

第3部：『魔方陣の新研究』： 撰田 寛二

第9章： 方形連結型汎魔方陣の基礎的研究（最新）

第5節： 三連立型正方連結汎対称十二方陣の構成（最新）

0. 今節は、正方連結汎対称十二方陣を採り上げる。昨今の私は視力減退に悩み、高次方陣の構成には全然気が進まなかったのだが、南米アルゼンチンのミゲル(・A・アメラ氏)の熱心な説得にあつて、ついに取り組みざるを得なくなった。「三連立型は貴殿のテーマだったはず。使命としてやってください」と言われては、如何とも仕方がなかった。

1. 先ず例によって目的方陣の基本図と基本条件式を掲げる。正方連結四数の定和を条件づける定義式が何と 144 本もある。その代わりに他の基本条件式が少なく済む。この辺の事情は、六方陣、八方陣の時と全く変わらない。

** 三連立型正方連結汎対称十二方陣の基本図と基本条件式 **

131	132	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	121	122	123
143	144	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	133	134	135
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
23	24	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	13	14	15
35	36	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	25	26	27
47	48	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	37	38	39
59	60	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	49	50	51
71	72	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	61	62	63
83	84	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	73	74	75
95	96	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	85	86	87
107	108	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	97	98	99
119	120	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	109	110	111
131	132	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	121	122	123
143	144	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	133	134	135
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
23	24	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	13	14	15

** 正方連結四数の定和を表す条件式 144本: QC=290 **

n1+n2+n13+n14=QC	... cc1;	n49+n50+n61+n62=QC	... cc49;	n97+n98+n109+n110=QC	... cc97;
n2+n3+n14+n15=QC	... cc2;	n50+n51+n62+n63=QC	... cc50;	n98+n99+n110+n111=QC	... cc98;
n3+n4+n15+n16=QC	... cc3;	n51+n52+n63+n64=QC	... cc51;	n99+n100+n111+n112=QC	... cc99;
n4+n5+n16+n17=QC	... cc4;	n52+n53+n64+n65=QC	... cc52;	n100+n101+n112+n113=QC	... cc100;
n5+n6+n17+n18=QC	... cc5;	n53+n54+n65+n66=QC	... cc53;	n101+n102+n113+n114=QC	... cc101;
n6+n7+n18+n19=QC	... cc6;	n54+n55+n66+n67=QC	... cc54;	n102+n103+n114+n115=QC	... cc102;
n7+n8+n19+n20=QC	... cc7;	n55+n56+n67+n68=QC	... cc55;	n103+n104+n115+n116=QC	... cc103;
n8+n9+n20+n21=QC	... cc8;	n56+n57+n68+n69=QC	... cc56;	n104+n105+n116+n117=QC	... cc104;
n9+n10+n21+n22=QC	... cc9;	n57+n58+n69+n70=QC	... cc57;	n105+n106+n117+n118=QC	... cc105;
n10+n11+n22+n23=QC	... cc10;	n58+n59+n70+n71=QC	... cc58;	n106+n107+n118+n119=QC	... cc106;
n11+n12+n23+n24=QC	... cc11;	n59+n60+n71+n72=QC	... cc59;	n107+n108+n119+n120=QC	... cc107;
n12+n1+n24+n13=QC	... cc12;	n60+n49+n72+n61=QC	... cc60;	n108+n97+n120+n109=QC	... cc108;
n13+n14+n25+n26=QC	... cc13;	n61+n62+n73+n74=QC	... cc61;	n109+n110+n121+n122=QC	... cc109;
n14+n15+n26+n27=QC	... cc14;	n62+n63+n74+n75=QC	... cc62;	n110+n111+n122+n123=QC	... cc110;
n15+n16+n27+n28=QC	... cc15;	n63+n64+n75+n76=QC	... cc63;	n111+n112+n123+n124=QC	... cc111;
n16+n17+n28+n29=QC	... cc16;	n64+n65+n76+n77=QC	... cc64;	n112+n113+n124+n125=QC	... cc112;
n17+n18+n29+n30=QC	... cc17;	n65+n66+n77+n78=QC	... cc65;	n113+n114+n125+n126=QC	... cc113;
n18+n19+n30+n31=QC	... cc18;	n66+n67+n78+n79=QC	... cc66;	n114+n115+n126+n127=QC	... cc114;
n19+n20+n31+n32=QC	... cc19;	n67+n68+n79+n80=QC	... cc67;	n115+n116+n127+n128=QC	... cc115;

n20+n21+n32+n33=QC ... cc20;	n68+n69+n80+n81=QC ... cc68;	n116+n117+n128+n129=QC ... cc116;
n21+n22+n33+n34=QC ... cc21;	n69+n70+n81+n82=QC ... cc69;	n117+n118+n129+n130=QC ... cc117;
n22+n23+n34+n35=QC ... cc22;	n70+n71+n82+n83=QC ... cc70;	n118+n119+n130+n131=QC ... cc118;
n23+n24+n35+n36=QC ... cc23;	n71+n72+n83+n84=QC ... cc71;	n119+n120+n131+n132=QC ... cc119;
n24+n25+n36+n37=QC ... cc24;	n72+n73+n84+n85=QC ... cc72;	n120+n121+n132+n133=QC ... cc120;
n25+n26+n37+n38=QC ... cc25;	n73+n74+n85+n86=QC ... cc73;	n121+n122+n133+n134=QC ... cc121;
n26+n27+n38+n39=QC ... cc26;	n74+n75+n86+n87=QC ... cc74;	n122+n123+n134+n135=QC ... cc122;
n27+n28+n39+n40=QC ... cc27;	n75+n76+n87+n88=QC ... cc75;	n123+n124+n135+n136=QC ... cc123;
n28+n29+n40+n41=QC ... cc28;	n76+n77+n88+n89=QC ... cc76;	n124+n125+n136+n137=QC ... cc124;
n29+n30+n41+n42=QC ... cc29;	n77+n78+n89+n90=QC ... cc77;	n125+n126+n137+n138=QC ... cc125;
n30+n31+n42+n43=QC ... cc30;	n78+n79+n90+n91=QC ... cc78;	n126+n127+n138+n139=QC ... cc126;
n31+n32+n43+n44=QC ... cc31;	n79+n80+n91+n92=QC ... cc79;	n127+n128+n139+n140=QC ... cc127;
n32+n33+n44+n45=QC ... cc32;	n80+n81+n92+n93=QC ... cc80;	n128+n129+n140+n141=QC ... cc128;
n33+n34+n45+n46=QC ... cc33;	n81+n82+n93+n94=QC ... cc81;	n129+n130+n141+n142=QC ... cc129;
n34+n35+n46+n47=QC ... cc34;	n82+n83+n94+n95=QC ... cc82;	n130+n131+n142+n143=QC ... cc130;
n35+n36+n47+n48=QC ... cc35;	n83+n84+n95+n96=QC ... cc83;	n131+n132+n143+n144=QC ... cc131;
n36+n37+n48+n49=QC ... cc36;	n84+n85+n96+n97=QC ... cc84;	n132+n133+n144+n145=QC ... cc132;
n37+n38+n49+n50=QC ... cc37;	n85+n86+n97+n98=QC ... cc85;	n133+n134+n145+n146=QC ... cc133;
n38+n39+n50+n51=QC ... cc38;	n86+n87+n98+n99=QC ... cc86;	n134+n135+n146+n147=QC ... cc134;
n39+n40+n51+n52=QC ... cc39;	n87+n88+n99+n100=QC ... cc87;	n135+n136+n147+n148=QC ... cc135;
n40+n41+n52+n53=QC ... cc40;	n88+n89+n100+n101=QC ... cc88;	n136+n137+n148+n149=QC ... cc136;
n41+n42+n53+n54=QC ... cc41;	n89+n90+n101+n102=QC ... cc89;	n137+n138+n149+n150=QC ... cc137;
n42+n43+n54+n55=QC ... cc42;	n90+n91+n102+n103=QC ... cc90;	n138+n139+n150+n151=QC ... cc138;
n43+n44+n55+n56=QC ... cc43;	n91+n92+n103+n104=QC ... cc91;	n139+n140+n151+n152=QC ... cc139;
n44+n45+n56+n57=QC ... cc44;	n92+n93+n104+n105=QC ... cc92;	n140+n141+n152+n153=QC ... cc140;
n45+n46+n57+n58=QC ... cc45;	n93+n94+n105+n106=QC ... cc93;	n141+n142+n153+n154=QC ... cc141;
n46+n47+n58+n59=QC ... cc46;	n94+n95+n106+n107=QC ... cc94;	n142+n143+n154+n155=QC ... cc142;
n47+n48+n59+n60=QC ... cc47;	n95+n96+n107+n108=QC ... cc95;	n143+n144+n155+n156=QC ... cc143;
n48+n49+n60+n61=QC ... cc48;	n96+n97+n108+n109=QC ... cc96;	n144+n145+n156+n157=QC ... cc144;

**** 対称型補数の定和を表す基本条件式: CC=145 ****

n1+n144=n2+n143=n3+n142=n4+n141=n5+n140=n6+n139=n7+n138=n8+n137=n9+n136=n10+n135=n11+n134=n12+n133=n13+n132=n14+n131=n15+n130=n16+n129=n17+n128=n18+n127=n19+n126=n20+n125=n21+n124=n22+n123=n23+n122=n24+n121=n25+n120=n26+n119=n27+n118=n28+n117=n29+n116=n30+n115=n31+n114=n32+n113=n33+n112=n34+n111=n35+n110=n36+n109=n37+n108=n38+n107=n39+n106=n40+n105=n41+n104=n42+n103=n43+n102=n44+n101=n45+n100=n46+n99=n47+n98=n48+n97=n49+n96=n50+n95=n51+n94=n52+n93=n53+n92=n54+n91=n55+n90=n56+n89=n57+n88=n58+n87=n59+n86=n60+n85=n61+n84=n62+n83=n63+n82=n64+n81=n65+n80=n66+n79=n67+n78=n68+n77=n69+n76=n70+n75=n71+n74=n72+n73=CC ... SCC

**** 行列の定和を表す基本条件式 2本: C=870 ****

n1+n2+n3+n4+n5+n6+n7+n8+n9+n10+n11+n12=C ... rw1;
n1+n13+n25+n37+n49+n61+n73+n85+n97+n109+n121+n133=C ... cc11;

**** 汎対角線の定和を表す基本条件式 2本: C=870 ****

n1+n14+n27+n40+n53+n66+n79+n92+n105+n118+n131+n144=C ... pd1;
n12+n23+n34+n45+n56+n67+n78+n89+n100+n111+n122+n133=C ... pb12;

2. 十二方陣の構成には、特有の難しさがある。第一に、高次方陣ならではの解の多さと、それを求める手順の複雑さがある。何をやっても、時間がベラボローにかかる。解の総数のカウントなどは、多分夢のまた夢になるだろう。

八方陣の時には、「新オイラー法」と二進法が使えたが、今回はそれも望めない。144 は 2 の累乗では表せないで、使えないのだ。全てを古典的な方法で作るしかない。

それだからと言って、万事を馬鹿正直にやっていたのでは、最初の解にすらなかなか出合えない心配がある。何とか賢くやる手だてを予め講じなければならない。

予備的な研究として、先ず代数的な構造分析を行わなければならない、と覚悟した。

3. 次の基本図（拡張方陣図）を見てほしい。

最下端の行が最上端の上にコピーされている。最右端の列が最左端の左にコピーされている。これによって、最も離れている行列を隣り合わせにして扱うことができる。そして、正方連結四数の定和式を直に適用できる。また (n1, n144), (n12, n133) などの本来点対称に配置されている補数 145 のペアが、この図なら隣接して扱えることになる。

目的方陣を構成する時には、通常 n1 から決めるが、次の数として n144 を選ぶと良い。対称型補数の関係から n144=145-n1 と自動的に決まるから。その次の数は、n2 でも n12 でも良い。n12の方が後々の都合が良さそうだ。そして、n133(=145-n12)を同時に決める。

当然 $n1+n12+n133+n144=290$ になる。

**** 三連立型正方連結汎対称十二方陣の代数的研究：その1 ****

*** 基本図（拡張方陣空間） ***

143	144	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	133	134
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
23	24	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	13	14
35	36	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	25	26
47	48	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	37	38
59	60	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	49	50
71	72	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	61	62
83	84	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	73	74
95	96	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	85	86
107	108	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	97	98
119	120	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	109	110
131	132	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	121	122
143	144	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	133	134
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2

先ず、方陣の最外端に位置する 44 数を考察する。一番重要で一番決めがいのある数だからだ。

$$\begin{aligned}
 n133+n134+n1+n2=Q & \dots cc133; & n134+n135+n2+n3=Q & \dots cc134; & n135+n136+n3+n4=Q & \dots cc135; \\
 n136+n137+n4+n5=Q & \dots cc136; & n137+n138+n5+n6=Q & \dots cc137; & n138+n139+n6+n7=Q & \dots cc138; \\
 n139+n140+n7+n8=Q & \dots cc139; & n140+n141+n8+n9=Q & \dots cc140; & n141+n142+n9+n10=Q & \dots cc141; \\
 n142+n143+n10+n11=Q & \dots cc142; & n143+n144+n11+n12=Q & \dots cc143; & n144+n133+n12+n1=Q & \dots cc144;
 \end{aligned}$$

上の正方連結四数定和の定義式と次の対称型補数の定義式とを組み合わせる。

$$\begin{aligned}
 n1+n144=n2+n143=n3+n142=n4+n141=n5+n140=n6+n139= \\
 n7+n138=n8+n137=n9+n136=n10+n135=n11+n134=n12+n133=CC=145 \dots scc1 \\
 cc144 \text{ から } n144+n133+n12+n1=QC; \rightarrow (n1+n144)+(n12+n133)=QC; \rightarrow CC+CC=QC; \rightarrow QC=290; \\
 cc133+cc135+cc137: (n1+n2+n3+n4+n5+n6)+(n133+n134+n135+n136+n137+n138)=3QC=870; \\
 scc1 \text{ から } (n7+n8+n9+n10+n11+n12)+(n133+n134+n135+n136+n137+n138)=6CC=6*145=870 \\
 \text{ゆえに } n1+n2+n3+n4+n5+n6=n7+n8+n9+n10+n11+n12 \dots RHalf
 \end{aligned}$$

同様に次の定義式から

$$\begin{aligned}
 n12+n1+n24+n13=Q & \dots cc12; & n24+n13+n36+n25=Q & \dots cc24; & n36+n25+n48+n37=Q & \dots cc36; \\
 n48+n37+n60+n49=Q & \dots cc48; & n60+n49+n72+n61=Q & \dots cc60; & n72+n61+n84+n73=Q & \dots cc72; \\
 n84+n73+n96+n85=Q & \dots cc84; & n96+n85+n108+n97=Q & \dots cc96; & n108+n97+n120+n109 & \dots cc108; \\
 n120+n109+n132+n121=Q & \dots cc120; & n132+n121+n144+n133=Q & \dots cc132; & n144+n133+n12+n1=Q & \dots cc144; \\
 n1+n144=n12+n133=n13+n132=n24+n121=n25+n120=n36+n109= \\
 n37+n108=n48+n97=n49+n96=n60+n85=n61+n84=n72+n73=CC=145 \dots scc2 \\
 cc12+cc36+cc60: (n1+n13+n25+n37+n49+n61)+(n12+n24+n36+n48+n60+n72)=3QC=870; \\
 scc2 \text{ から } (n133+n121+n109+n97+n85+n73)+(n12+n24+n36+n48+n60+n72)=6CC=870; \\
 \text{ゆえに } n1+n13+n25+n37+n49+n61=n73+n85+n97+n109+n121+n133 \dots CHalf
 \end{aligned}$$

