

## 第2部：『星陣の基礎的研究』Ⅲ：撰田 寛二

### 第7章：三周七星陣の基礎的研究

今までの研究対象は、どれも言わば「二重リング型」の二周星陣ばかりであったが、他のタイプは無いものであろうか？

試みに円周上の  $n$  等分点を 2 つおきに結び対角線を  $n$  本作る。そして対角線の交点に  $1 \sim 3 * n$  の自然数を全個重複なく欠落なく置いて、各対角線上の 6 数の和を等しくする。

下のように基本図と式で書く方がわりやすいかも知れない。

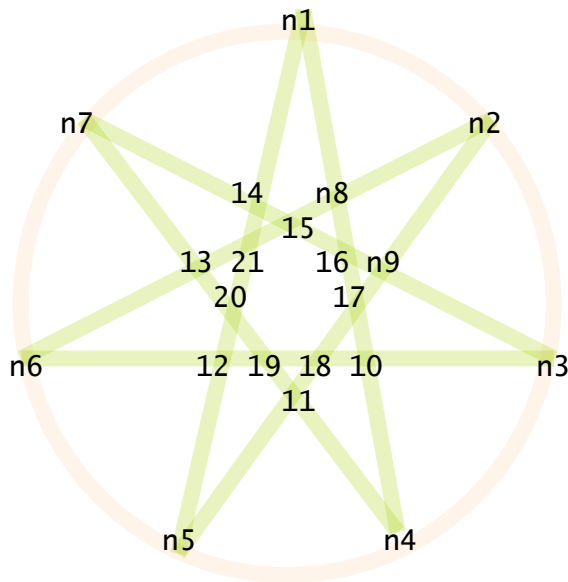
このような星陣は、七次、八次、九次、……では作れるが、六次以下では作れない。

下図を良く見ると、「三重リング型」の三周星陣になっていることがわかる。

6 数の定和は、星陣の次数  $n$  に応じて、関数形 ( $C = 9 * n + 3$ ) で表せる。常に 6 数の定和が求められる点と、定義式で数要素が各 2 度ずつ用いられる点とが、星陣共通の特徴だ。

はたして解はどのようなもので、幾つあるであろうか。

七星陣を手始めに具体的な研究に取りかかろう。



基本図と基本定義式：

$$\begin{aligned} n1+n8+n16+n17+n10+n4 &= C & \dots & sm1 \\ n2+n9+n17+n18+n11+n5 &= C & \dots & sm2 \\ n3+n10+n18+n19+n12+n6 &= C & \dots & sm3 \\ n4+n11+n19+n20+n13+n7 &= C & \dots & sm4 \\ n5+n12+n20+n21+n14+n1 &= C & \dots & sm5 \\ n6+n13+n21+n15+n8+n2 &= C & \dots & sm6 \\ n7+n14+n15+n16+n9+n3 &= C & \dots & sm7 \end{aligned}$$

$sm1+sm2+sm3+sm4+sm5+sm6+sm7$

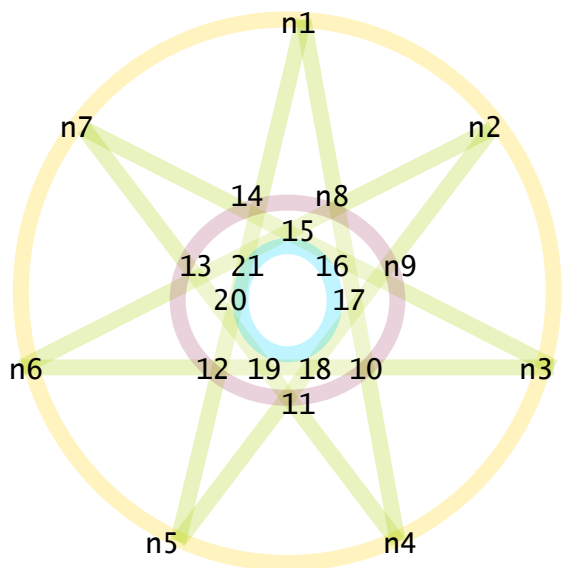
$$2 * (n1+n2+n3+\dots+n20+n21) = 7 * C$$

$$2 * (1+2+3+4+\dots+19+20+21) = 7 * C$$

$$2 * (22 * 21 / 2) = 7 * C$$

$$462 = 7 * C$$

ゆえに  $C = 66$



このタイプの七星陣の場合、自然数  $1 \sim 21$  を重複なく欠落なく全個用いる限り、各対角線上 6 数の和は必ず 66 になる。

しかも、左図のように三重のリングの上に全ての数字がのることがわかる。

基本定義式は、上の 7 式しかない。変数が 21 個もあるのに、連立方程式が 7 本しかない。

これでは、解の全数が膨大になることが予想される。余りに多過ぎても困るので、次のような条件を定義式に加える。

$$\{n1, n2, n3, n4, n5, n6, n7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \dots rg1$$

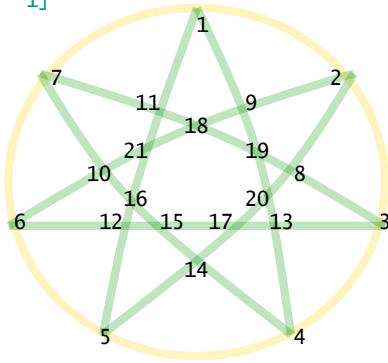
$$\{n8, n9, n10, n11, n12, n13, n14\} = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\} \dots rg2$$

$$\{n15, n16, n17, n18, n19, n20, n21\} = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\} \dots rg3$$

各リング上の 7 数の取り得る値を制限して、外周上には  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  のいずれかが来るようにし、中周上には  $8 \sim 14$ 、内周上には  $15 \sim 21$  の範囲の数が来るようにする。

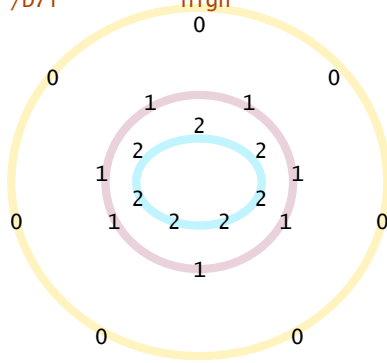
\* 三周七星陣の解のリスト \* ↓

[ 1]

