえに構成は不可能である。

AT4/ a+b+11+24+c+d=111 -> a+b+c+d=111-11-24=76
 e+f+21+34+g+h=111 -> e+f+g+h=111-21-34=56
 i+j+11+34+k+l=111 -> i+j+k+l=111-11-34=66
 m+n+21+24+o+p=111 -> m+n+o+p=111-21-24=66
 q+r+11+21+s+t=111 -> q+r+s+t=111-11-21=79
 u+v+34+24+w+x=111 -> u+v+w+x=111-34-24=53 (+

$$a+b+c+d +e+f+g+h +i+j+k+l +m+n+o+p +q+r+s+t +u+v+w+x = 396 \dots Sm1$$

和が 396とは，どのような数の組合せか？ {1, 5, 7, 8, 11, 21, 24, 34} は既に使われているから，それを外して，試みになるべく小さい数字から並べて見ると，

$$2+3+4+6 +9+10+12+13 +14+15+16+17 +18+19+20+22 +23+25+26+27 +28+29+30+31 =$$

$$15 + 44 + 62 + 79 + 101 + 118 = 419$$

何と，396を超えてしまう。419より小さい和は作れない。作りようが無い。

$$(a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k+l+m+n+o+p+q+r+s+t+u+v+w+x) \geq 419 \dots Sm2$$

このような矛盾に陥るのは，最初の設定が無理なせいである。ゆえに構成は不可能である。

この証明法を他にも利用できるように，少しでも一般化しておこう。

	AT1/AT2			
n1	a b c d n6	n1+a+b+c+d+n6=111	->	a+b+c+d=111-n1-n6
e	i - - m q	n1+e+f+g+h+n31=111	->	e+f+g+h=111-n1-n31
f	- j n - r	n1+i+j+k+l+n36=111	->	i+j+k+l=111-n1-n36
g	- o k - s	n6+m+n+o+p+n31=111	->	m+n+o+p=111-n6-n31
h	p - - l t	n6+q+r+s+t+n36=111	->	q+r+s+t=111-n6-n36
n31	u v x y n36	n31+u+v+w+x+n36=111	->	u+v+w+x=111-n31-n36 (+

$$a+b+c+d +e+f+g+h +i+j+k+l +m+n+o+p +q+r+s+t +u+v+w+x =$$

$$6*111 - 3*(n1+n6+n31+n36) = 666-3*(n1+n6+n31+n36) \dots Sm24$$

24数の和が，四隅の数の和の関数形で表せた。今までの問題では， $419 < Sm24 < 540$ で良かった。

$$419 < 666-3*(n1+n6+n31+n36) < 540 \quad \text{これを解くと, } 83 > (n1+n6+n31+n36) > 42 \dots Sm4$$

だが，この不等式の両端の最大値と最小値は不変ではない。使う数字にいかなる条件を付けるかによって，値がいくらでも変わって来る。具体的には，問題に即して決めなければならない。

全く無条件で考えれば， $300 < Sm24 < 588$ である。何故なら，最小値は $1+2+3+4+5+ \dots$

$+22+23+24=300$ ；最大値は $36+35+34+33+ \dots +16+15+14+13=588$ だから。この場合は，

$$300 < 666-3*(n1+n6+n31+n36) < 588 \quad \text{つまり, } 122 > (n1+n6+n31+n36) > 26 \dots Sm4-2$$

これは，範囲が最も広い場合であって，これ以上広く取ることはできない。だから，四数の和が，例えば21だったり，あるいは128だったりすると，標準型の六方陣は絶対に作れない。

実際の問題では，範囲がもう少し狭くなるのが普通だ。自分で調べて決める。

AT3/AT4

a - i m - e	a+b+n15+n22+c+d=111	->	a+b+c+d=111-n15-n22
- b j n f -	e+f+n16+n21+g+h=111	->	e+f+g+h=111-n16-n21
q r n15 16 s t	i+j+n15+n21+k+l=111	->	i+j+k+l=111-n15-n21
u v n21 22 w x	m+n+n16+n22+o+p=111	->	m+n+o+p=111-n16-n22
- g k o c -	q+r+n15+n16+s+t=111	->	q+r+s+t=111-n15-n16
h - l p - d	u+v+n21+n22+w+x=111	->	u+v+w+x=111-n21-n22 (+

$$a+b+c+d +e+f+g+h +i+j+k+l +m+n+o+p +q+r+s+t +u+v+w+x =$$

$$6*111-3*(n15+n16+n21+n22) = 666-3*(n15+n16+n21+n22) \dots Sm24'$$

24数の和が，中央4数の和の関数形で表せた。今までの問題では， $419 < Sm24 < 540$

つまり， $419 < 666-3*(n15+n16+n21+n22) < 540$

$$\text{これを解くと, } 83 > (n15+n16+n21+n22) > 42 \dots Sm4'-1$$

だが，この不等式の両端の最大値と最小値は不変ではない。使う数字にいかなる条件を付けるかによって，値がいくらでも変わって来る。具体的には，問題に即して決めなければならない。

全く無条件で考えれば， $300 < Sm24 < 588$ である。何故なら，最小値は $1+2+3+4+5+ \dots$

$+22+23+24=300$ ；最大値は $36+35+34+33+ \dots +16+15+14+13=588$ だから。その場合は，

$$300 < 666-3*(n15+n16+n21+n22) < 588$$

$$\text{これを解くと, } 122 > (n15+n16+n21+n22) > 26 \dots Sm4'-2$$

これは，範囲が最も広い場合であって，これ以上広く取ることはできない。だから，四数の和が，例えば24だったり，あるいは125だったりすると，標準型の六方陣は絶対に作れない。

実際の問題では，範囲がもう少し狭くなるのが普通だ。自分で調べて決める。

全ては，背理法による証明である。もしかしたら1つでも解があるのではないかという，はかない夢は破れたが，構成が理論的に不可能であることがわかったからには，今後はもう無駄な努力をしないで済む。他の研究に情熱を回せる。そのことを正直に喜びたい。

(Revised on December 10, 2007 by Kanji Setsuda with MacOSX & Xcode 2)

E-Mail Address <jag12001@nifty.com>