RHalf と CHalf によって、半行／半列の 6 数ずつの和が、お互いに等しくなることがわかる。

従って、次の 2 式を最初に仮定し、 $n1+n2+n3+n4+n5+n6+n7+n8+n9+n10+n11+n12=C=870$;

および $n1+n13+n25+n37+n49+n61+n73+n85+n97+n109+n121+n133=C=870$; としておくと、

当然 $n1+n2+n3+n4+n5+n6=n7+n8+n9+n10+n11+n12=435$; および $n1+n13+n25+n37+n49+n61=$

$n73+n85+n97+n109+n121+n133=435$; これは、本方陣が六方陣多重型になる根拠となる。

また対称型補数の定義式を次のように選んで辺々を加えると、

$$\begin{aligned}
 n1+n144=n14+n131=n27+n118=n40+n105=n53+n92=n66+n79=CC & \dots ssc3 \\
 \text{主対角線-1: } n1+n14+n27+n40+n53+n66+n79+n92+n105+n118+n131+n144=6CC=6x145=870 & \dots pd1 \\
 n12+n133=n23+n122=n34+n111=n45+n100=n56+n89=n67+n78=CC & \dots ssc4 \\
 \text{主対角線-2: } n12+n23+n34+n45+n56+n67+n78+n89+n100+n111+n122+n133=6CC=870 & \dots pb12
 \end{aligned}$$

汎対角線の定和は、正方連結四数定和の定義式と対称型補数の定義式とを組み合わせるだけで言える。

一部例を示そう。次のように計算する。

$n_{14}+n_{15}=n_{134}+n_{135}$ $n_{15}+n_{16}=n_{135}+n_{136}(-)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{14}+n_{16}=n_{16}+n_{134}$ $n_{16}+n_{17}=n_{136}+n_{137}(+)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{14}+n_{17}=n_{134}+n_{137}$ $n_{17}+n_{18}=n_{137}+n_{138}(-)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{14}+n_{18}=n_{18}+n_{134}$ $n_{18}+n_{19}=n_{138}+n_{139}(+)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{14}+n_{19}=n_{134}+n_{139}$ $n_{19}+n_{20}=n_{139}+n_{140}(-)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{14}+n_{20}=n_{20}+n_{134}$ $n_{20}+n_{21}=n_{140}+n_{141}(+)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{14}+n_{21}=n_{134}+n_{141}$ $n_{21}+n_{22}=n_{141}+n_{142}(-)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{14}+n_{22}=n_{22}+n_{134}$ $n_{22}+n_{23}=n_{142}+n_{143}(+)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{14}+n_{23}=n_{134}+n_{143}$ $n_{23}+n_{24}=n_{143}+n_{144}(-)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{14}+n_{24}=n_{24}+n_{134} \dots e1$	$n_{27}+n_{28}=n_{123}+n_{124}$ $n_{28}+n_{29}=n_{124}+n_{125}(-)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{27}+n_{25}=n_{29}+n_{123}$ $n_{29}+n_{30}=n_{125}+n_{126}(+)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{27}+n_{30}=n_{123}+n_{126}$ $n_{30}+n_{31}=n_{126}+n_{127}(-)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{27}+n_{127}=n_{31}+n_{123}$ $n_{31}+n_{32}=n_{127}+n_{128}(+)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{27}+n_{32}=n_{123}+n_{128}$ $n_{32}+n_{33}=n_{128}+n_{129}(-)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{27}+n_{33}=n_{123}+n_{129}$ $n_{33}+n_{34}=n_{129}+n_{130}(+)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{27}+n_{34}=n_{123}+n_{130}$ $n_{34}+n_{35}=n_{130}+n_{131}(-)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{27}+n_{131}=n_{35}+n_{123} \dots e2$	$n_{40}+n_{41}=n_{112}+n_{113}$ $n_{41}+n_{42}=n_{113}+n_{114}(-)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{40}+n_{114}=n_{42}+n_{112}$ $n_{42}+n_{43}=n_{114}+n_{115}(+)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{40}+n_{43}=n_{112}+n_{115}$ $n_{43}+n_{44}=n_{115}+n_{116}(-)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{40}+n_{116}=n_{44}+n_{112}$ $n_{44}+n_{45}=n_{116}+n_{117}(+)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{40}+n_{45}=n_{112}+n_{117}$ $n_{45}+n_{46}=n_{117}+n_{118}(-)$ <hr style="border-top: 1px dashed black;"/> $n_{40}+n_{118}=n_{46}+n_{112} \dots e3$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

同じように計算して $n_{53}+n_{105}=n_{57}+n_{101} \dots e4$; $n_{66}+n_{92}=n_{68}+n_{90} \dots e5$;
 $e1+e2+e3+e4+e5$

$$n_{14}+n_{27}+n_{40}+n_{53}+n_{66}+n_{92}+n_{105}+n_{118}+n_{131}+n_{144} = n_{134}+n_{123}+n_{112}+n_{101}+n_{90}+n_{68}+n_{57}+n_{46}+n_{35}+n_{24}$$

この式の両辺に n_1+n_{79} を加えると、

$$n_1+n_{14}+n_{27}+n_{40}+n_{53}+n_{66}+n_{79}+n_{92}+n_{105}+n_{118}+n_{131}+n_{144} \dots pd1$$

$$= n_1+n_{24}+n_{35}+n_{46}+n_{57}+n_{68}+n_{79}+n_{90}+n_{101}+n_{112}+n_{123}+n_{134} \dots pb1$$

これは、2本の汎対角線が定和に等しくなることを示している。 $pd1=pb1=870$

同様に $n_2+n_{132}=n_{12}+n_{122}$; $n_{15}+n_{119}=n_{23}+n_{111}$; $n_{28}+n_{106}=n_{34}+n_{100}$;

$$n_{41}+n_{93}=n_{45}+n_{89}$$
; $n_{54}+n_{80}=n_{56}+n_{78}$; を言えば、
 $n_2+n_{15}+n_{28}+n_{41}+n_{54}+n_{80}+n_{83}+n_{106}+n_{119}+n_{132}$
 $= n_{12}+n_{23}+n_{34}+n_{45}+n_{56}+n_{78}+n_{89}+n_{100}+n_{111}+n_{122}$

この式の両辺に $n_{67}+n_{133}$ を加えると、

$$n_2+n_{15}+n_{28}+n_{41}+n_{54}+n_{67}+n_{80}+n_{83}+n_{106}+n_{119}+n_{132}+n_{133} \dots pd2$$

$$= n_{12}+n_{23}+n_{34}+n_{45}+n_{56}+n_{67}+n_{78}+n_{89}+n_{100}+n_{111}+n_{122}+n_{133} \dots pb12$$

ゆえに $pd2=pb12=870$

同様の計算を繰り返せば、全ての汎対角線が定和に等しくなることを示すことができる。

つまり、汎対角線の定和は、正方連結四数定和の定義式と対称型補数の定義式とを組み合わせるだけで言えてしまう。最初の定義式の中に含める必要はもともと無いのである。

しかし、最初の定義式にあえて含めても、全然構わない。入れても結果は同じで、別の違った解集合が出来るわけではない。特に主対角線の $pd1$ と $pb12$ の定和くらいは入れておいて構わない。その方が「三連立型」としていかにももっともらしく見える。

4. この分析結果を盛り込んでプログラムにしたのが、次のリストである。全体は極めて長いので、一番大切ところだけを抜粋する。

なお、標準解出力用の不等式は、 $n_1 < n_{12}$, $n_1 < n_{133}$, $n_1 < n_{144}$ and $n_{12} > n_{133}$ とした。

```
/** Three-Type Simultaneous Magic Squares of Order 12: */
/** 'Composite', Self-complementary and Pan-diagonal */
/** 'MS12Simul3T.c' dictated by Kanji Setsuda */
```

```

/** on Jan. 9, 2010 with MacOSX & Xcode 3.1.2 */
/**/
#include <stdio.h>
/**/
/* Global Variables */
long int cnt, cnt2;
short LSM, HSM, QSM, CSM;
short nm[145], uflg[145];
/**/
/* Main Program */
int main(){
short n;
printf("\n** Three-Type Simultaneous Magic Squares of Order 12: **\n");
printf(" ** 'Composite', Self-complementary and Pan-diagonal **\n");
printf(" ** List 1 of Standard Solutions by Kanji Setsuda **\n");
LSM=870; HSM=LSM/2; QSM=290; CSM=145;
for(n=0;n<145;n++){nm[n]=0; uflg[n]=0;}
cnt=0;
stp01();/* Begin the Calculations */
printf("\n [Count of Solutions with n1=1: %d]\n",cnt);
return 0;
}
/**/
/* Begin the Calculations */
/* Level 1: */
/* Set N1 & n144=CSM-N1 & N1<n144 */
void stp01(){
short a,b;
for(a=1;a<73;a++){b=CSM-a;
if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
nm[1]=a; nm[144]=b;
uflg[a]=1; uflg[b]=1;
stp02();
uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
}
}
/* Set N12(>n133) & n133=CSM-N12 & n133>N1 */
void stp02(){
short a,b;
for(a=144;a>72;a--){b=CSM-a;
if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)&&(b>nm[1])){
nm[12]=a; nm[133]=b;
uflg[a]=1; uflg[b]=1;
if(nm[1]+nm[12]+nm[133]+nm[144]==QSM){
printf("%d/ (n1, n12)=(%d, %d):\n",cnt,nm[1],nm[12]);
stp03();}
uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
}
}
/* Set N2 & n143=CSM-N2 */
void stp03(){
short a,b;
for(a=144;a>0;a--){b=CSM-a;
if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
nm[2]=a; nm[143]=b;
uflg[a]=1; uflg[b]=1;
stp04();
uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
}
}
}

```

```

/* Set n11=QSM-n12-n143-n144 & n134=CSM-n11 */
void stp04(){
short a,b;
a=QSM-nm[12]-nm[143]-nm[144];
b=QSM-nm[133]-nm[2]-nm[1];
if((0<a)&&(a<145)&&(a+b==CSM)){
if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
nm[11]=a; nm[134]=b;
uflg[a]=1; uflg[b]=1;
stp05();
uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
/* Set N3 & n142=CSM-N3 */
void stp05(){
short a,b;
for(a=1;a<145;a++){b=CSM-a;
if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
nm[3]=a; nm[142]=b;
uflg[a]=1; uflg[b]=1;
stp06();
uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
}
/* Set n10=QSM-n11-n142-n143 & n135=CSM-n10 */
void stp06(){
short a,b;
a=QSM-nm[11]-nm[142]-nm[143];
b=QSM-nm[134]-nm[3]-nm[2];
if((0<a)&&(a<145)&&(a+b==CSM)){
if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
nm[10]=a; nm[135]=b;
uflg[a]=1; uflg[b]=1;
stp07();
uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
}
/* Set N4 & n141=CSM-N4 */
void stp07(){
short a,b;
for(a=144;a>0;a--){b=CSM-a;
if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
nm[4]=a; nm[141]=b;
uflg[a]=1; uflg[b]=1; cnt2=0;
stp08();
uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
}
/* Set n9=QSM-n10-n141-n142 & n136=CSM-n9 */
void stp08(){
short a,b;
a=QSM-nm[10]-nm[141]-nm[142];
b=QSM-nm[135]-nm[4]-nm[3];
if((0<a)&&(a<145)&&(a+b==CSM)){
if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
nm[9]=a; nm[136]=b;
uflg[a]=1; uflg[b]=1;
stp09();
uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
}
/* Set N5 & n140=CSM-N5 */
void stp09(){

```

```

short a,b;
for(a=1;a<145;a++){b=CSM-a;
  if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
    nm[5]=a; nm[140]=b;
    uflg[a]=1; uflg[b]=1;
    stp10();
    uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
}
}
/* Set n8=QSM-n9-n140-n141 & n137=CSM-n8 */
void stp10(){
short a,b;
a=QSM-nm[9]-nm[140]-nm[141];
b=QSM-nm[136]-nm[5]-nm[4];
if((0<a)&&(a<145)&&(a+b==CSM)){
  if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
    nm[8]=a; nm[137]=b;
    uflg[a]=1; uflg[b]=1;
    stp11();
    uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
/* Set n6=HSM-n1-n2-n3-n4-n5 & n139=CSM-n6 */
void stp11(){
short a,b;
a=HSM-nm[1]-nm[2]-nm[3]-nm[4]-nm[5];
b=HSM-nm[144]-nm[143]-nm[142]-nm[141]-nm[140];
if((0<a)&&(a<145)&&(a+b==CSM)){
  if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
    nm[6]=a; nm[139]=b;
    uflg[a]=1; uflg[b]=1;
    stp12();
    uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
/* Set n7=QSM-n8-n139-n140 & n138=CSM-n7 */
void stp12(){
short a,b,c;
a=QSM-nm[8]-nm[139]-nm[140];
b=QSM-nm[137]-nm[6]-nm[5];
c=LSM-nm[1]-nm[2]-nm[3]-nm[4]-nm[5]-nm[6]-nm[8]-nm[9]-nm[10]-nm[11]-nm[12];
if((0<a)&&(a<145)&&(a+b==CSM)){
  if((a==c)&&(uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
    nm[7]=a; nm[138]=b;
    uflg[a]=1; uflg[b]=1;
    if(nm[6]+nm[7]+nm[138]+nm[139]==QSM){stp13();}
    uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
/* Level 2: */
/* Set N13 & n132=CSM-N13 */
void stp13(){
short a,b;
for(a=144;a>0;a--){b=CSM-a;
  if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
    nm[13]=a; nm[132]=b;
    uflg[a]=1; uflg[b]=1;
    stp14();
    uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
}
}
/* Set n24=QSM-n12-n1-n13 & n121=CSM-n24 */
void stp14(){

```

```

short a,b;
a=QSM-nm[12]-nm[1]-nm[13];
b=QSM-nm[133]-nm[144]-nm[132];
if((0<a)&&(a<145)&&(a+b==CSM)){
    if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
        nm[24]=a; nm[121]=b;
        uflg[a]=1; uflg[b]=1;
        stp15();
        uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
/* Set N25 & n120=CSM-N25 */
void stp15(){
    short a,b;
    for(a=144;a>0;a--){b=CSM-a;
        if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
            nm[25]=a; nm[120]=b;
            uflg[a]=1; uflg[b]=1;
            stp16();
            uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
}
/* Set n36=QSM-n24-n13-n25 & n109=CSM-n36 */
void stp16(){
    short a,b;
    a=QSM-nm[24]-nm[13]-nm[25];
    b=QSM-nm[121]-nm[132]-nm[120];
    if((0<a)&&(a<145)&&(a+b==CSM)){
        if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
            nm[36]=a; nm[109]=b;
            uflg[a]=1; uflg[b]=1;
            stp17();
            uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
}
/* Set N37 & n108=CSM-N37 */
void stp17(){
    short a,b;
    for(a=1;a<145;a++){b=CSM-a;
        if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
            nm[37]=a; nm[108]=b;
            uflg[a]=1; uflg[b]=1;
            stp18();
            uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
}
/* Set n48=QSM-n36-n25-n37 & n97=CSM-n48 */
void stp18(){
    short a,b;
    a=QSM-nm[36]-nm[25]-nm[37];
    b=QSM-nm[109]-nm[120]-nm[108];
    if((0<a)&&(a<145)&&(a+b==CSM)){
        if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
            nm[48]=a; nm[97]=b;
            uflg[a]=1; uflg[b]=1;
            stp19();
            uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
}
/* Set N49 & n96=CSM-N49 */
void stp19(){
    short a,b;
    for(a=144;a>0;a--){b=CSM-a;