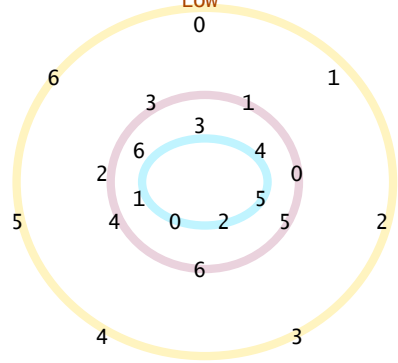


/D7i

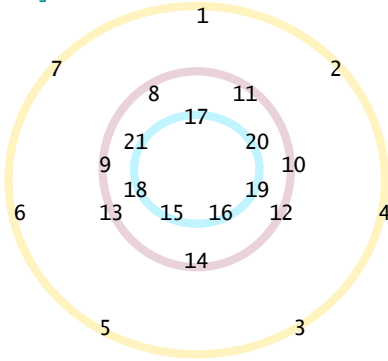
High



Low

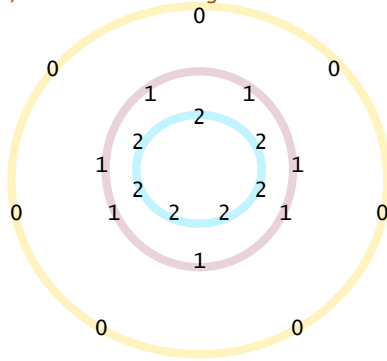


[ 310]

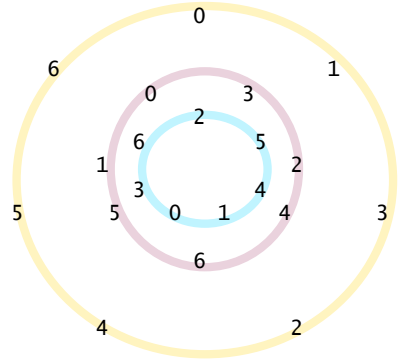


/D7i

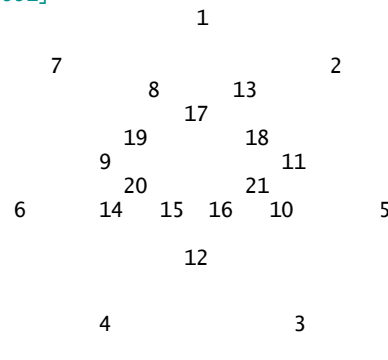
High



Low

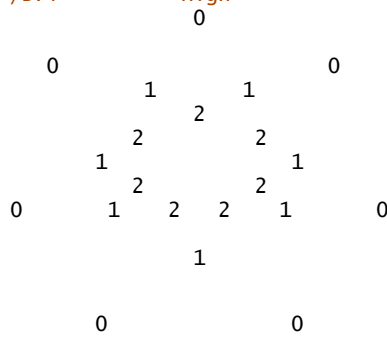


[ 551]

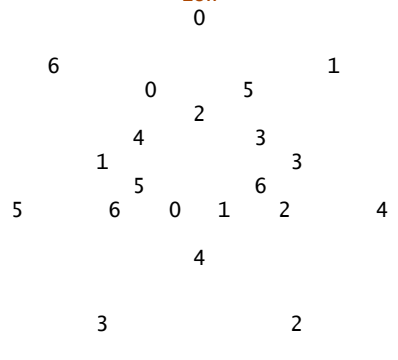


/D7i

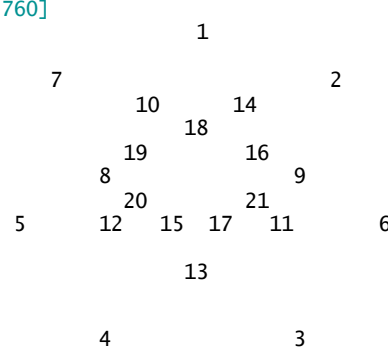
High



Low

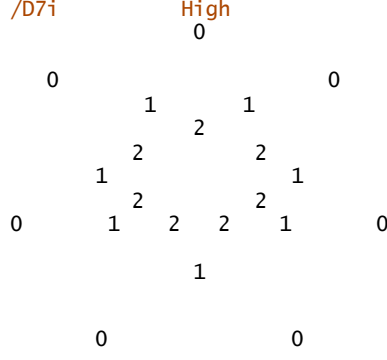


[ 760]

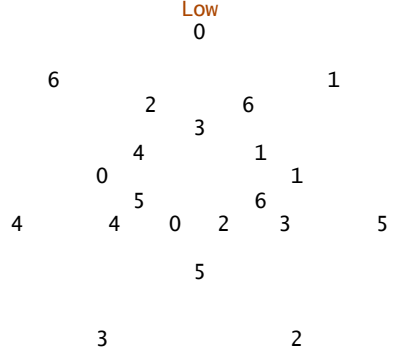


/D7i

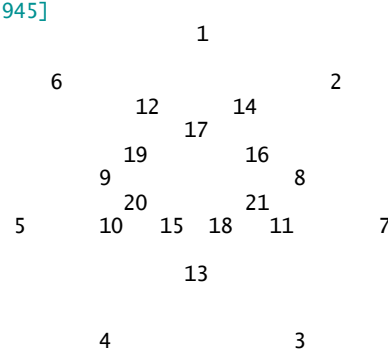
High



Low

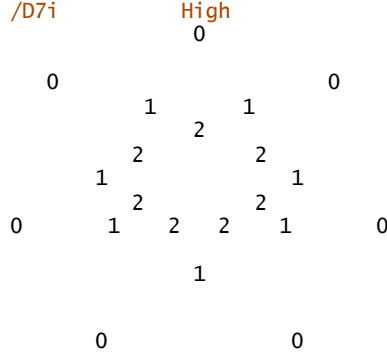


[ 945]