```



```

        if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
            nm[49]=a; nm[96]=b;
            uflg[a]=1; uflg[b]=1;
            stp20();
            uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
    }
}
/* Set n60=QSM-n48-n37-n49 & n85=CSM-n60 */
void stp20(){
    short a,b;
    a=QSM-nm[48]-nm[37]-nm[49];
    b=QSM-nm[97]-nm[108]-nm[96];
    if((0<a)&&(a<145)&&(a+b==CSM)){
        if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
            nm[60]=a; nm[85]=b;
            uflg[a]=1; uflg[b]=1;
            stp21();
            uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
/* Set n61=HSM-n1-n13-n25-n37-n49 & n84=CSM-n61 */
void stp21(){
    short a,b;
    a=HSM-nm[1]-nm[13]-nm[25]-nm[37]-nm[49];
    b=HSM-nm[144]-nm[132]-nm[120]-nm[108]-nm[96];
    if((0<a)&&(a<145)&&(a+b==CSM)){
        if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
            nm[61]=a; nm[84]=b;
            uflg[a]=1; uflg[b]=1;
            stp22();
            uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
/* Set n73=QSM-n84-n96-n85 & n72=CSM-n73 */
void stp22(){
    short a,b,c;
    a=QSM-nm[84]-nm[96]-nm[85];
    b=QSM-nm[61]-nm[49]-nm[60];
    c=LSM-nm[1]-nm[13]-nm[25]-nm[37]-nm[49]-nm[61]-nm[85]-nm[97]-nm[109]-nm[121]-nm[133];
    if((0<a)&&(a<145)&&(a+b==CSM)){
        if((a==c)&&(uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
            nm[73]=a; nm[72]=b;
            uflg[a]=1; uflg[b]=1;
            if(nm[72]+nm[61]+nm[84]+nm[73]==QSM){stp23();}
            uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
/* Level 3: */
/* Set n14=QSM-n1-n2-n13 & n131=CSM-n14 */
void stp23(){
    short a,b;
    a=QSM-nm[1]-nm[2]-nm[13];
    b=QSM-nm[144]-nm[143]-nm[132];
    if((0<a)&&(a<145)&&(a+b==CSM)){
        if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
            nm[14]=a; nm[131]=b;
            uflg[a]=1; uflg[b]=1;
            stp24();
            uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}

```

(以下省略)

テスト・ランさせてみたところ、次のような解を出力し始めた。

**** 三連立型正方連結汎対称十二方阵の解の実例：撰田寛二謹製 ****

- 0/ (n1, n12)=(1, 143):
- 0/ (n1, n12)=(1, 142):
- 0/ (n1, n12)=(1, 141):
- 0/ (n1, n12)=(1, 140):
- 0/ (n1, n12)=(1, 139):
- 0/ (n1, n12)=(1, 138):
- 0/ (n1, n12)=(1, 137):
- 0/ (n1, n12)=(1, 136):
- 0/ (n1, n12)=(1, 135):
- 0/ (n1, n12)=(1, 134):
- 0/ (n1, n12)=(1, 133):

(解番号/行和\汎対角線和)

												1/ Row\PD
1	143	3	141	7	140	8	139	9	135	11	133	=870\870
132	14	130	16	126	17	125	18	124	22	122	24	=870\870
97	47	99	45	103	44	104	43	105	39	107	37	=870\870
36	110	34	112	30	113	29	114	28	118	26	120	=870\870
85	59	87	57	91	56	92	55	93	51	95	49	=870\870
84	62	82	64	78	65	77	66	76	70	74	72	=870\870
73	71	75	69	79	68	80	67	81	63	83	61	=870\870
96	50	94	52	90	53	89	54	88	58	86	60	=870\870
25	119	27	117	31	116	32	115	33	111	35	109	=870\870
108	38	106	40	102	41	101	42	100	46	98	48	=870\870
121	23	123	21	127	20	128	19	129	15	131	13	=870\870
12	134	10	136	6	137	5	138	4	142	2	144	=870\870

| 870|870|870|870|870|870|870|870|870|870|870|870| Column (列和)
 /870/870/870/870/870/870/870/870/870/870/870/870| PDSums (汎対角線和)

												241/ Row\PD
1	143	3	140	7	141	9	139	8	135	11	133	=870\870
132	14	130	17	126	16	124	18	125	22	122	24	=870\870
97	47	99	44	103	45	105	43	104	39	107	37	=870\870
36	110	34	113	30	112	28	114	29	118	26	120	=870\870
85	59	87	56	91	57	93	55	92	51	95	49	=870\870
84	62	82	65	78	64	76	66	77	70	74	72	=870\870
73	71	75	68	79	69	81	67	80	63	83	61	=870\870
96	50	94	53	90	52	88	54	89	58	86	60	=870\870
25	119	27	116	31	117	33	115	32	111	35	109	=870\870
108	38	106	41	102	40	100	42	101	46	98	48	=870\870
121	23	123	20	127	21	129	19	128	15	131	13	=870\870
12	134	10	137	6	136	4	138	5	142	2	144	=870\870

| 870|870|870|870|870|870|870|870|870|870|870|870| Column
 /870/870/870/870/870/870/870/870/870/870/870/870| PDSums

												481/ Row\PD
1	143	3	139	8	141	9	140	7	135	11	133	=870\870
132	14	130	18	125	16	124	17	126	22	122	24	=870\870
97	47	99	43	104	45	105	44	103	39	107	37	=870\870
36	110	34	114	29	112	28	113	30	118	26	120	=870\870
85	59	87	55	92	57	93	56	91	51	95	49	=870\870
84	62	82	66	77	64	76	65	78	70	74	72	=870\870
73	71	75	67	80	69	81	68	79	63	83	61	=870\870

```

96 50 94 54 89 52 88 53 90 58 86 60|=870\870
25 119 27 115 32 117 33 116 31 111 35 109|=870\870
108 38 106 42 101 40 100 41 102 46 98 48|=870\870
121 23 123 19 128 21 129 20 127 15 131 13|=870\870
12 134 10 138 5 136 4 137 6 142 2 144|=870\870

```

```

-----
|870|870|870|870|870|870|870|870|870|870|870|870| Column
/870/870/870/870/870/870/870/870/870/870/870/870| PDSums

```

721/ Row\PD

```

1 143 7 141 3 140 8 135 9 139 11 133|=870\870
132 14 126 16 130 17 125 22 124 18 122 24|=870\870
97 47 103 45 99 44 104 39 105 43 107 37|=870\870
36 110 30 112 34 113 29 118 28 114 26 120|=870\870
85 59 91 57 87 56 92 51 93 55 95 49|=870\870
84 62 78 64 82 65 77 70 76 66 74 72|=870\870
73 71 79 69 75 68 80 63 81 67 83 61|=870\870
96 50 90 52 94 53 89 58 88 54 86 60|=870\870
25 119 31 117 27 116 32 111 33 115 35 109|=870\870
108 38 102 40 106 41 101 46 100 42 98 48|=870\870
121 23 127 21 123 20 128 15 129 19 131 13|=870\870
12 134 6 136 10 137 5 142 4 138 2 144|=870\870

```

```

-----
|870|870|870|870|870|870|870|870|870|870|870|870| Column
/870/870/870/870/870/870/870/870/870/870/870/870| PDSums

```

.

5. 上のリストの最初の部分 $0/ (n1, n12) = \dots$ は, $n12$ の値が 144~134 の間は, 解が無かったことを示している。何故に解が無かったのであろうか。解無し の理由が簡単に見つかるだろうか。ここで再び代数的構造研究を試みる。

**** 三連立型正方連結汎対称十二方陣における「補数ペア」の役割 ****

* 基本図 (拡張方陣空間) *

143	144	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	133	134
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
23	24	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	13	14
35	36	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	25	26
47	48	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	37	38
59	60	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	49	50
71	72	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	61	62
83	84	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	73	74
95	96	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	85	86
107	108	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	97	98
119	120	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	109	110
131	132	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	121	122
143	144	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	133	134
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2

もう一度最初の基本図に戻り, 方陣の最外端に位置する 44 数を考察する。

対称型の補数ペアの条件が効いて、一度に2行2列が決まってしまうところだ。

(1) n_1 の値を決めれば、補数の関係から n_{144} が決まる。例えば、 $n_1=1$ ならば、 $n_{144}=145-n_1=144$ となる。

(2) 次に n_{12} を決める。当然 $n_{133}=145-n_{12}$ が決まる。例えば、 $n_{12}=12$ とすれば、 $n_{133}=145-12=133$ だ。

(3) それによって次に何が決まるかと言うと、正方連結条件が効いて、 n_1+n_{12} の和に等しい補数対のペアが次々と出来る。 $n_1+n_{12}=n_{25}+n_{36}=n_{49}+n_{60}=n_{73}+n_{84}=n_{97}+n_{108}=n_{121}+n_{132}(=13)$; 6組ある。

同様に、 $n_1+n_{133}=n_3+n_{135}=n_5+n_{137}=n_7+n_{139}=n_9+n_{141}=n_{11}+n_{143}(=134)$; の6組も出来る。

(4) $n_{12}+n_{144}=n_2+n_{134}=n_4+n_{136}=n_6+n_{138}=n_8+n_{140}=n_{10}+n_{142}(=156)$; の6組も別の補数対を共有する。

同様に、 $n_{133}+n_{144}=n_{13}+n_{24}=n_{37}+n_{48}=n_{61}+n_{72}=n_{85}+n_{96}=n_{109}+n_{120}(=277)$; の6組も、前のものとは異なる別の補数対を共有する。

(5) この例の場合「13の補数」6組、「134の補数」6組、「156の補数」6組、「277の補数」6組の合計24組48数を用意しなければならないわけだが、 $n_1=1$, $n_{12}=12$, $n_{133}=133$, $n_{144}=144$ の4数を2回ずつ数えているので、実際には44個のお互いに異なった数が必要になる。

```
n1+n133=n3+n135=n5+n137=n7+n139=n9+n141=n11+n143(=134)    ...sumA
n2+n134=n4+n136=n6+n138=n8+n140=n10+n142=n12+n144(=156)    ...sumB
n1+n12=n25+n36=n49+n60=n73+n84=n97+n108=n121+n132(=13)     ...sumC
n13+n24=n37+n48=n61+n72=n85+n96=n109+n120=n133+n144(=277)  ...sumD
```

(6) この補数群を実際にどう決定すべきか。

まず考えるべきは、 $n_1=1$ を固定しても、 n_{12} の値を他のものに仮定した場合には、 $sumA$, $sumB$, $sumC$, $sumD$ の値もそれに応じて変わることだ。

例えば、前とは別に $n_1=1$, $n_{12}=133$ と仮定すると、 $n_{144}=144$, $n_{133}=12$ となるから、

```
n1+n133=n3+n135=n5+n137=n7+n139=n9+n141=n11+n143(=13)    ...sumA
n2+n134=n4+n136=n6+n138=n8+n140=n10+n142=n12+n144(=277)  ...sumB
n1+n12=n25+n36=n49+n60=n73+n84=n97+n108=n121+n132(=134)  ...sumC
n13+n24=n37+n48=n61+n72=n85+n96=n109+n120=n133+n144(=156) ...sumD
```

しかし、この場合には、置かれる場所が変わるだけで、補数ペアの内容は前と変わらないことがわかる。

では、例えば、新たに $n_1=1$, $n_{12}=117$ と仮定すると、どうなるか。 $n_{144}=144$, $n_{133}=28$ となるから、

```
n1+n133=n3+n135=n5+n137=n7+n139=n9+n141=n11+n143(=29)    ...sumA
n2+n134=n4+n136=n6+n138=n8+n140=n10+n142=n12+n144(=261)  ...sumB
n1+n12=n25+n36=n49+n60=n73+n84=n97+n108=n121+n132(=118)  ...sumC
n13+n24=n37+n48=n61+n72=n85+n96=n109+n120=n133+n144(=172) ...sumD
```

当然これらの24組には、お互いに異なった数が入らなければならない。

同じ和を持つ相異なった6組ずつの補数ペアを4セット必ず用意する。これが、結構大変な作業だ。

例えば、 $n_1=1$, $n_{12}=140$ と仮定すると、 $n_{144}=144$, $n_{133}=5$ となるから、

```
n1+n133=n3+n135=n5+n137=n7+n139=n9+n141=n11+n143(=6)    ...sumA
n2+n134=n4+n136=n6+n138=n8+n140=n10+n142=n12+n144(=284)  ...sumB
n1+n12=n25+n36=n49+n60=n73+n84=n97+n108=n121+n132(=141)  ...sumC
n13+n24=n37+n48=n61+n72=n85+n96=n109+n120=n133+n144(=149) ...sumD
```

しかし、和が6になる補数ペアは、(1, 5), (2, 3), (3, 2), (5, 1)の4組しか用意できない。左右を入れ替えただけのペアを省くと、2組しか無い。要請の6組に足りない。また和が284になる補数ペアは、(144, 140), (143, 141)の2組しか無い。(142, 142)は、同じ数を重複利用しているので、論外だ。

これは不合理である。よって、 $n_1=1$, $n_{12}=140$ という仮定のもとでは、目的方陣を構成することができない。

(7) 何度も念を押すが、絶対に忘れてはいけないのが、対称配置される次の2数の補数対が必ず145になること。

```
n1+n144=n2+n143=n3+n142=n4+n141=n5+n140=n6+n139=n7+n138=n8+n137
=n9+n136=n10+n135=n11+n134=n12+n133=n13+n132=n24+n121=n25+n120
=n36+n109=n37+n108=n48+n97=n49+n96=n60+n85=n61+n84=n72+n73=145 ...Csum
```

これは、定義のうちに入っているのだから、必ず守らなければならない。

(8) 次のリストは、 (n_1, n_{12}) の値に応じて、各補数ペアをどれだけ用意できるかを実際に数え上げたものだ。6組ずつ4セット用意できた場合をとりあえず合格とする。用意できなかった場合は、不合格とする。その時の (n_1, n_{12}) の値は、構成の最初からものはや考慮するに値しないケースとなる。

** 正方連結汎対称十二方陣の構成のために用意可能な補数ペアのセット **

$n_{12}=143$: 1, 1, 71, 71

[$n_1+n_{133}=3$]: (1, 2)

[$n_{12}+n_{144}=287$]: (143, 144)

[$n_1+n_{12}=144$]: (1, 143), (2, 142), (3, 141), (4, 140), (5, 139), (6, 138), (7, 137), ...

[$n_{133}+n_{144}=146$]: (2, 144), (3, 143), (4, 142), (5, 141), (6, 140), (7, 139), (8, 138), ...

$n_{12}=142$: 1, 1, 71, 71

[$n_1+n_{133}=4$]: (1, 3)

[$n_{12}+n_{144}=286$]: (142, 144)

[$n_1+n_{12}=143$]: (1, 142), (2, 141), (3, 140), (4, 139), (5, 138), (6, 137), (7, 136), ...

[$n_{133}+n_{144}=147$]: (3, 144), (4, 143), (5, 142), (6, 141), (7, 140), (8, 139), (9, 138), ...

$n_{12}=141$: 2, 2, 70, 70

$[n1+n133= 5]$: (1,4), (2,3)
 $[n12+n144=285]$: (141,144), (142,143)
 $[n1+n12=142]$: (1,141), (2,140), (3,139), (4,138), (5,137), (6,136), (7,135), ...
 $[n133+n144=148]$: (4,144), (5,143), (6,142), (7,141), (8,140), (9,139), (10,138), ...
n12=140: 2, 2, 70, 70
 $[n1+n133= 6]$: (1,5), (2,4)
 $[n12+n144=284]$: (140,144), (141,143)
 $[n1+n12=141]$: (1,140), (2,139), (3,138), (4,137), (5,136), (6,135), (7,134), ...
 $[n133+n144=149]$: (5,144), (6,143), (7,142), (8,141), (9,140), (10,139), (11,138), ...
n12=139: 3, 3, 69, 69
 $[n1+n133= 7]$: (1,6), (2,5), (3,4)
 $[n12+n144=283]$: (139,144), (140,143), (141,142)
 $[n1+n12=140]$: (1,139), (2,138), (3,137), (4,136), (5,135), (6,134), (7,133), ...
 $[n133+n144=150]$: (6,144), (7,143), (8,142), (9,141), (10,140), (11,139), (12,138), ...
n12=138: 3, 3, 69, 69
 $[n1+n133= 8]$: (1,7), (2,6), (3,5)
 $[n12+n144=282]$: (138,144), (139,143), (140,142)
 $[n1+n12=139]$: (1,138), (2,137), (3,136), (4,135), (5,134), (6,133), (7,132), ...
 $[n133+n144=151]$: (7,144), (8,143), (9,142), (10,141), (11,140), (12,139), (13,138), ...
n12=137: 4, 4, 68, 68
 $[n1+n133= 9]$: (1,8), (2,7), (3,6), (4,5)
 $[n12+n144=281]$: (137,144), (138,143), (139,142), (140,141)
 $[n1+n12=138]$: (1,137), (2,136), (3,135), (4,134), (5,133), (6,132), (7,131), ...
 $[n133+n144=152]$: (8,144), (9,143), (10,142), (11,141), (12,140), (13,139), (14,138), ...
n12=136: 4, 4, 68, 68
 $[n1+n133= 10]$: (1,9), (2,8), (3,7), (4,6)
 $[n12+n144=280]$: (136,144), (137,143), (138,142), (139,141)
 $[n1+n12=137]$: (1,136), (2,135), (3,134), (4,133), (5,132), (6,131), (7,130), ...
 $[n133+n144=153]$: (9,144), (10,143), (11,142), (12,141), (13,140), (14,139), (15,138), ...
n12=135: 5, 5, 67, 67
 $[n1+n133= 11]$: (1,10), (2,9), (3,8), (4,7), (5,6)
 $[n12+n144=279]$: (135,144), (136,143), (137,142), (138,141), (139,140)
 $[n1+n12=136]$: (1,135), (2,134), (3,133), (4,132), (5,131), (6,130), (7,129), ...
 $[n133+n144=154]$: (10,144), (11,143), (12,142), (13,141), (14,140), (15,139), (16,138), ...
n12=134: 5, 5, 67, 67
 $[n1+n133= 12]$: (1,11), (2,10), (3,9), (4,8), (5,7)
 $[n12+n144=278]$: (134,144), (135,143), (136,142), (137,141), (138,140)
 $[n1+n12=135]$: (1,134), (2,133), (3,132), (4,131), (5,130), (6,129), (7,128), ...
 $[n133+n144=155]$: (11,144), (12,143), (13,142), (14,141), (15,140), (16,139), (17,138), ...
n12=133: 6, 6, 66, 66
 $[n1+n133= 13]$: (1,12), (2,11), (3,10), (4,9), (5,8), (6,7)
 $[n12+n144=277]$: (133,144), (134,143), (135,142), (136,141), (137,140), (138,139)
 $[n1+n12=134]$: (1,133), (2,132), (3,131), (4,130), (5,129), (6,128), (7,127), ...
 $[n133+n144=156]$: (12,144), (13,143), (14,142), (15,141), (16,140), (17,139), (18,138), ...
n12=132: 6, 6, 66, 66
 $[n1+n133= 14]$: (1,13), (2,12), (3,11), (4,10), (5,9), (6,8)
 $[n12+n144=276]$: (132,144), (133,143), (134,142), (135,141), (136,140), (137,139)
 $[n1+n12=133]$: (1,132), (2,131), (3,130), (4,129), (5,128), (6,127), (7,126), ...
 $[n133+n144=157]$: (13,144), (14,143), (15,142), (16,141), (17,140), (18,139), (19,138), ...
n12=131: 7, 7, 65, 65
 $[n1+n133= 15]$: (1,14), (2,13), (3,12), (4,11), (5,10), (6,9), (7,8)
 $[n12+n144=275]$: (131,144), (132,143), (133,142), (134,141), (135,140), (136,139), (137,138)
 $[n1+n12=132]$: (1,131), (2,130), (3,129), (4,128), (5,127), (6,126), (7,125), ...
 $[n133+n144=158]$: (14,144), (15,143), (16,142), (17,141), (18,140), (19,139), (20,138), ...
n12=130: 7, 7, 65, 65
 $[n1+n133= 16]$: (1,15), (2,14), (3,13), (4,12), (5,11), (6,10), (7,9)
 $[n12+n144=274]$: (130,144), (131,143), (132,142), (133,141), (134,140), (135,139), (136,138)
 $[n1+n12=131]$: (1,130), (2,129), (3,128), (4,127), (5,126), (6,125), (7,124), ...
 $[n133+n144=159]$: (15,144), (16,143), (17,142), (18,141), (19,140), (20,139), (21,138), ...
n12=129: 8, 8, 64, 64
 $[n1+n133= 17]$: (1,16), (2,15), (3,14), (4,13), (5,12), (6,11), (7,10), ...
 $[n12+n144=273]$: (129,144), (130,143), (131,142), (132,141), (133,140), (134,139), (135,138), ...
 $[n1+n12=130]$: (1,129), (2,128), (3,127), (4,126), (5,125), (6,124), (7,123), ...
 $[n133+n144=160]$: (16,144), (17,143), (18,142), (19,141), (20,140), (21,139), (22,138), ...
n12=128: 8, 8, 64, 64
 $[n1+n133= 18]$: (1,17), (2,16), (3,15), (4,14), (5,13), (6,12), (7,11), ...
 $[n12+n144=272]$: (128,144), (129,143), (130,142), (131,141), (132,140), (133,139), (134,138), ...
 $[n1+n12=129]$: (1,128), (2,127), (3,126), (4,125), (5,124), (6,123), (7,122), ...

$[n_{133}+n_{144}=161]$: (17, 144), (18, 143), (19, 142), (20, 141), (21, 140), (22, 139), (23, 138), ...
 $n_{12}=127$: 9, 9, 63, 63
 $[n_1+n_{133}= 19]$: (1, 18), (2, 17), (3, 16), (4, 15), (5, 14), (6, 13), (7, 12), ...
 $[n_{12}+n_{144}=271]$: (127, 144), (128, 143), (129, 142), (130, 141), (131, 140), (132, 139), (133, 138), ...
 $[n_1+n_{12}=128]$: (1, 127), (2, 126), (3, 125), (4, 124), (5, 123), (6, 122), (7, 121), ...
 $[n_{133}+n_{144}=162]$: (18, 144), (19, 143), (20, 142), (21, 141), (22, 140), (23, 139), (24, 138), ...
 $n_{12}=126$: 9, 9, 63, 63
 $[n_1+n_{133}= 20]$: (1, 19), (2, 18), (3, 17), (4, 16), (5, 15), (6, 14), (7, 13), ...
 $[n_{12}+n_{144}=270]$: (126, 144), (127, 143), (128, 142), (129, 141), (130, 140), (131, 139), (132, 138), ...
 $[n_1+n_{12}=127]$: (1, 126), (2, 125), (3, 124), (4, 123), (5, 122), (6, 121), (7, 120), ...
 $[n_{133}+n_{144}=163]$: (19, 144), (20, 143), (21, 142), (22, 141), (23, 140), (24, 139), (25, 138), ...
 $n_{12}=125$: 10, 10, 62, 62
 $[n_1+n_{133}= 21]$: (1, 20), (2, 19), (3, 18), (4, 17), (5, 16), (6, 15), (7, 14), ...
 $[n_{12}+n_{144}=269]$: (125, 144), (126, 143), (127, 142), (128, 141), (129, 140), (130, 139), (131, 138), ...
 $[n_1+n_{12}=126]$: (1, 125), (2, 124), (3, 123), (4, 122), (5, 121), (6, 120), (7, 119), ...
 $[n_{133}+n_{144}=164]$: (20, 144), (21, 143), (22, 142), (23, 141), (24, 140), (25, 139), (26, 138), ...
 $n_{12}=124$: 10, 10, 62, 62
 $[n_1+n_{133}= 22]$: (1, 21), (2, 20), (3, 19), (4, 18), (5, 17), (6, 16), (7, 15), ...
 $[n_{12}+n_{144}=268]$: (124, 144), (125, 143), (126, 142), (127, 141), (128, 140), (129, 139), (130, 138), ...
 $[n_1+n_{12}=125]$: (1, 124), (2, 123), (3, 122), (4, 121), (5, 120), (6, 119), (7, 118), ...
 $[n_{133}+n_{144}=165]$: (21, 144), (22, 143), (23, 142), (24, 141), (25, 140), (26, 139), (27, 138), ...
 $n_{12}=123$: 11, 11, 61, 61
 $[n_1+n_{133}= 23]$: (1, 22), (2, 21), (3, 20), (4, 19), (5, 18), (6, 17), (7, 16), ...
 $[n_{12}+n_{144}=267]$: (123, 144), (124, 143), (125, 142), (126, 141), (127, 140), (128, 139), (129, 138), ...
 $[n_1+n_{12}=124]$: (1, 123), (2, 122), (3, 121), (4, 120), (5, 119), (6, 118), (7, 117), ...
 $[n_{133}+n_{144}=166]$: (22, 144), (23, 143), (24, 142), (25, 141), (26, 140), (27, 139), (28, 138), ...
 $n_{12}=122$: 11, 11, 61, 61
 $[n_1+n_{133}= 24]$: (1, 23), (2, 22), (3, 21), (4, 20), (5, 19), (6, 18), (7, 17), ...
 $[n_{12}+n_{144}=266]$: (122, 144), (123, 143), (124, 142), (125, 141), (126, 140), (127, 139), (128, 138), ...
 $[n_1+n_{12}=123]$: (1, 122), (2, 121), (3, 120), (4, 119), (5, 118), (6, 117), (7, 116), ...
 $[n_{133}+n_{144}=167]$: (23, 144), (24, 143), (25, 142), (26, 141), (27, 140), (28, 139), (29, 138), ...
 $n_{12}=121$: 12, 12, 60, 60
 $[n_1+n_{133}= 25]$: (1, 24), (2, 23), (3, 22), (4, 21), (5, 20), (6, 19), (7, 18), ...
 $[n_{12}+n_{144}=265]$: (121, 144), (122, 143), (123, 142), (124, 141), (125, 140), (126, 139), (127, 138), ...
 $[n_1+n_{12}=122]$: (1, 121), (2, 120), (3, 119), (4, 118), (5, 117), (6, 116), (7, 115), ...
 $[n_{133}+n_{144}=168]$: (24, 144), (25, 143), (26, 142), (27, 141), (28, 140), (29, 139), (30, 138), ...
 $n_{12}=120$: 12, 12, 60, 60
 $[n_1+n_{133}= 26]$: (1, 25), (2, 24), (3, 23), (4, 22), (5, 21), (6, 20), (7, 19), ...
 $[n_{12}+n_{144}=264]$: (120, 144), (121, 143), (122, 142), (123, 141), (124, 140), (125, 139), (126, 138), ...
 $[n_1+n_{12}=121]$: (1, 120), (2, 119), (3, 118), (4, 117), (5, 116), (6, 115), (7, 114), ...
 $[n_{133}+n_{144}=169]$: (25, 144), (26, 143), (27, 142), (28, 141), (29, 140), (30, 139), (31, 138), ...
 $n_{12}=119$: 13, 13, 59, 59
 $[n_1+n_{133}= 27]$: (1, 26), (2, 25), (3, 24), (4, 23), (5, 22), (6, 21), (7, 20), ...
 $[n_{12}+n_{144}=263]$: (119, 144), (120, 143), (121, 142), (122, 141), (123, 140), (124, 139), (125, 138), ...
 $[n_1+n_{12}=120]$: (1, 119), (2, 118), (3, 117), (4, 116), (5, 115), (6, 114), (7, 113), ...
 $[n_{133}+n_{144}=170]$: (26, 144), (27, 143), (28, 142), (29, 141), (30, 140), (31, 139), (32, 138), ...
 $n_{12}=118$: 13, 13, 59, 59
 $[n_1+n_{133}= 28]$: (1, 27), (2, 26), (3, 25), (4, 24), (5, 23), (6, 22), (7, 21), ...
 $[n_{12}+n_{144}=262]$: (118, 144), (119, 143), (120, 142), (121, 141), (122, 140), (123, 139), (124, 138), ...
 $[n_1+n_{12}=119]$: (1, 118), (2, 117), (3, 116), (4, 115), (5, 114), (6, 113), (7, 112), ...
 $[n_{133}+n_{144}=171]$: (27, 144), (28, 143), (29, 142), (30, 141), (31, 140), (32, 139), (33, 138), ...
 $n_{12}=117$: 14, 14, 58, 58
 $[n_1+n_{133}= 29]$: (1, 28), (2, 27), (3, 26), (4, 25), (5, 24), (6, 23), (7, 22), ...
 $[n_{12}+n_{144}=261]$: (117, 144), (118, 143), (119, 142), (120, 141), (121, 140), (122, 139), (123, 138), ...
 $[n_1+n_{12}=118]$: (1, 117), (2, 116), (3, 115), (4, 114), (5, 113), (6, 112), (7, 111), ...
 $[n_{133}+n_{144}=172]$: (28, 144), (29, 143), (30, 142), (31, 141), (32, 140), (33, 139), (34, 138), ...
 $n_{12}=116$: 14, 14, 58, 58
 $[n_1+n_{133}= 30]$: (1, 29), (2, 28), (3, 27), (4, 26), (5, 25), (6, 24), (7, 23), ...
 $[n_{12}+n_{144}=260]$: (116, 144), (117, 143), (118, 142), (119, 141), (120, 140), (121, 139), (122, 138), ...
 $[n_1+n_{12}=117]$: (1, 116), (2, 115), (3, 114), (4, 113), (5, 112), (6, 111), (7, 110), ...
 $[n_{133}+n_{144}=173]$: (29, 144), (30, 143), (31, 142), (32, 141), (33, 140), (34, 139), (35, 138), ...
 $n_{12}=115$: 15, 15, 57, 57
 $[n_1+n_{133}= 31]$: (1, 30), (2, 29), (3, 28), (4, 27), (5, 26), (6, 25), (7, 24), ...
 $[n_{12}+n_{144}=259]$: (115, 144), (116, 143), (117, 142), (118, 141), (119, 140), (120, 139), (121, 138), ...
 $[n_1+n_{12}=116]$: (1, 115), (2, 114), (3, 113), (4, 112), (5, 111), (6, 110), (7, 109), ...
 $[n_{133}+n_{144}=174]$: (30, 144), (31, 143), (32, 142), (33, 141), (34, 140), (35, 139), (36, 138), ...
 $n_{12}=114$: 15, 15, 57, 57