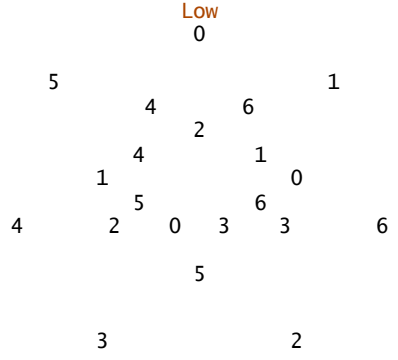


/D7i

High



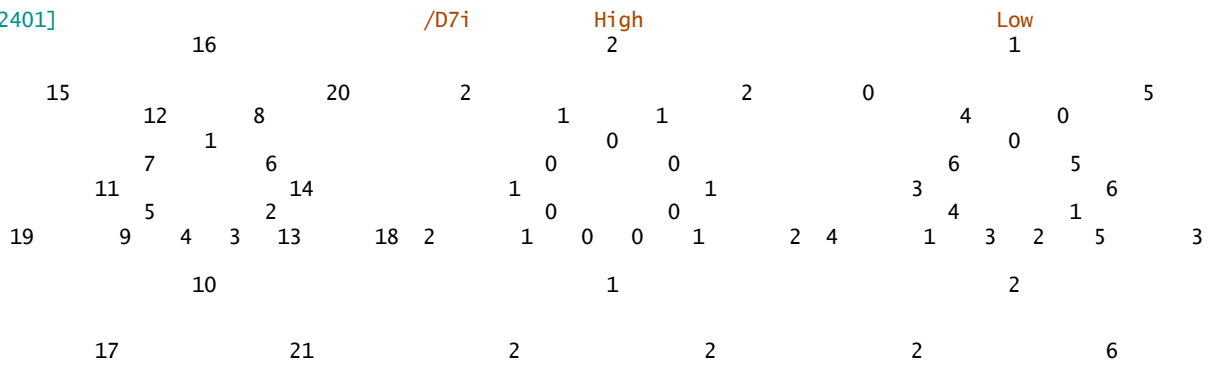
Low



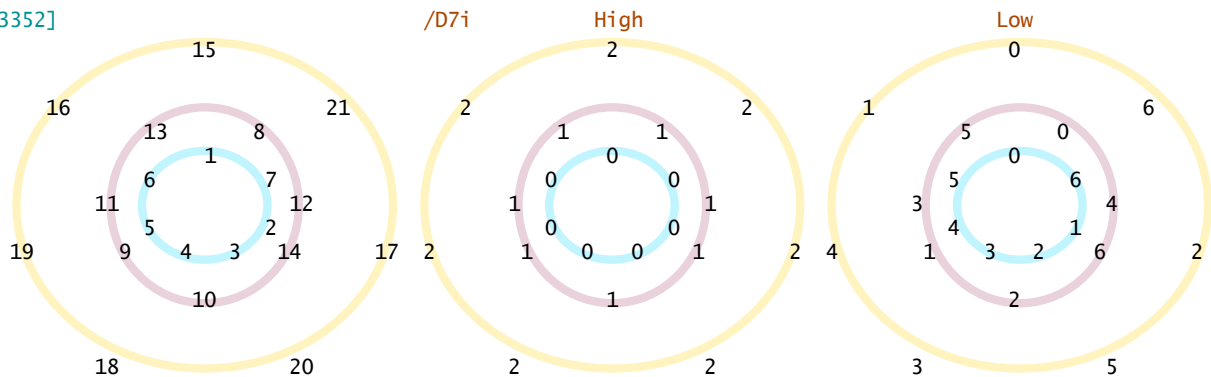




[2401]



[3352]



[Count=4419] OK!

七進法分解図のどんな特徴に気付いたでしょうか。周ごとに詳しく見てほしい。

上位面では、周ごとに値が決まっていて他の値が混じっていない。

一番右側の下位面を見ると、外・中・内周の各7数が {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} (順不同) となっていて、重複も欠落も無い。いわゆる「ラテン型」になっているのである。

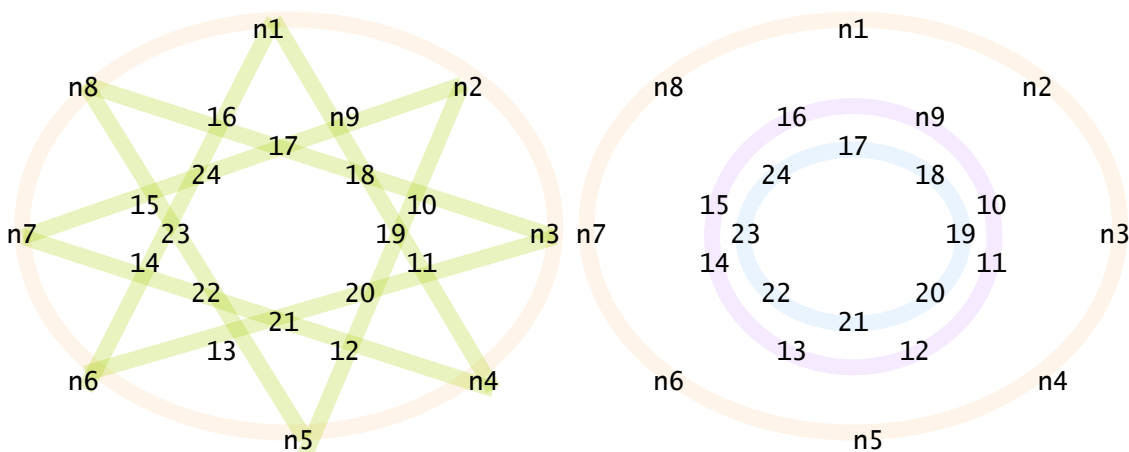
小生は、このような「構造」を美しいと思う。解の総数も比較的少数なので、珍品扱いできる。自分が作るのなら、こういうものをぜひ作りたいと思う。

なお、タイプ1とタイプ2で、解の総数が同じであった。両者の間には、何らかの対称性が成り立っているのではないか。例えば、解相互の間の「変換」が可能だとかいうような。

「構造研究」への意欲を鼓舞されるてえものだ。

## 第8章：三周八星陣の基礎的研究

次に、三重リング型の八星陣を研究してみよう。  
基本図形と基本定義式を次のようにする。



**\* 基本定義式 \***

$n1+n9+n18+n19+n11+n4=C$	... sm1		$sm1+sm2+sm3+sm4+sm5+sm6+sm7+sm8$
$n2+n10+n19+n20+n12+n5=C$	... sm2		$2*(n1+n2+n3+...+n23+n24)=8*C$
$n3+n11+n20+n21+n13+n6=C$	... sm3		$2*(1+2+3+4+...+22+23+24)=8*C$
$n4+n12+n21+n22+n14+n7=C$	... sm4		$2*(25*24/2)=8*C$
$n5+n13+n22+n23+n15+n8=C$	... sm5		$600=8*C$
$n6+n14+n23+n24+n16+n1=C$	... sm6		ゆえに $C=75$
$n7+n15+n24+n17+n9+n2=C$	... sm7		
$n8+n16+n17+n18+n10+n3=C$	... sm8		