$[n1+n133= 32]: (1, 31), (2, 30), (3, 29), (4, 28), (5, 27), (6, 26), (7, 25), \dots$
 $[n12+n144=258]: (114, 144), (115, 143), (116, 142), (117, 141), (118, 140), (119, 139), (120, 138), \dots$
 $[n1+n12=115]: (1, 114), (2, 113), (3, 112), (4, 111), (5, 110), (6, 109), (7, 108), \dots$
 $[n133+n144=175]: (31, 144), (32, 143), (33, 142), (34, 141), (35, 140), (36, 139), (37, 138), \dots$
n12=113: 16, 16, 56, 56
 $[n1+n133= 33]: (1, 32), (2, 31), (3, 30), (4, 29), (5, 28), (6, 27), (7, 26), \dots$
 $[n12+n144=257]: (113, 144), (114, 143), (115, 142), (116, 141), (117, 140), (118, 139), (119, 138), \dots$
 $[n1+n12=114]: (1, 113), (2, 112), (3, 111), (4, 110), (5, 109), (6, 108), (7, 107), \dots$
 $[n133+n144=176]: (32, 144), (33, 143), (34, 142), (35, 141), (36, 140), (37, 139), (38, 138), \dots$
n12=112: 16, 16, 56, 56
 $[n1+n133= 34]: (1, 33), (2, 32), (3, 31), (4, 30), (5, 29), (6, 28), (7, 27), \dots$
 $[n12+n144=256]: (112, 144), (113, 143), (114, 142), (115, 141), (116, 140), (117, 139), (118, 138), \dots$
 $[n1+n12=113]: (1, 112), (2, 111), (3, 110), (4, 109), (5, 108), (6, 107), (7, 106), \dots$
 $[n133+n144=177]: (33, 144), (34, 143), (35, 142), (36, 141), (37, 140), (38, 139), (39, 138), \dots$
n12=111: 17, 17, 55, 55
 $[n1+n133= 35]: (1, 34), (2, 33), (3, 32), (4, 31), (5, 30), (6, 29), (7, 28), \dots$
 $[n12+n144=255]: (111, 144), (112, 143), (113, 142), (114, 141), (115, 140), (116, 139), (117, 138), \dots$
 $[n1+n12=112]: (1, 111), (2, 110), (3, 109), (4, 108), (5, 107), (6, 106), (7, 105), \dots$
 $[n133+n144=178]: (34, 144), (35, 143), (36, 142), (37, 141), (38, 140), (39, 139), (40, 138), \dots$
n12=110: 17, 17, 55, 55
 $[n1+n133= 36]: (1, 35), (2, 34), (3, 33), (4, 32), (5, 31), (6, 30), (7, 29), \dots$
 $[n12+n144=254]: (110, 144), (111, 143), (112, 142), (113, 141), (114, 140), (115, 139), (116, 138), \dots$
 $[n1+n12=111]: (1, 110), (2, 109), (3, 108), (4, 107), (5, 106), (6, 105), (7, 104), \dots$
 $[n133+n144=179]: (35, 144), (36, 143), (37, 142), (38, 141), (39, 140), (40, 139), (41, 138), \dots$
n12=109: 18, 18, 54, 54
 $[n1+n133= 37]: (1, 36), (2, 35), (3, 34), (4, 33), (5, 32), (6, 31), (7, 30), \dots$
 $[n12+n144=253]: (109, 144), (110, 143), (111, 142), (112, 141), (113, 140), (114, 139), (115, 138), \dots$
 $[n1+n12=110]: (1, 109), (2, 108), (3, 107), (4, 106), (5, 105), (6, 104), (7, 103), \dots$
 $[n133+n144=180]: (36, 144), (37, 143), (38, 142), (39, 141), (40, 140), (41, 139), (42, 138), \dots$
n12=108: 18, 18, 54, 54
 $[n1+n133= 38]: (1, 37), (2, 36), (3, 35), (4, 34), (5, 33), (6, 32), (7, 31), \dots$
 $[n12+n144=252]: (108, 144), (109, 143), (110, 142), (111, 141), (112, 140), (113, 139), (114, 138), \dots$
 $[n1+n12=109]: (1, 108), (2, 107), (3, 106), (4, 105), (5, 104), (6, 103), (7, 102), \dots$
 $[n133+n144=181]: (37, 144), (38, 143), (39, 142), (40, 141), (41, 140), (42, 139), (43, 138), \dots$
n12=107: 19, 19, 53, 53
 $[n1+n133= 39]: (1, 38), (2, 37), (3, 36), (4, 35), (5, 34), (6, 33), (7, 32), \dots$
 $[n12+n144=251]: (107, 144), (108, 143), (109, 142), (110, 141), (111, 140), (112, 139), (113, 138), \dots$
 $[n1+n12=108]: (1, 107), (2, 106), (3, 105), (4, 104), (5, 103), (6, 102), (7, 101), \dots$
 $[n133+n144=182]: (38, 144), (39, 143), (40, 142), (41, 141), (42, 140), (43, 139), (44, 138), \dots$
n12=106: 19, 19, 53, 53
 $[n1+n133= 40]: (1, 39), (2, 38), (3, 37), (4, 36), (5, 35), (6, 34), (7, 33), \dots$
 $[n12+n144=250]: (106, 144), (107, 143), (108, 142), (109, 141), (110, 140), (111, 139), (112, 138), \dots$
 $[n1+n12=107]: (1, 106), (2, 105), (3, 104), (4, 103), (5, 102), (6, 101), (7, 100), \dots$
 $[n133+n144=183]: (39, 144), (40, 143), (41, 142), (42, 141), (43, 140), (44, 139), (45, 138), \dots$
n12=105: 20, 20, 52, 52
 $[n1+n133= 41]: (1, 40), (2, 39), (3, 38), (4, 37), (5, 36), (6, 35), (7, 34), \dots$
 $[n12+n144=249]: (105, 144), (106, 143), (107, 142), (108, 141), (109, 140), (110, 139), (111, 138), \dots$
 $[n1+n12=106]: (1, 105), (2, 104), (3, 103), (4, 102), (5, 101), (6, 100), (7, 99), \dots$
 $[n133+n144=184]: (40, 144), (41, 143), (42, 142), (43, 141), (44, 140), (45, 139), (46, 138), \dots$
n12=104: 20, 20, 52, 52
 $[n1+n133= 42]: (1, 41), (2, 40), (3, 39), (4, 38), (5, 37), (6, 36), (7, 35), \dots$
 $[n12+n144=248]: (104, 144), (105, 143), (106, 142), (107, 141), (108, 140), (109, 139), (110, 138), \dots$
 $[n1+n12=105]: (1, 104), (2, 103), (3, 102), (4, 101), (5, 100), (6, 99), (7, 98), \dots$
 $[n133+n144=185]: (41, 144), (42, 143), (43, 142), (44, 141), (45, 140), (46, 139), (47, 138), \dots$
n12=103: 21, 21, 51, 51
 $[n1+n133= 43]: (1, 42), (2, 41), (3, 40), (4, 39), (5, 38), (6, 37), (7, 36), \dots$
 $[n12+n144=247]: (103, 144), (104, 143), (105, 142), (106, 141), (107, 140), (108, 139), (109, 138), \dots$
 $[n1+n12=104]: (1, 103), (2, 102), (3, 101), (4, 100), (5, 99), (6, 98), (7, 97), \dots$
 $[n133+n144=186]: (42, 144), (43, 143), (44, 142), (45, 141), (46, 140), (47, 139), (48, 138), \dots$
n12=102: 21, 21, 51, 51
 $[n1+n133= 44]: (1, 43), (2, 42), (3, 41), (4, 40), (5, 39), (6, 38), (7, 37), \dots$
 $[n12+n144=246]: (102, 144), (103, 143), (104, 142), (105, 141), (106, 140), (107, 139), (108, 138), \dots$
 $[n1+n12=103]: (1, 102), (2, 101), (3, 100), (4, 99), (5, 98), (6, 97), (7, 96), \dots$
 $[n133+n144=187]: (43, 144), (44, 143), (45, 142), (46, 141), (47, 140), (48, 139), (49, 138), \dots$
n12=101: 22, 22, 50, 50
 $[n1+n133= 45]: (1, 44), (2, 43), (3, 42), (4, 41), (5, 40), (6, 39), (7, 38), \dots$
 $[n12+n144=245]: (101, 144), (102, 143), (103, 142), (104, 141), (105, 140), (106, 139), (107, 138), \dots$

$[n1+n12=102]: (1,101), (2,100), (3,99), (4,98), (5,97), (6,96), (7,95), \dots$
 $[n133+n144=188]: (44,144), (45,143), (46,142), (47,141), (48,140), (49,139), (50,138), \dots$
 $n12=100: 22, 22, 50, 50$
 $[n1+n133= 26]: (1,45), (2,44), (3,43), (4,42), (5,41), (6,40), (7,39), \dots$
 $[n12+n144=244]: (100,144), (101,143), (102,142), (103,141), (104,140), (105,139), (106,138), \dots$
 $[n1+n12=101]: (1,100), (2,99), (3,98), (4,97), (5,96), (6,95), (7,94), \dots$
 $[n133+n144=189]: (45,144), (46,143), (47,142), (48,141), (49,140), (50,139), (51,138), \dots$
 $n12=99: 23, 23, 49, 49$
 $[n1+n133= 47]: (1,46), (2,45), (3,44), (4,43), (5,42), (6,41), (7,40), \dots$
 $[n12+n144=243]: (99,144), (100,143), (101,142), (102,141), (103,140), (104,139), (105,138), \dots$
 $[n1+n12=100]: (1,99), (2,98), (3,97), (4,96), (5,95), (6,94), (7,93), \dots$
 $[n133+n144=190]: (46,144), (47,143), (48,142), (49,141), (50,140), (51,139), (52,138), \dots$
 $n12=98: 23, 23, 49, 49$
 $[n1+n133= 48]: (1,47), (2,46), (3,45), (4,44), (5,43), (6,42), (7,41), \dots$
 $[n12+n144=242]: (98,144), (99,143), (100,142), (101,141), (102,140), (103,139), (104,138), \dots$
 $[n1+n12= 99]: (1,98), (2,97), (3,96), (4,95), (5,94), (6,93), (7,92), \dots$
 $[n133+n144=191]: (47,144), (48,143), (49,142), (50,141), (51,140), (52,139), (53,138), \dots$
 \dots

かくして $n1=1$ の場合、 $n12$ の値は $73 \leq n12 \leq 133$ の間をチェックすれば良い。143~134 の範囲では、6組の補数を用意できないセットがあるので、構成不可能なのである。

6. その他にも、どんなことが前もって言い得るだろうか。再び代数的構造分析を試みる。今度は各変数の値の取り得る範囲を考察しよう。

* 基本図 (拡張方陣空間) *

143	144	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	133	134
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
23	24	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	13	14
35	36	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	25	26
47	48	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	37	38
59	60	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	49	50
71	72	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	61	62
83	84	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	73	74
95	96	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	85	86
107	108	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	97	98
119	120	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	109	110
131	132	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	121	122
143	144	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	133	134
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2

先ず等しい補数対のペアをマークする

$n1+n133=n3+n135=n5+n137=n7+n139=n9+n141=n11+n143$; それと対称型補数から $n133=145-n12$;
 $n3=n1+n133-n135$; $n135$ を $1 \leq n135 \leq 144$ によって消去すると, $(n1+n133-144) \leq n3 \leq (n1+n133-1)$;
ゆえに $n1+(145-n12)-144 \leq n3 \leq n1+n133-1$; 整理して, $(n1-n12+1) \leq n3 \leq (n1+n133-1)$;
つまり $(n1-n12) < n3 < (n1+n133)$; 同様に $(n1-n12) < n5 < (n1+n133)$; $(n1-n12) < n7 < (n1+n133)$;
 $(n1-n12) < n9 < (n1+n133)$; $(n1-n12) < n11 < (n1+n133)$; が言える。ただし, $(n1-n12) > 0$; $(n1+n133) < 145$;
いっぽう

$n12+n144=n2+n134=n4+n136=n6+n138=n8+n140=n10+n142$; それと対称型補数だから $n144=145-n1$;
 $n2=n12+n144-n134$; $n134$ を $1 \leq n134 \leq 144$ によって消去すると, $(n12+n144-144) \leq n2 \leq (n12+n144-1)$;

ゆえに $n12+(145-n1)-144 \leq n2 \leq n12+n144-1$; $n12-n1-1 \leq n2 \leq n12+n144-1$;
 つまり $(n12-n1) < n2 < (n12+n144)$; 同様にして $(n12-n1) < n4 < (n12+n144)$; $(n12-n1) < n6 < (n12+n144)$;
 $(n12-n1) < n8 < (n12+n144)$; $(n12-n1) < n10 < (n12+n144)$; ただし, $(n12-n1) > 0$; $(n12+n144) < 145$;
 全く同じようにやって $n1+n12 = n25+n36 = n49+n60 = n73+n84 = n97+n108 = n121+n132$; $n1 = 145-n144$; から
 $n1+n12-144 \leq n25 \leq n1+n12+1$; $(145-n144)+n12-144 \leq n25 \leq n1+n12+1$; $(n12-n144) < n25 < (n1+n12)$;
 $(n12-n144) < n49 < (n1+n12)$; $(n12-n144) < n73 < (n1+n12)$; $(n12-n144) < n97 < (n1+n12)$;
 $(n12-n144) < n121 < (n1+n12)$; ただし, $(n12-n144) > 0$; $(n1+n12) < 145$;
 いっぽう $n133+n144 = n13+n24 = n37+n48 = n61+n72 = n85+n96 = n109+n120$; $n144 = 145-n1$; から
 $n133+n144-144 \leq n13 \leq n133+n144-1$; つまり $(n133-n1) < n13 < (n133+n144)$; $(n133-n1) < n37 < (n133+n144)$;
 $(n133-n1) < n61 < (n133+n144)$; $(n133-n1) < n97 < (n133+n144)$; $(n133-n1) < n121 < (n133+n144)$;

こういうふうな探索範囲の制限は、無駄な手間を省き、実行スピードを速め、時間の大きな節約を果たす。

この他にも、持てる技術を総動員して、プログラムに諸々の工夫を講じた。そして、実行スピードの向上を図ってみた。その結果を報告する。次のリストを見てほしい。

```

/* 改良プログラムの実際例：抜粋：撰田寛二謹製 */
/* Level 1: */
/* Set N1<n144 & n144=CSM-N1 */
void stp01(){
    short a,b;
    for(a=1;a<73;a++){b=CSM-a;
        if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
            nm[1]=a; nm[144]=b;
            uflg[a]=1; uflg[b]=1;
            stp02();
            uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
    }
}
/* Set N12 & n133=CSM-N12 & N12>n133>N1 */
void stp02(){
    short a,b;
    for(a=144;a>72;a--){b=CSM-a;
        if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)&&(b>nm[1])){
            nm[12]=a; nm[133]=b;
            uflg[a]=1; uflg[b]=1;
            if(nm[1]+nm[12]+nm[133]+nm[144]==QSM){if(cnt3>0){prans(cnt3); cnt3=0;};
                printf(" %d/ (n1, n12)=(%d, %d):\n",cnt,nm[1],nm[12]);
                stp03();}
            uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
    }
}
/* 各変数の取り得る値を予め計算して備える */
/* Set N2 & n143=CSM-N2 */
/* (n12-n1)<N2<(n12+n144) */
void stp03(){
    short a,b;
    LV1=nm[12]-nm[1];    if(LV1<0){LV1=0;}
    HV1=nm[12]+nm[144]; if(HV1>144){HV1=144;}
    LV2=nm[1]-nm[12];   if(LV2<0){LV2=0;}
    HV2=nm[1]+nm[133];  if(HV2>144){HV2=144;}
    LV3=nm[12]-nm[144]; if(LV3<0){LV3=0;}
    HV3=nm[1]+nm[12];   if(HV3>144){HV3=144;}
    LV4=nm[133]-nm[1];  if(LV4<0){LV4=0;}
    HV4=nm[133]+nm[144];if(HV4>144){HV4=144;}
    /**/
    for(a=HV1;a>LV1;a--){b=CSM-a;
        if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
            nm[2]=a; nm[143]=b;
            uflg[a]=1; uflg[b]=1; cnt2=0;
            stp04();
            uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
    }
}

```

```

}
/* Set n11=QSM-n12-n143-n144 & n134=CSM-n11 */
/* (n1-n12)<n11<(n1+n133) */
void stp04(){
  short a,b;
  a=QSM-nm[12]-nm[143]-nm[144];
  b=QSM-nm[133]-nm[2]-nm[1];
  if((LV2<a)&&(a<=HV2)&&(a+b==CSM)){
    if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
      nm[11]=a; nm[134]=b;
      uflg[a]=1; uflg[b]=1;
      stp05();
      uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
/* Set N3 & n142=CSM-N3 */
/* (n1-n12)<N3<(n1+n133) */
void stp05(){
  short a,b;
  for(a=LV2+1;a<=HV2;a++){b=CSM-a;
    if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
      nm[3]=a; nm[142]=b;
      uflg[a]=1; uflg[b]=1;
      stp06();
      uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
/* Set n10=QSM-n11-n142-n143 & n135=CSM-n10 */
/* (n12-n1)<n10<(n12+n144) */
void stp06(){
  short a,b;
  a=QSM-nm[11]-nm[142]-nm[143];
  b=QSM-nm[134]-nm[3]-nm[2];
  if((LV1<a)&&(a<=HV1)&&(a+b==CSM)){
    if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
      nm[10]=a; nm[135]=b;
      uflg[a]=1; uflg[b]=1;
      stp07();
      uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
/* Set N4 & n141=CSM-N4 */
/* (n12-n1)<N4<(n12+n144) */
void stp07(){
  short a,b;
  for(a=HV1;a>LV1;a--){b=CSM-a;
    if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
      nm[4]=a; nm[141]=b;
      uflg[a]=1; uflg[b]=1;
      stp08();
      uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
/* Set n9=QSM-n10-n141-n142 & n136=CSM-n9 */
/* (n1-n12)<n9<(n1+n133) */
void stp08(){
  short a,b;
  a=QSM-nm[10]-nm[141]-nm[142];
  b=QSM-nm[135]-nm[4]-nm[3];
  if((LV2<a)&&(a<=HV2)&&(a+b==CSM)){
    if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
      nm[9]=a; nm[136]=b;
      uflg[a]=1; uflg[b]=1;
      stp09();
      uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
}
/* Set N5 & n140=CSM-N5 */

```

```

/* (n1-n12)<N5<(n1+n133) */
void stp09(){
  short a,b;
  for(a=LV2+1;a<=HV2;a++){b=CSM-a;
    if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
      nm[5]=a; nm[140]=b;
      uflg[a]=1; uflg[b]=1;
      stp10();
      uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
  }
}
/* Set n8=QSM-n9-n140-n141 & n137=CSM-n8 */
/* (n12-n1)<n8<(n12+n144) */
void stp10(){
  short a,b;
  a=QSM-nm[9]-nm[140]-nm[141];
  b=QSM-nm[136]-nm[5]-nm[4];
  if((LV1<a)&&(a<=HV1)&&(a+b==CSM)){
    if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
      nm[8]=a; nm[137]=b;
      uflg[a]=1; uflg[b]=1;
      stp11();
      uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
  }
}
/* Set n6=HSM-n1-n2-n3-n4-n5 & n139=CSM-n6 */
/* (n12-n1)<n6<(n12+n144) */
void stp11(){
  short a,b;
  a=HSM-nm[1]-nm[2]-nm[3]-nm[4]-nm[5];
  b=HSM-nm[144]-nm[143]-nm[142]-nm[141]-nm[140];
  if((LV1<a)&&(a<=HV1)&&(a+b==CSM)){
    if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
      nm[6]=a; nm[139]=b;
      uflg[a]=1; uflg[b]=1;
      stp12();
      uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
  }
}
/* Set n7=QSM-n8-n139-n140 & n138=CSM-n7 */
/* (n1-n12)<n7<(n1+n133) */
void stp12(){
  short a,b,c;
  a=QSM-nm[8]-nm[139]-nm[140];
  b=QSM-nm[137]-nm[6]-nm[5];
  c=LSM-nm[1]-nm[2]-nm[3]-nm[4]-nm[5]-nm[6]-nm[8]-nm[9]-nm[10]-nm[11]-nm[12];
  if((LV2<a)&&(a<=HV2)&&(a+b==CSM)){
    if((a==c)&&(uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
      nm[7]=a; nm[138]=b;
      uflg[a]=1; uflg[b]=1;
      if(nm[6]+nm[7]+nm[138]+nm[139]==QSM){stp13();}
      uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
  }
}
/* Level 2: */
. . . . .

```

7. 最新プログラムによる実行結果を解のリストにして示そう。

**** 三連立型正方連結汎対称十二方陣の標準解 : n1 = 1 の場合 (抜粋) ****

**** 解のリスト : 摂田寛二謹製 On January 31, 2010 ****

```

0/ (n1, n12)=(1, 143):
0/ (n1, n12)=(1, 142):
0/ (n1, n12)=(1, 141):
0/ (n1, n12)=(1, 140):
0/ (n1, n12)=(1, 139):
0/ (n1, n12)=(1, 138):

```

0/ (n1, n12)=(1, 137):
0/ (n1, n12)=(1, 136):
0/ (n1, n12)=(1, 135):
0/ (n1, n12)=(1, 134):
0/ (n1, n12)=(1, 133):

1/

721/

1 143 3 141 7 140 8 139 9 135 11 133	1 143 7 141 3 140 8 135 9 139 11 133
132 14 130 16 126 17 125 18 124 22 122 24	132 14 126 16 130 17 125 22 124 18 122 24
97 47 99 45 103 44 104 43 105 39 107 37	97 47 103 45 99 44 104 39 105 43 107 37
36 110 34 112 30 113 29 114 28 118 26 120	36 110 30 112 34 113 29 118 28 114 26 120
85 59 87 57 91 56 92 55 93 51 95 49	85 59 91 57 87 56 92 51 93 55 95 49
84 62 82 64 78 65 77 66 76 70 74 72	84 62 78 64 82 65 77 70 76 66 74 72
73 71 75 69 79 68 80 67 81 63 83 61	73 71 79 69 75 68 80 63 81 67 83 61
96 50 94 52 90 53 89 54 88 58 86 60	96 50 90 52 94 53 89 58 88 54 86 60
25 119 27 117 31 116 32 115 33 111 35 109	25 119 31 117 27 116 32 111 33 115 35 109
108 38 106 40 102 41 101 42 100 46 98 48	108 38 102 40 106 41 101 46 100 42 98 48
121 23 123 21 127 20 128 19 129 15 131 13	121 23 127 21 123 20 128 15 129 19 131 13
12 134 10 136 6 137 5 138 4 142 2 144	12 134 6 136 10 137 5 142 4 138 2 144

1441/

2161/

1 143 8 141 3 139 7 135 9 140 11 133	1 143 9 140 3 139 7 135 8 141 11 133
132 14 125 16 130 18 126 22 124 17 122 24	132 14 124 17 130 18 126 22 125 16 122 24
97 47 104 45 99 43 103 39 105 44 107 37	97 47 105 44 99 43 103 39 104 45 107 37
36 110 29 112 34 114 30 118 28 113 26 120	36 110 28 113 34 114 30 118 29 112 26 120
85 59 92 57 87 55 91 51 93 56 95 49	85 59 93 56 87 55 91 51 92 57 95 49
84 62 77 64 82 66 78 70 76 65 74 72	84 62 76 65 82 66 78 70 77 64 74 72
73 71 80 69 75 67 79 63 81 68 83 61	73 71 81 68 75 67 79 63 80 69 83 61
96 50 89 52 94 54 90 58 88 53 86 60	96 50 88 53 94 54 90 58 89 52 86 60
25 119 32 117 27 115 31 111 33 116 35 109	25 119 33 116 27 115 31 111 32 117 35 109
108 38 101 40 106 42 102 46 100 41 98 48	108 38 100 41 106 42 102 46 101 40 98 48
121 23 128 21 123 19 127 15 129 20 131 13	121 23 129 20 123 19 127 15 128 21 131 13
12 134 5 136 10 138 6 142 4 137 2 144	12 134 4 137 10 138 6 142 5 136 2 144

2881/

3601/

1 141 3 143 7 140 8 139 11 135 9 133	1 141 7 143 3 140 8 135 11 139 9 133
132 16 130 14 126 17 125 18 122 22 124 24	132 16 126 14 130 17 125 22 122 18 124 24
97 45 99 47 103 44 104 43 107 39 105 37	97 45 103 47 99 44 104 39 107 43 105 37
36 112 34 110 30 113 29 114 26 118 28 120	36 112 30 110 34 113 29 118 26 114 28 120
85 57 87 59 91 56 92 55 95 51 93 49	85 57 91 59 87 56 92 51 95 55 93 49
84 64 82 62 78 65 77 66 74 70 76 72	84 64 78 62 82 65 77 70 74 66 76 72
73 69 75 71 79 68 80 67 83 63 81 61	73 69 79 71 75 68 80 63 83 67 81 61
96 52 94 50 90 53 89 54 86 58 88 60	96 52 90 50 94 53 89 58 86 54 88 60
25 117 27 119 31 116 32 115 35 111 33 109	25 117 31 119 27 116 32 111 35 115 33 109
108 40 106 38 102 41 101 42 98 46 100 48	108 40 102 38 106 41 101 46 98 42 100 48
121 21 123 23 127 20 128 19 131 15 129 13	121 21 127 23 123 20 128 15 131 19 129 13
12 136 10 134 6 137 5 138 2 142 4 144	12 136 6 134 10 137 5 142 2 138 4 144

4321/

5041/

1 141 8 143 3 139 7 135 11 140 9 133	1 141 11 140 3 139 7 135 8 143 9 133
132 16 125 14 130 18 126 22 122 17 124 24	132 16 122 17 130 18 126 22 125 14 124 24
97 45 104 47 99 43 103 39 107 44 105 37	97 45 107 44 99 43 103 39 104 47 105 37
36 112 29 110 34 114 30 118 26 113 28 120	36 112 26 113 34 114 30 118 29 110 28 120
85 57 92 59 87 55 91 51 95 56 93 49	85 57 95 56 87 55 91 51 92 59 93 49
84 64 77 62 82 66 78 70 74 65 76 72	84 64 74 65 82 66 78 70 77 62 76 72
73 69 80 71 75 67 79 63 83 68 81 61	73 69 83 68 75 67 79 63 80 71 81 61
96 52 89 50 94 54 90 58 86 53 88 60	96 52 86 53 94 54 90 58 89 50 88 60
25 117 32 119 27 115 31 111 35 116 33 109	25 117 35 116 27 115 31 111 32 119 33 109
108 40 101 38 106 42 102 46 98 41 100 48	108 40 98 41 106 42 102 46 101 38 100 48
121 21 128 23 123 19 127 15 131 20 129 13	121 21 131 20 123 19 127 15 128 23 129 13
12 136 5 134 10 138 6 142 2 137 4 144	12 136 2 137 10 138 6 142 5 134 4 144

5761/

8641/

1 140 3 143 7 141 9 139 11 135 8 133	1 139 3 143 8 141 9 140 11 135 7 133
132 17 130 14 126 16 124 18 122 22 125 24	132 18 130 14 125 16 124 17 122 22 126 24
97 44 99 47 103 45 105 43 107 39 104 37	97 43 99 47 104 45 105 44 107 39 103 37
36 113 34 110 30 112 28 114 26 118 29 120	36 114 34 110 29 112 28 113 26 118 30 120
85 56 87 59 91 57 93 55 95 51 92 49	85 55 87 59 92 57 93 56 95 51 91 49
84 65 82 62 78 64 76 66 74 70 77 72	84 66 82 62 77 64 76 65 74 70 78 72
73 68 75 71 79 69 81 67 83 63 80 61	73 67 75 71 80 69 81 68 83 63 79 61
96 53 94 50 90 52 88 54 86 58 89 60	96 54 94 50 89 52 88 53 86 58 90 60
25 116 27 119 31 117 33 115 35 111 32 109	25 115 27 119 32 117 33 116 35 111 31 109
108 41 106 38 102 40 100 42 98 46 101 48	108 42 106 38 101 40 100 41 98 46 102 48
121 20 123 23 127 21 129 19 131 15 128 13	121 19 123 23 128 21 129 20 131 15 127 13
12 137 10 134 6 136 4 138 2 142 5 144	12 138 10 134 5 136 4 137 2 142 6 144

11521/

1 135 7 143 8 141 9 140 11 139 3 133
 132 22 126 14 125 16 124 17 122 18 130 24
 97 39 103 47 104 45 105 44 107 43 99 37
 36 118 30 110 29 112 28 113 26 114 34 120
 85 51 91 59 92 57 93 56 95 55 87 49
 84 70 78 62 77 64 76 65 74 66 82 72
 73 63 79 71 80 69 81 68 83 67 75 61
 96 58 90 50 89 52 88 53 86 54 94 60
 25 111 31 119 32 117 33 116 35 115 27 109
 108 46 102 38 101 40 100 41 98 42 106 48
 121 15 127 23 128 21 129 20 131 19 123 13
 12 142 6 134 5 136 4 137 2 138 10 144

- 14400/ (n1, n12)=(1, 132):
- 14400/ (n1, n12)=(1, 131):
- 14400/ (n1, n12)=(1, 130):
- 14400/ (n1, n12)=(1, 129):
- 14400/ (n1, n12)=(1, 128):
- 14400/ (n1, n12)=(1, 127):
- 14400/ (n1, n12)=(1, 126):
- 14400/ (n1, n12)=(1, 125):
- 14400/ (n1, n12)=(1, 124):
- 14400/ (n1, n12)=(1, 123):
- 14400/ (n1, n12)=(1, 122):
- 14400/ (n1, n12)=(1, 121):
- 14400/ (n1, n12)=(1, 120):
- 14400/ (n1, n12)=(1, 119):
- 14400/ (n1, n12)=(1, 118):
- 14400/ (n1, n12)=(1, 117):

14401/

1 143 3 141 15 132 16 131 25 119 27 117
 140 6 138 8 126 17 125 18 116 30 114 32
 81 63 83 61 95 52 96 51 105 39 107 37
 36 110 34 112 22 121 21 122 12 134 10 136
 77 67 79 65 91 56 92 55 101 43 103 41
 100 46 98 48 86 57 85 58 76 70 74 72
 73 71 75 69 87 60 88 59 97 47 99 45
 104 42 102 44 90 53 89 54 80 66 78 68
 9 135 11 133 23 124 24 123 33 111 35 109
 108 38 106 40 94 49 93 50 84 62 82 64
 113 31 115 29 127 20 128 19 137 7 139 5
 28 118 26 120 14 129 13 130 4 142 2 144