2つおきに結んだ対角線は、全部で8本描ける。その交点上に1~24の自然数を重複なく欠落なく全個置く。1本の対角線上には6数あり、その和は定数75に等しくなる。

$$C = 9*n + 3 = 9*8 + 3 = 75$$

このタイプの星陣は、どの次数でも、上右図のように三重リングを構成する。どのリングにも8数がある。ゆえに我々はこれを「三周八星陣」と言う。

変数が24個もあるのに、定義の連立方程式が8本しか無い。これでは、解の総数が必ず膨大になる。扱いかねても困るので、さらに次のような条件を特別に加える。

外周・中周・内周上の各8数について、取り得る数値に制限を加えるのである。

$$\{n1, n2, n3, n4, n5, n6, n7, n8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad \dots rg1$$

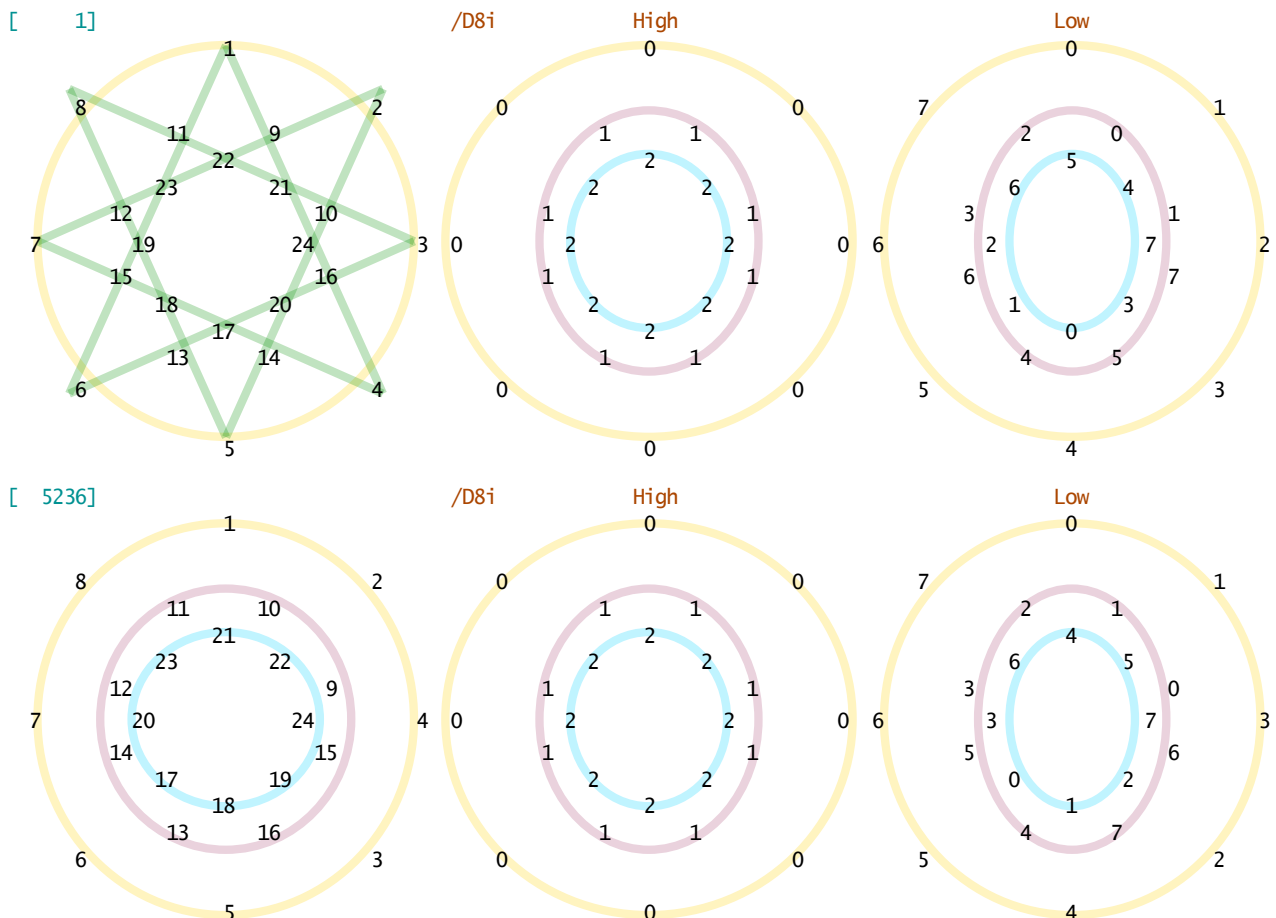
$$\{n9, n10, n11, n12, n13, n14, n15, n16\} = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\} \quad \dots rg2$$

$$\{n17, n18, n19, n20, n21, n22, n23, n24\} = \{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\} \quad \dots rg3$$

こういう手加減を加えるのを潔しとしない人も居るかもしれない。しかし、今回のこの制限条件は決して邪道ではないと、小生は確信する。解のバランスがいかにも美しいから。

また八進法分解図を見ると、下位面が「ラテン型」になっているという理由もある。

**\* 各周の数値を制限した三周八星陣の解のリスト（部分）：タイプ1 \***



[ 9757]

				/D8i	High			Low		
	1				0			0		
8		2		0			7			1
	9	10			1	1		0	1	
		20			2	2		3		
	13	23	21		1	2		6	4	3
7		22	24	5	0	1	2	2	1	0
	14		16		1	2	2	1	0	6
	17	18			1	2	2	1	5	
		19			2	2		0	2	1
6	11	15		3	0	1	1		2	6
								5		2
	4					0			3	

[ 13561]

				/D8i	High			Low		
	1				0			0		
8		2		0			7			1
	13	11			1	1		4	2	
		17			2	2		0		
	14	24	22		1	2		7	5	0
7		20	9	6	0	1	2	2	1	0
	12		23		1	2	2	1	0	6
	19	15			1	2	2	1	3	6
		18	21		2	2		2	4	
	10	16			1	2		1	1	7
5				3	0	1	1		4	2
								0		
	4					0			3	