17281/

1 141 3 143 15 132 16 131 27 119 25 117
 140 8 138 6 126 17 125 18 114 30 116 32
 81 61 83 63 95 52 96 51 107 39 105 37
 36 112 34 110 22 121 21 122 10 134 12 136
 77 65 79 67 91 56 92 55 103 43 101 41
 100 48 98 46 86 57 85 58 74 70 76 72
 73 69 75 71 87 60 88 59 99 47 97 45
 104 44 102 42 90 53 89 54 78 66 80 68
 9 133 11 135 23 124 24 123 35 111 33 109
 108 40 106 38 94 49 93 50 82 62 84 64
 113 29 115 31 127 20 128 19 139 7 137 5
 28 120 26 118 14 129 13 130 2 142 4 144

20161/

1 132 3 143 15 141 25 131 27 119 16 117
 140 17 138 6 126 8 116 18 114 30 125 32
 81 52 83 63 95 61 105 51 107 39 96 37
 36 121 34 110 22 112 12 122 10 134 21 136
 77 56 79 67 91 65 101 55 103 43 92 41
 100 57 98 46 86 48 76 58 74 70 85 72
 73 60 75 71 87 69 97 59 99 47 88 45
 104 53 102 42 90 44 80 54 78 66 89 68
 9 124 11 135 23 133 33 123 35 111 24 109
 108 49 106 38 94 40 84 50 82 62 93 64
 113 20 115 31 127 29 137 19 139 7 128 5
 28 129 26 118 14 120 4 130 2 142 13 144

23041/

1 131 3 143 16 141 25 132 27 119 15 117
 140 18 138 6 125 8 116 17 114 30 126 32
 81 51 83 63 96 61 105 52 107 39 95 37
 36 122 34 110 21 112 12 121 10 134 22 136
 77 55 79 67 92 65 101 56 103 43 91 41
 100 58 98 46 85 48 76 57 74 70 86 72
 73 59 75 71 88 69 97 60 99 47 87 45
 104 54 102 42 89 44 80 53 78 66 90 68
 9 123 11 135 24 133 33 124 35 111 23 109
 108 50 106 38 93 40 84 49 82 62 94 64
 113 19 115 31 128 29 137 20 139 7 127 5
 28 130 26 118 13 120 4 129 2 142 14 144

25921/

1 119 15 143 16 141 25 132 27 131 3 117
 140 30 126 6 125 8 116 17 114 18 138 32
 81 39 95 63 96 61 105 52 107 51 83 37
 36 134 22 110 21 112 12 121 10 122 34 136
 77 43 91 67 92 65 101 56 103 55 79 41
 100 70 86 46 85 48 76 57 74 58 98 72
 73 47 87 71 88 69 97 60 99 59 75 45
 104 66 90 42 89 44 80 53 78 54 102 68
 9 111 23 135 24 133 33 124 35 123 11 109
 108 62 94 38 93 40 84 49 82 50 106 64
 113 7 127 31 128 29 137 20 139 19 115 5
 28 142 14 118 13 120 4 129 2 130 26 144

- 28800/ (n1, n12)=(1, 116):

28800/ (n1, n12)=(1, 115):

28801/
 1 143 3 135 19 134 20 133 21 117 29 115
 141 5 139 13 123 14 122 15 121 31 113 33
 79 65 81 57 97 56 98 55 99 39 107 37
 36 110 34 118 18 119 17 120 16 136 8 138
 76 68 78 60 94 59 95 58 96 42 104 40
 102 44 100 52 84 53 83 54 82 70 74 72
 73 71 75 63 91 62 92 61 93 45 101 43
 105 41 103 49 87 50 86 51 85 67 77 69
 7 137 9 129 25 128 26 127 27 111 35 109
 108 38 106 46 90 47 89 48 88 64 80 66
 112 32 114 24 130 23 131 22 132 6 140 4
 30 116 28 124 12 125 11 126 10 142 2 144

31681/
 1 135 3 143 19 134 20 133 29 117 21 115
 141 13 139 5 123 14 122 15 113 31 121 33
 79 57 81 65 97 56 98 55 107 39 99 37
 36 118 34 110 18 119 17 120 8 136 16 138
 76 60 78 68 94 59 95 58 104 42 96 40
 102 52 100 44 84 53 83 54 74 70 82 72
 73 63 75 71 91 62 92 61 101 45 93 43
 105 49 103 41 87 50 86 51 77 67 85 69
 7 129 9 137 25 128 26 127 35 111 27 109
 108 46 106 38 90 47 89 48 80 64 88 66
 112 24 114 32 130 23 131 22 140 6 132 4
 30 124 28 116 12 125 11 126 2 142 10 144

34561/
 1 134 3 143 19 135 21 133 29 117 20 115
 141 14 139 5 123 13 121 15 113 31 122 33
 79 56 81 65 97 57 99 55 107 39 98 37
 36 119 34 110 18 118 16 120 8 136 17 138
 76 59 78 68 94 60 96 58 104 42 95 40
 102 53 100 44 84 52 82 54 74 70 83 72
 73 62 75 71 91 63 93 61 101 45 92 43
 105 50 103 41 87 49 85 51 77 67 86 69
 7 128 9 137 25 129 27 127 35 111 26 109
 108 47 106 38 90 46 88 48 80 64 89 66
 112 23 114 32 130 24 132 22 140 6 131 4
 30 125 28 116 12 124 10 126 2 142 11 144

37441/
 1 133 3 143 20 135 21 134 29 117 19 115
 141 15 139 5 122 13 121 14 113 31 123 33
 79 55 81 65 98 57 99 56 107 39 97 37
 36 120 34 110 17 118 16 119 8 136 18 138
 76 58 78 68 95 60 96 59 104 42 94 40
 102 54 100 44 83 52 82 53 74 70 84 72
 73 61 75 71 92 63 93 62 101 45 91 43
 105 51 103 41 86 49 85 50 77 67 87 69
 7 127 9 137 26 129 27 128 35 111 25 109
 108 48 106 38 89 46 88 47 80 64 90 66
 112 22 114 32 131 24 132 23 140 6 130 4
 30 126 28 116 11 124 10 125 2 142 12 144

40321/
 1 117 19 143 20 135 21 134 29 133 3 115
 141 31 123 5 122 13 121 14 113 15 139 33
 79 39 97 65 98 57 99 56 107 55 81 37
 36 136 18 110 17 118 16 119 8 120 34 138
 76 42 94 68 95 60 96 59 104 58 78 40
 102 70 84 44 83 52 82 53 74 54 100 72
 73 45 91 71 92 63 93 62 101 61 75 43
 105 67 87 41 86 49 85 50 77 51 103 69
 7 111 25 137 26 129 27 128 35 127 9 109
 108 64 90 38 89 46 88 47 80 48 106 66
 112 6 130 32 131 24 132 23 140 22 114 4
 30 142 12 116 11 124 10 125 2 126 28 144

43200/ (n1, n12)=(1, 114):

43200/ (n1, n12)=(1, 113):

43200/ (n1, n12)=(1, 112):

43200/ (n1, n12)=(1, 111):

43201/
 1 141 7 135 19 132 22 129 25 117 31 111
 143 5 137 11 125 14 122 17 119 29 113 35
 75 67 81 61 93 58 96 55 99 43 105 37
 36 112 30 118 18 121 15 124 12 136 6 142
 74 68 80 62 92 59 95 56 98 44 104 38
 106 42 100 48 88 51 85 54 82 66 76 72
 73 69 79 63 91 60 94 57 97 45 103 39
 107 41 101 47 89 50 86 53 83 65 77 71
 3 139 9 133 21 130 24 127 27 115 33 109
 108 40 102 46 90 49 87 52 84 64 78 70
 110 32 116 26 128 23 131 20 134 8 140 2
 34 114 28 120 16 123 13 126 10 138 4 144

46081/
 1 135 7 141 19 132 22 129 31 117 25 111
 143 11 137 5 125 14 122 17 113 29 119 35
 75 61 81 67 93 58 96 55 105 43 99 37
 36 118 30 112 18 121 15 124 6 136 12 142
 74 62 80 68 92 59 95 56 104 44 98 38
 106 48 100 42 88 51 85 54 76 66 82 72
 73 63 79 69 91 60 94 57 103 45 97 39
 107 47 101 41 89 50 86 53 77 65 83 71
 3 133 9 139 21 130 24 127 33 115 27 109
 108 46 102 40 90 49 87 52 78 64 84 70
 110 26 116 32 128 23 131 20 140 8 134 2
 34 120 28 114 16 123 13 126 4 138 10 144

48961/
 1 132 7 141 19 135 25 129 31 117 22 111
 143 14 137 5 125 11 119 17 113 29 122 35
 75 58 81 67 93 61 99 55 105 43 96 37
 36 121 30 112 18 118 12 124 6 136 15 142
 74 59 80 68 92 62 98 56 104 44 95 38
 106 51 100 42 88 48 82 54 76 66 85 72
 73 60 79 69 91 63 97 57 103 45 94 39
 107 50 101 41 89 47 83 53 77 65 86 71
 3 130 9 139 21 133 27 127 33 115 24 109
 108 49 102 40 90 46 84 52 78 64 87 70
 110 23 116 32 128 26 134 20 140 8 131 2
 34 123 28 114 16 120 10 126 4 138 13 144

51841/
 1 129 7 141 22 135 25 132 31 117 19 111
 143 17 137 5 122 11 119 14 113 29 125 35
 75 55 81 67 96 61 99 58 105 43 93 37
 36 124 30 112 15 118 12 121 6 136 18 142
 74 56 80 68 95 62 98 59 104 44 92 38
 106 54 100 42 85 48 82 51 76 66 88 72
 73 57 79 69 94 63 97 60 103 45 91 39
 107 53 101 41 86 47 83 50 77 65 89 71
 3 127 9 139 24 133 27 130 33 115 21 109
 108 52 102 40 87 46 84 49 78 64 90 70
 110 20 116 32 131 26 134 23 140 8 128 2
 34 126 28 114 13 120 10 123 4 138 16 144

54721/

1 117 19 141 22 135 25 132 31 129 7 111
 143 29 125 5 122 11 119 14 113 17 137 35
 75 43 93 67 96 61 99 58 105 55 81 37
 36 136 18 112 15 118 12 121 6 124 30 142
 74 44 92 68 95 62 98 59 104 56 80 38
 106 66 88 42 85 48 82 51 76 54 100 72
 73 45 91 69 94 63 97 60 103 57 79 39
 107 65 89 41 86 47 83 50 77 53 101 71
 3 115 21 139 24 133 27 130 33 127 9 109
 108 64 90 40 87 46 84 49 78 52 102 70
 110 8 128 32 131 26 134 23 140 20 116 2
 34 138 16 114 13 120 10 123 4 126 28 144

57600/ (n1, n12)=(1, 110):
 57600/ (n1, n12)=(1, 109):

57601/

1 143 3 141 19 128 20 127 33 111 35 109
 140 6 138 8 122 21 121 22 108 38 106 40
 97 47 99 45 115 32 116 31 129 15 131 13
 44 102 42 104 26 117 25 118 12 134 10 136
 61 83 63 81 79 68 80 67 93 51 95 49
 92 54 90 56 74 69 73 70 60 86 58 88
 57 87 59 85 75 72 76 71 89 55 91 53
 96 50 94 52 78 65 77 66 64 82 62 84
 9 135 11 133 27 120 28 119 41 103 43 101
 132 14 130 16 114 29 113 30 100 46 98 48
 105 39 107 37 123 24 124 23 137 7 139 5
 36 110 34 112 18 125 17 126 4 142 2 144

60481/

1 141 3 143 19 128 20 127 35 111 33 109
 140 8 138 6 122 21 121 22 106 38 108 40
 97 45 99 47 115 32 116 31 131 15 129 13
 44 104 42 102 26 117 25 118 10 134 12 136
 61 81 63 83 79 68 80 67 95 51 93 49
 92 56 90 54 74 69 73 70 58 86 60 88
 57 85 59 87 75 72 76 71 91 55 89 53
 96 52 94 50 78 65 77 66 62 82 64 84
 9 133 11 135 27 120 28 119 43 103 41 101
 132 16 130 14 114 29 113 30 98 46 100 48
 105 37 107 39 123 24 124 23 139 7 137 5
 36 112 34 110 18 125 17 126 2 142 4 144

63361/

1 128 3 143 19 141 33 127 35 111 20 109
 140 21 138 6 122 8 108 22 106 38 121 40
 97 32 99 47 115 45 129 31 131 15 116 13
 44 117 42 102 26 104 12 118 10 134 25 136
 61 68 63 83 79 81 93 67 95 51 80 49
 92 69 90 54 74 56 60 70 58 86 73 88
 57 72 59 87 75 85 89 71 91 55 76 53
 96 65 94 50 78 52 64 66 62 82 77 84
 9 120 11 135 27 133 41 119 43 103 28 101
 132 29 130 14 114 16 100 30 98 46 113 48
 105 24 107 39 123 37 137 23 139 7 124 5
 36 125 34 110 18 112 4 126 2 142 17 144

66241/

1 127 3 143 20 141 33 128 35 111 19 109
 140 22 138 6 121 8 108 21 106 38 122 40
 97 31 99 47 116 45 129 32 131 15 115 13
 44 118 42 102 25 104 12 117 10 134 26 136
 61 67 63 83 80 81 93 68 95 51 79 49
 92 70 90 54 73 56 60 69 58 86 74 88
 57 71 59 87 76 85 89 72 91 55 75 53
 96 66 94 50 77 52 64 65 62 82 78 84
 9 119 11 135 28 133 41 120 43 103 27 101
 132 30 130 14 113 16 100 29 98 46 114 48
 105 23 107 39 124 37 137 24 139 7 123 5
 36 126 34 110 17 112 4 125 2 142 18 144

69121/

1 111 19 143 20 141 33 128 35 127 3 109
 140 38 122 6 121 8 108 21 106 22 138 40
 97 15 115 47 116 45 129 32 131 31 99 13
 44 134 26 102 25 104 12 117 10 118 42 136
 61 51 79 83 80 81 93 68 95 67 63 49
 92 86 74 54 73 56 60 69 58 70 90 88
 57 55 75 87 76 85 89 72 91 71 59 53
 96 82 78 50 77 52 64 65 62 66 94 84
 9 103 27 135 28 133 41 120 43 119 11 101
 132 46 114 14 113 16 100 29 98 30 130 48
 105 7 123 39 124 37 137 24 139 23 107 5
 36 142 18 110 17 112 4 125 2 126 34 144

72000/ (n1, n12)=(1, 108):
 72000/ (n1, n12)=(1, 107):
 72000/ (n1, n12)=(1, 106):

72001/

1 143 3 132 25 131 26 130 27 108 38 106
 141 5 139 16 117 17 116 18 115 40 104 42
 97 47 99 36 121 35 122 34 123 12 134 10
 45 101 43 112 21 113 20 114 19 136 8 138
 58 86 60 75 82 74 83 73 84 51 95 49
 93 53 91 64 69 65 68 66 67 88 56 90
 55 89 57 78 79 77 80 76 81 54 92 52
 96 50 94 61 72 62 71 63 70 85 59 87
 7 137 9 126 31 125 32 124 33 102 44 100
 135 11 133 22 111 23 110 24 109 46 98 48
 103 41 105 30 127 29 128 28 129 6 140 4
 39 107 37 118 15 119 14 120 13 142 2 144