[ 16369]

				/D8i	High			Low		
	1				0			0		
8		2		0			7			1
	9	13			1	1		0	4	
		21			2	2		4		
	11	22	20		1	2		5	3	
6		23	10	7	0	1	2	1	0	5
	15		24		1	2	2	0	6	7
	17	19	14		1	2	1	6	0	5
		18			2	2		0	2	
	12	16			1	2		1	1	7
5				3	0	1	1		4	2
								0		
	4					0			3	

[ 18819]

				/D8i	High			Low		
	1				0			0		
7		2		0			6			1
	11	12			1	1		2	3	
		18			2	2		1		
	15	22	21		1	2		5	4	
6		23	10	8	0	1	2	1	0	5
	13		24		1	2	2	0	6	7
	17	19	14		1	2	1	4	0	5
		18			2	2		0	2	
	20				2	2		0	3	
	9	16			1	1		0	7	
5				3	0	1	1		4	2
								0		
	4					0			3	

[ 20980]

				/D8i		High				Low	
	1					0				0	
8		12	9	3	0	1	1	0	7	3	0
		22	21			2	2			5	4
	11	23	10			1	2	1		6	1
7	18		24	2	0	2	2	0	6	1	7
	15	19	20			1	2	1		6	7
		17	16			2	2			2	3
	14		13			1	1			5	0
6				4	0			0	5		4
											3
											4

[ 42369]

				/D8i		High				Low	
	1					0				0	
8		13	9	4	0	1	1	0	7	4	0
		18	24			2	2			6	1
	14	23	10			1	2	1		5	7
7	20		22	2	0	2	2	0	6	3	5
	12	17	16			1	2	1		3	7
		21	19			2	2			0	2
	11		15			1	1			2	4
6				3	0			0	5		6
											2
											4

[ 60652]

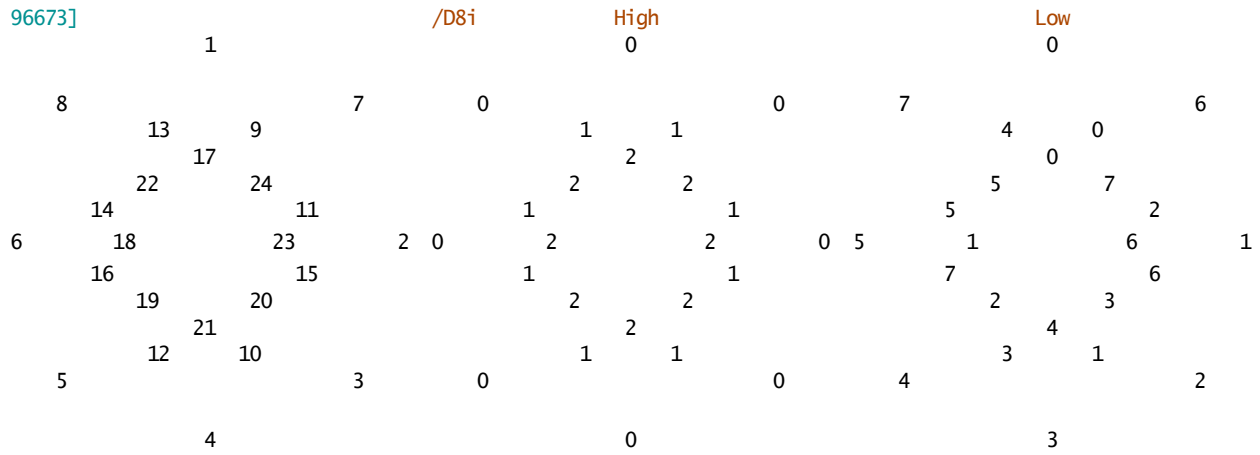
				/D8i		High				Low	
	1					0				0	
8		13	9	5	0	1	1	0	7	4	0
		18	23			2	2			5	1
	14	22	11			1	2	1		5	6
7	17		24	2	0	2	2	0	6	0	7
	16	20	15			1	2	1		7	6
		21	19			2	2			3	4
	12		10			1	1			3	2
6				3	0			0	5		1
											2
											3

[ 79558]

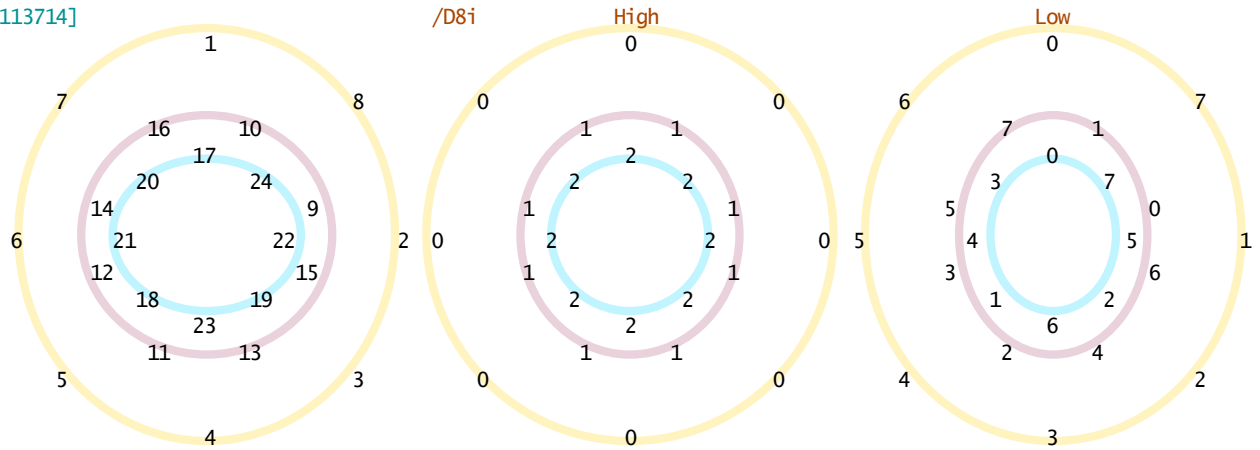
				/D8i		High				Low	
	1					0				0	
8		13	9	6	0	1	1	0	7	4	0
		17	24			2	2			5	0
	14	22	11			1	2	1		5	7
7	18		23	2	0	2	2	0	6	1	6
	16	20	15			1	2	1		7	6
		21	19			2	2			2	4
	12		10			1	1			3	3
5				3	0			0	4		1
											2
											3



[ 96673]



[113714]

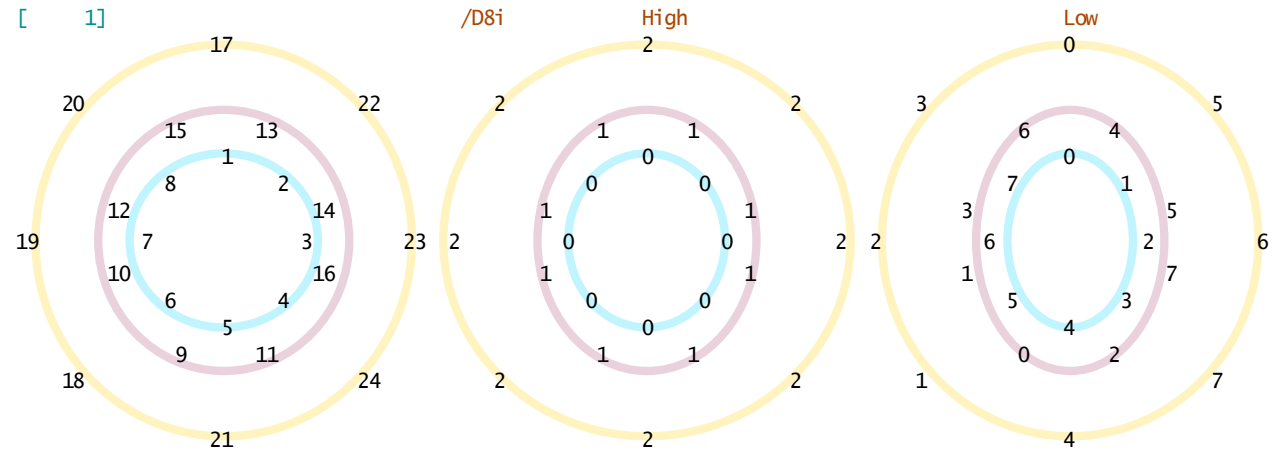


[Count=128700] OK!

各解に逐一八進法分解図を付けておいた。先ず標準解の各数から1を引き、それを8で割る。その整商を真中の上位面に集め、剰余を右端の下位面に集めてある。ご覧の通り、上位面の各周には同じ数値が集まり、他の数値が混じっていない。また下位面では、各周の数値の組合せが {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} (順不同) のパターンに限られていて、重複も欠落も無い。つまり、「ラテン型」なのである。こういう構造は美しいと、小生は思う。解の総数も比較的少なめだ。

次に外周と内周の数値制限を逆の形にした場合の解のリストを示そう。中周はそのままだとしてある。何とこの場合も、同数の解が出て来た。

**\* 外内周の数値制限を逆にした三周八星陣の解のリスト (部分) : タイプ2 \***



[ 11631]

					/D8i		High					Low		
							2					3		
	20													
21				23		2		1	1	2		4		6
		12	11					0	0			3	2	
			1					0	0			0	2	
		8	3					0	0			7	2	
18	14			16			1	0	1			5		7
		7		2	22	2		0	0	2	1	6		1
				15				1	0			0	3	6
	9	6	4					0	0			5	4	
			5					0	0			1	4	
19	10		13		24		2	1	1	2		2		7
									2				0	

[ 24689]

					/D8i		High					Low		
							2					2		
	19													
22				24		2		1	1	2		5		7
		12	11					0	0			3	2	
			1					0	0			0	3	
		8	4					0	0			7	2	
18	13			15			1	0	1			4		6
		7		2	21	2		0	0	2	1	6		1
				16				1	0			0	3	7
	9	6	3					0	0			5	4	
			5					0	0			1	5	
20	10		14		23		2	1	1	2		3		6
									2				0	

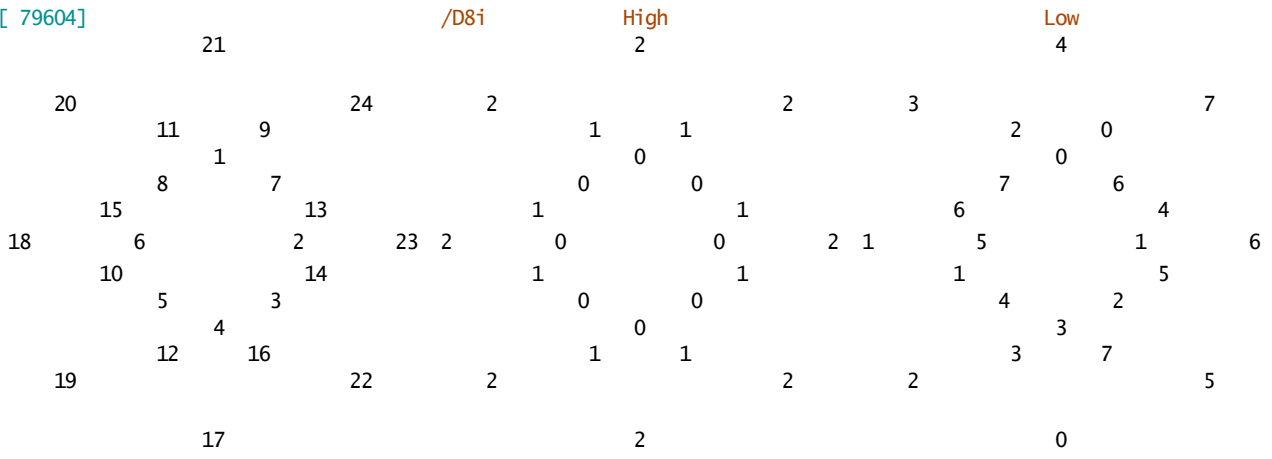
[ 40916]

					/D8i		High					Low		
							2					4		
	21													
18				23		2		1	1	2		1		6
		12	9					0	0			3	0	
			1					0	0			0	4	
		8	5					0	0			7	2	
20	14			15			1	0	1			5		6
		7		2	24	2		0	0	2	3	6		1
				16				1	0			1	3	7
	10	6	3					0	0			1	5	
			4					0	0			5	2	
17	11		13		22		2	1	1	2		0	2	4
									2				2	