74881/

1 132 3 143 25 131 26 130 38 108 27 106
 141 16 139 5 117 17 116 18 104 40 115 42
 97 36 99 47 121 35 122 34 134 12 123 10
 45 112 43 101 21 113 20 114 8 136 19 138
 58 75 60 86 82 74 83 73 95 51 84 49
 93 64 91 53 69 65 68 66 56 88 67 90
 55 78 57 89 79 77 80 76 92 54 81 52
 96 61 94 50 72 62 71 63 59 85 70 87
 7 126 9 137 31 125 32 124 44 102 33 100
 135 22 133 11 111 23 110 24 98 46 109 48
 103 30 105 41 127 29 128 28 140 6 129 4
 39 118 37 107 15 119 14 120 2 142 13 144

77761/

1 131 3 143 25 132 27 130 38 108 26 106
 141 17 139 5 117 16 115 18 104 40 116 42
 97 35 99 47 121 36 123 34 134 12 122 10
 45 113 43 101 21 112 19 114 8 136 20 138
 58 74 60 86 82 75 84 73 95 51 83 49
 93 65 91 53 69 64 67 66 56 88 68 90
 55 77 57 89 79 78 81 76 92 54 80 52
 96 62 94 50 72 61 70 63 59 85 71 87
 7 125 9 137 31 126 33 124 44 102 32 100
 135 23 133 11 111 22 109 24 98 46 110 48
 103 29 105 41 127 30 129 28 140 6 128 4
 39 119 37 107 15 118 13 120 2 142 14 144

80641/

1 130 3 143 26 132 27 131 38 108 25 106
 141 18 139 5 116 16 115 17 104 40 117 42
 97 34 99 47 122 36 123 35 134 12 121 10
 45 114 43 101 20 112 19 113 8 136 21 138
 58 73 60 86 83 75 84 74 95 51 82 49
 93 66 91 53 68 64 67 65 56 88 69 90
 55 76 57 89 80 78 81 77 92 54 79 52
 96 63 94 50 71 61 70 62 59 85 72 87
 7 124 9 137 32 126 33 125 44 102 31 100
 135 24 133 11 110 22 109 23 98 46 111 48
 103 28 105 41 128 30 129 29 140 6 127 4
 39 120 37 107 14 118 13 119 2 142 15 144

83521/

1 108 25 143 26 132 27 131 38 130 3 106
 141 40 117 5 116 16 115 17 104 18 139 42
 97 12 121 47 122 36 123 35 134 34 99 10
 45 136 21 101 20 112 19 113 8 114 43 138
 58 51 82 86 83 75 84 74 95 73 60 49
 93 88 69 53 68 64 67 65 56 66 91 90
 55 54 79 89 80 78 81 77 92 76 57 52
 96 85 72 50 71 61 70 62 59 63 94 87
 7 102 31 137 32 126 33 125 44 124 9 100
 135 46 111 11 110 22 109 23 98 24 133 48
 103 6 127 41 128 30 129 29 140 28 105 4
 39 142 15 107 14 118 13 119 2 120 37 144

- 86400/ (n1, n12)=(1, 105):
- 86400/ (n1, n12)=(1, 104):
- 86400/ (n1, n12)=(1, 103):
- 86400/ (n1, n12)=(1, 102):
- 86400/ (n1, n12)=(1, 101):
- 86400/ (n1, n12)=(1, 100):

86401/

1 140 9 132 25 128 29 124 33 108 41 100
 143 6 135 14 119 18 115 22 111 38 103 46
 97 44 105 36 121 32 125 28 129 12 137 4
 47 102 39 110 23 114 19 118 15 134 7 142
 52 89 60 81 76 77 80 73 84 57 92 49
 95 54 87 62 71 66 67 70 63 86 55 94
 51 90 59 82 75 78 79 74 83 58 91 50
 96 53 88 61 72 65 68 69 64 85 56 93
 3 138 11 130 27 126 31 122 35 106 43 98
 141 8 133 16 117 20 113 24 109 40 101 48
 99 42 107 34 123 30 127 26 131 10 139 2
 45 104 37 112 21 116 17 120 13 136 5 144

89281/

1 132 9 140 25 128 29 124 41 108 33 100
 143 14 135 6 119 18 115 22 103 38 111 46
 97 36 105 44 121 32 125 28 137 12 129 4
 47 110 39 102 23 114 19 118 7 134 15 142
 52 81 60 89 76 77 80 73 92 57 84 49
 95 62 87 54 71 66 67 70 55 86 63 94
 51 82 59 90 75 78 79 74 91 58 83 50
 96 61 88 53 72 65 68 69 56 85 64 93
 3 130 11 138 27 126 31 122 43 106 35 98
 141 16 133 8 117 20 113 24 101 40 109 48
 99 34 107 42 123 30 127 26 139 10 131 2
 45 112 37 104 21 116 17 120 5 136 13 144

92161/

1 128 9 140 25 132 33 124 41 108 29 100
 143 18 135 6 119 14 111 22 103 38 115 46
 97 32 105 44 121 36 129 28 137 12 125 4
 47 114 39 102 23 110 15 118 7 134 19 142
 52 77 60 89 76 81 84 73 92 57 80 49
 95 66 87 54 71 62 63 70 55 86 67 94
 51 78 59 90 75 82 83 74 91 58 79 50
 96 65 88 53 72 61 64 69 56 85 68 93
 3 126 11 138 27 130 35 122 43 106 31 98
 141 20 133 8 117 16 109 24 101 40 113 48
 99 30 107 42 123 34 131 26 139 10 127 2
 45 116 37 104 21 112 13 120 5 136 17 144

95041/

1 124 9 140 29 132 33 128 41 108 25 100
 143 22 135 6 115 14 111 18 103 38 119 46
 97 28 105 44 125 36 129 32 137 12 121 4
 47 118 39 102 19 110 15 114 7 134 23 142
 52 73 60 89 80 81 84 77 92 57 76 49
 95 70 87 54 67 62 63 66 55 86 71 94
 51 74 59 90 79 82 83 78 91 58 75 50
 96 69 88 53 68 61 64 65 56 85 72 93
 3 122 11 138 31 130 35 126 43 106 27 98
 141 24 133 8 113 16 109 20 101 40 117 48
 99 26 107 42 127 34 131 30 139 10 123 2
 45 120 37 104 17 112 13 116 5 136 21 144

97921/

1 108 25 140 29 132 33 128 41 124 9 100
 143 38 119 6 115 14 111 18 103 22 135 46
 97 12 121 44 125 36 129 32 137 28 105 4
 47 134 23 102 19 110 15 114 7 118 39 142
 52 57 76 89 80 81 84 77 92 73 60 49
 95 86 71 54 67 62 63 66 55 70 87 94
 51 58 75 90 79 82 83 78 91 74 59 50
 96 85 72 53 68 61 64 65 56 69 88 93
 3 106 27 138 31 130 35 126 43 122 11 98
 141 40 117 8 113 16 109 20 101 24 133 48
 99 10 123 42 127 34 131 30 139 26 107 2
 45 136 21 104 17 112 13 116 5 120 37 144

100800/ (n1, n12)=(1, 99): 100800/ (n1, n12)=(1, 98):
 100800/ (n1, n12)=(1, 97): 100800/ (n1, n12)=(1, 96):
 100800/ (n1, n12)=(1, 95): 100800/ (n1, n12)=(1, 94):
 100800/ (n1, n12)=(1, 93): 100800/ (n1, n12)=(1, 92):
 100800/ (n1, n12)=(1, 91): 100800/ (n1, n12)=(1, 90):
 100800/ (n1, n12)=(1, 89): 100800/ (n1, n12)=(1, 88):
 100800/ (n1, n12)=(1, 87): 100800/ (n1, n12)=(1, 86):
 100800/ (n1, n12)=(1, 85): 100800/ (n1, n12)=(1, 84):
 100800/ (n1, n12)=(1, 83): 100800/ (n1, n12)=(1, 82):
 100800/ (n1, n12)=(1, 81): 100800/ (n1, n12)=(1, 80):
 100800/ (n1, n12)=(1, 79): 100800/ (n1, n12)=(1, 78):
 100800/ (n1, n12)=(1, 77): 100800/ (n1, n12)=(1, 76):
 100800/ (n1, n12)=(1, 75): 100800/ (n1, n12)=(1, 74):
 100800/ (n1, n12)=(1, 73):

[Count of Solutions with n1=1: 100800]

100800/ (n1, n12)=(2, 142):
 100800/ (n1, n12)=(2, 141):
 100800/ (n1, n12)=(2, 140):
 100800/ (n1, n12)=(2, 139):
 100800/ (n1, n12)=(2, 138):
 100800/ (n1, n12)=(2, 137):
 100800/ (n1, n12)=(2, 136):
 100800/ (n1, n12)=(2, 135):
 100800/ (n1, n12)=(2, 134):

100801/										103681/													
2	144	4	142	5	138	6	137	10	136	12	134	2	142	4	144	5	138	6	137	12	136	10	134
131	13	129	15	128	19	127	20	123	21	121	23	131	15	129	13	128	19	127	20	121	21	123	23
98	48	100	46	101	42	102	41	106	40	108	38	98	46	100	48	101	42	102	41	108	40	106	38
35	109	33	111	32	115	31	116	27	117	25	119	35	111	33	109	32	115	31	116	25	117	27	119
86	60	88	58	89	54	90	53	94	52	96	50	86	58	88	60	89	54	90	53	96	52	94	50
83	61	81	63	80	67	79	68	75	69	73	71	83	63	81	61	80	67	79	68	73	69	75	71
74	72	76	70	77	66	78	65	82	64	84	62	74	70	76	72	77	66	78	65	84	64	82	62
95	49	93	51	92	55	91	56	87	57	85	59	95	51	93	49	92	55	91	56	85	57	87	59
26	120	28	118	29	114	30	113	34	112	36	110	26	118	28	120	29	114	30	113	36	112	34	110
107	37	105	39	104	43	103	44	99	45	97	47	107	39	105	37	104	43	103	44	97	45	99	47
122	24	124	22	125	18	126	17	130	16	132	14	122	22	124	24	125	18	126	17	132	16	130	14
11	133	9	135	8	139	7	140	3	141	1	143	11	135	9	133	8	139	7	140	1	141	3	143

106561/										109441/													
2	138	4	144	5	142	10	137	12	136	6	134	2	137	4	144	6	142	10	138	12	136	5	134
131	19	129	13	128	15	123	20	121	21	127	23	131	20	129	13	127	15	123	19	121	21	128	23
98	42	100	48	101	46	106	41	108	40	102	38	98	41	100	48	102	46	106	42	108	40	101	38
35	115	33	109	32	111	27	116	25	117	31	119	35	116	33	109	31	111	27	115	25	117	32	119
86	54	88	60	89	58	94	53	96	52	90	50	86	53	88	60	90	58	94	54	96	52	89	50
83	67	81	61	80	63	75	68	73	69	79	71	83	68	81	61	79	63	75	67	73	69	80	71
74	66	76	72	77	70	82	65	84	64	78	62	74	65	76	72	78	70	82	66	84	64	77	62
95	55	93	49	92	51	87	56	85	57	91	59	95	56	93	49	91	51	87	55	85	57	92	59
26	114	28	120	29	118	34	113	36	112	30	110	26	113	28	120	30	118	34	114	36	112	29	110
107	43	105	37	104	39	99	44	97	45	103	47	107	44	105	37	103	39	99	43	97	45	104	47
122	18	124	24	125	22	130	17	132	16	126	14	122	17	124	24	126	22	130	18	132	16	125	14
11	139	9	133	8	135	3	140	1	141	7	143	11	140	9	133	7	135	3	139	1	141	8	143

112321/											
2	136	5	144	6	142	10	138	12	137	4	134
131	21	128	13	127	15	123	19	121	20	129	23
98	40	101	48	102	46	106	42	108	41	100	38
35	117	32	109	31	111	27	115	25	116	33	119
86	52	89	60	90	58	94	54	96	53	88	50
83	69	80	61	79	63	75	67	73	68	81	71
74	64	77	72	78	70	82	66	84	65	76	62
95	57	92	49	91	51	87	55	85	56	93	59
26	112	29	120	30	118	34	114	36	113	28	110
107	45	104	37	103	39	99	43	97	44	105	47
122	16	125	24	126	22	130	18	132	17	124	14
11	141	8	133	7	135	3	139	1	140	9	143

115200/ (n1, n12)=(2, 133):
 115200/ (n1, n12)=(2, 132):

[Total Count of Standard Solutions: 3628800]

$n_1=1$ のタイプの解 100800 個を全部数え上げるのにわずか数時間しかかからなかった。標準解の総数は、 $2 \times 144 \div 8$ 倍して、3628800 個あるものと推測される。三連立型正方連結対称汎八方陣の時は、標準解の総数が 5760 個だったから、えらい違いだ。しかし、それでもこれは極めて希少な解集合だと思われる。

8. まさか標準解の総数がわかるとは、最初は考えもしなかった。とんだ夢がかなったものだ。大変に満足している。あとは、致命的エラーが無いことを祈るのみ。

それにしても、正方連結汎対称十二方陣内部の緊密な構造には、何度体験しても、強い感銘を受ける。この構造あればこそ、解の総数を数え上げることができたのだろう。

ミゲル (・A・アメラ氏) は、 $n_{12} < n_{133}$ として数え始めたらしいが、このやり方だと、 $n_{12}=12$, $n_{133}=133$ の時に現れる最初の解に出会うまでに、いささか時間がかかり過ぎる。余りに長時間待たされると、途中で不安に駆られ計数をストップしてしまいやすい。

私の場合は、 $n_{12} > n_{133}$ として始めたために、 $n_{12}=133$, $n_{133}=12$ の時に現れる最初の解にいち早く出会うことができた。解が1つでも出てくれれば、妙に自信がつくものだ。その後のプログラムの開発・改良も順調に進んだ。幸運と言うべきだろう。(もう一つには、自分の変な癖のおかげがある。私には、数1の隣にいつも大きな数を置く癖がある。)

n_{12} には、133 から 100 までの間で、7つの値しか入らない ($n_{12} < n_{133}$ とした場合には12 から 45 までの間に7通り)。他の値では目的方陣を構成することができない。そして、何故7通りで、それしか無いのかの説明が付かない。いま研究中ではあるが、五里霧中で、答がすぐにも見つかりそうな感じがしない。作戦もない。これは、今後の宿題である。

ミゲルは、今「フランクリン方陣」や「メビウス方陣」を研究している。その途中で三連立型の正方連結対称汎対角線方陣が大切なリンクの1つになっているのだと言う。

ニュータイプの方陣にはおよそ興味の無い私にはチンプンカンプンの話だが、十二方陣完成の報告をメールでしたら、大変に喜んでくれた。お礼に十六方陣の作例を送ってくれた。世の中にはめげずに超高次方陣を研究している仲間が居ると知って驚くとともに、敬愛の念を覚える。私心無く多々激励してくれたことを、ここでミゲルに深く感謝申し上げたい。

(Written on February 2, 2010 by Kanji Setsuda with MacOSX & Xcode3.1.2)

E-Mail Address: jag12001@nifty.com