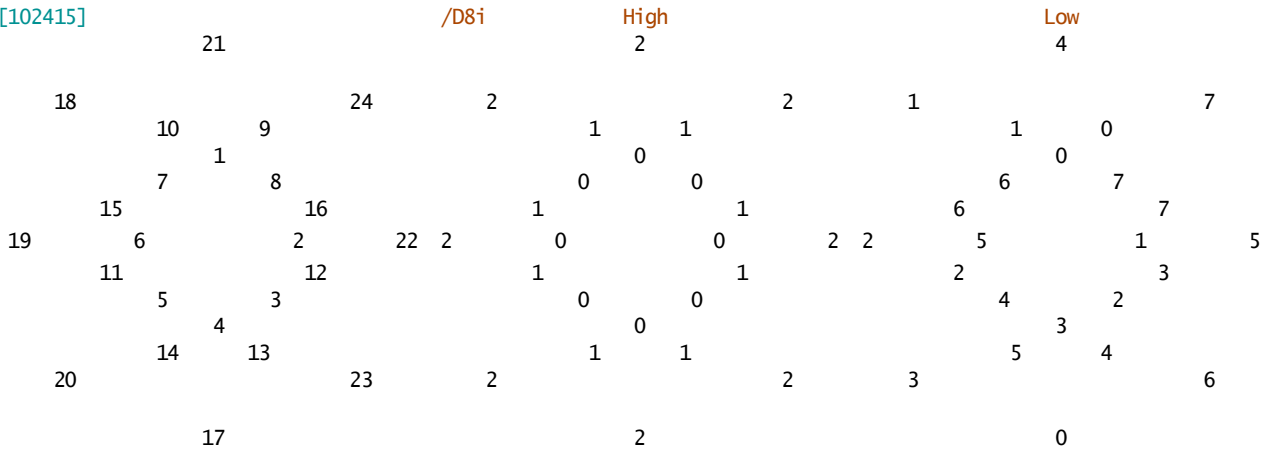
[ 59186]

					/D8i		High					Low		
							2					4		
	21													
17				22		2		1	1	2		0		5
		11	9					0	0			2	0	
			1					0	0			0	5	
		8	6					0	0			7	2	
20	15			16			1	0	1			6		7
		7		2	24	2		0	0	2	3	6		1
				14				1	0			1	3	5
	10	5	3					0	0			1	4	
			4					0	0			4	2	
18	12		13		23		2	1	1	2		1	3	4
									2				2	

[ 79604]

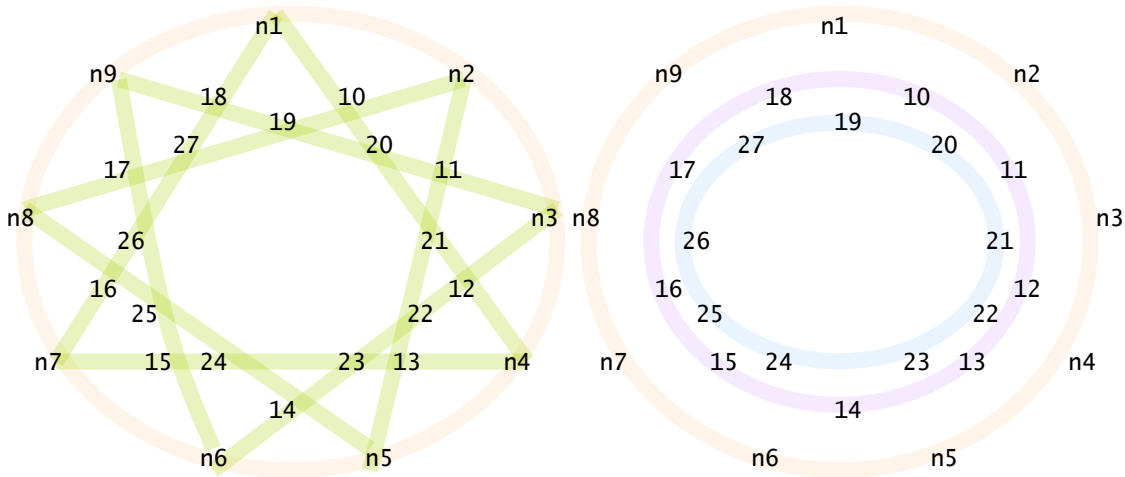


[102415]



[Count=128700] OK!

## 第9章：三周九星陣の基礎的研究



早速にも、基本図と基本定義式を示そう。

$n1+n10+n20+n21+n12+n4=C$	...	sm1		$sm1+sm2+sm3+sm4+sm5+sm6+sm7+sm8$
$n2+n11+n21+n22+n13+n5=C$	...	sm2		$2*(n1+n2+n3+ \dots +n26+n27)=9*C$
$n3+n12+n22+n23+n14+n6=C$	...	sm3		$2*(1+2+3+4+ \dots +25+26+27)=9*C$
$n4+n13+n23+n24+n15+n7=C$	...	sm4		$2*(28*27/2)=9*C$
$n5+n14+n24+n25+n16+n8=C$	...	sm5		756=9*C
$n6+n15+n25+n26+n17+n9=C$	...	sm6		ゆえに C=84

$$\begin{array}{ll} n7+n16+n26+n27+n18+n1=C & \dots \text{ sm7} \\ n8+n17+n27+n19+n10+n2=C & \dots \text{ sm8} \\ n9+n18+n19+n20+n11+n3=C & \dots \text{ sm9} \end{array} \quad |$$

これも、2つおきに対角線を結ぶ。全部で9本の対角線が引ける。その交点上の全てに自然数1-27を重複なく欠落なく全個を置く。1本の線上に6数がある。

その6数の和は、決まって84になる。 $C = 9 \times 9 + 3 = 84$

定義の連立方程式は、9本の対角線を規定するものだから、9本しか立たない。この基本式だけでは、解の総数が多くなり過ぎるので、別個に特別条件を与える。

外周・中周・内周上の9数の取り得る値に以下のような制限を付ける。

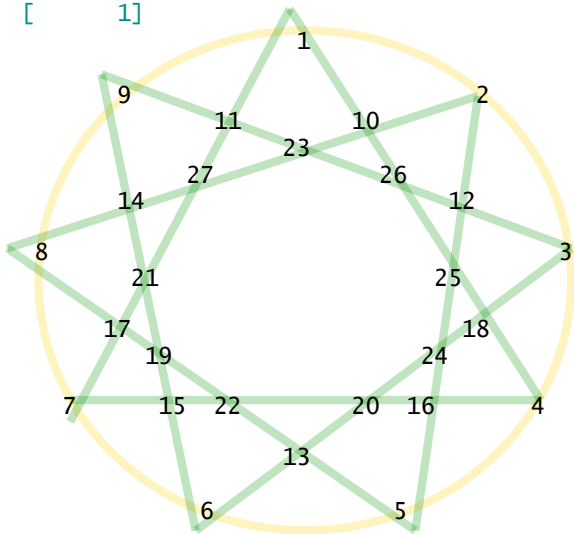
$$\{n1, n2, n3, n4, n5, n6, n7, n8, n9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \quad \dots \text{rg1}$$

$$\{n10, n11, n12, n13, n14, n15, n16, n17, n18\} = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\} \quad \dots \text{rg2}$$

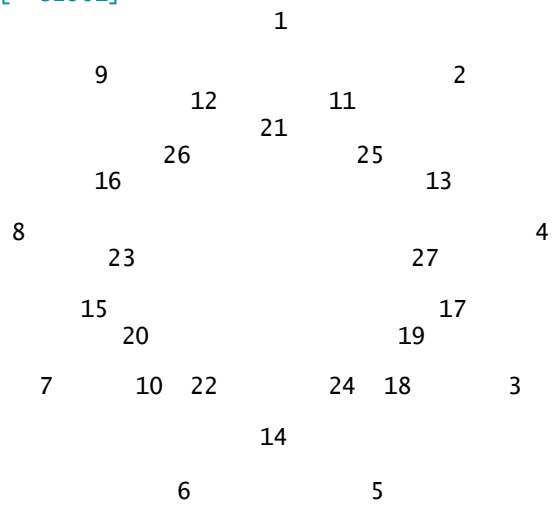
$$\{n19, n20, n21, n22, n23, n24, n25, n26, n27\} = \{19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27\} \quad \dots \text{rg3}$$

**\* 各週の数值を制限した三周九星陣の解のリスト (部分) : タイプ1 \***

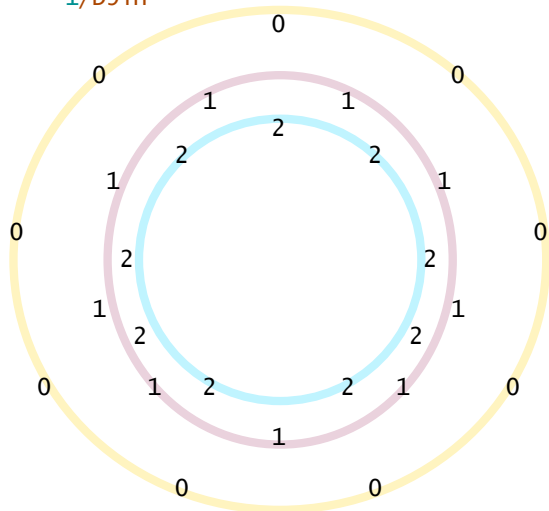
[ 1 ]



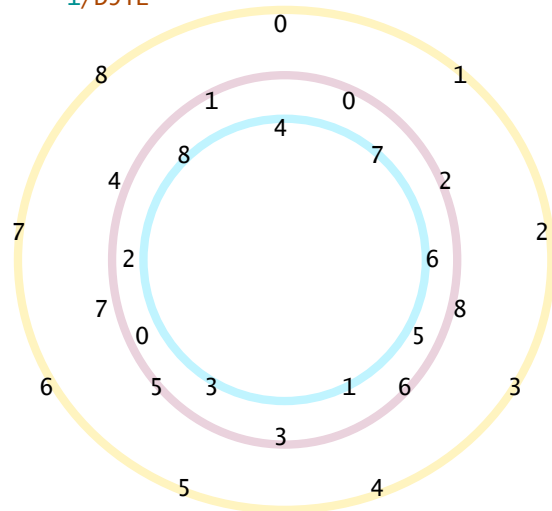
[ 32961 ]



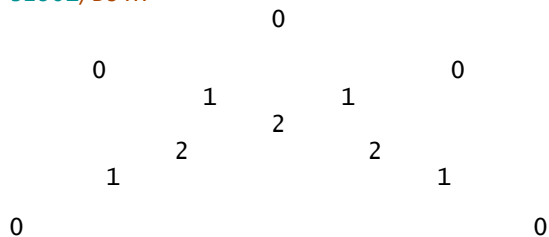
1/D9iH



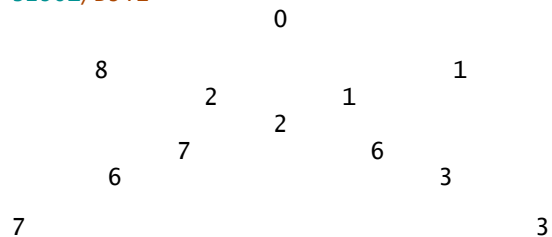
1/D9iL



32961/D9iH



32961/D9iL





	5		4			6		5	
[ 264188]			1					1	
	9				4		9		5
		12		10			15		
			24		26			22	10
	13	25			11		13	26	25
8						2	8		
	21				27			23	
									27
	18				17		12		18
		19			22			19	
									21
7	16	20		23	15	3	7	14	24
			14						17
			6		5			6	
									4

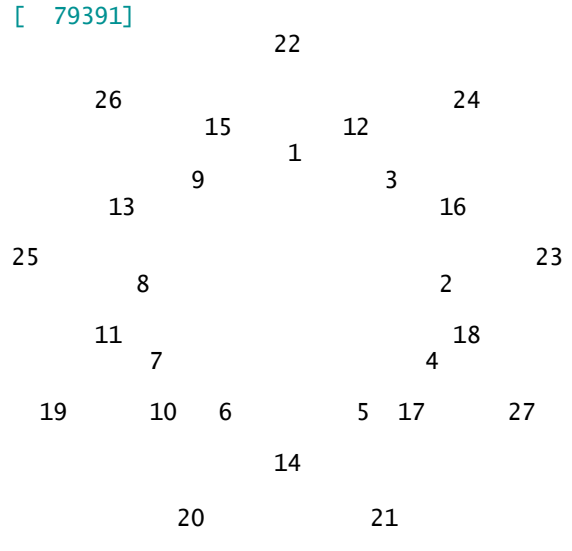
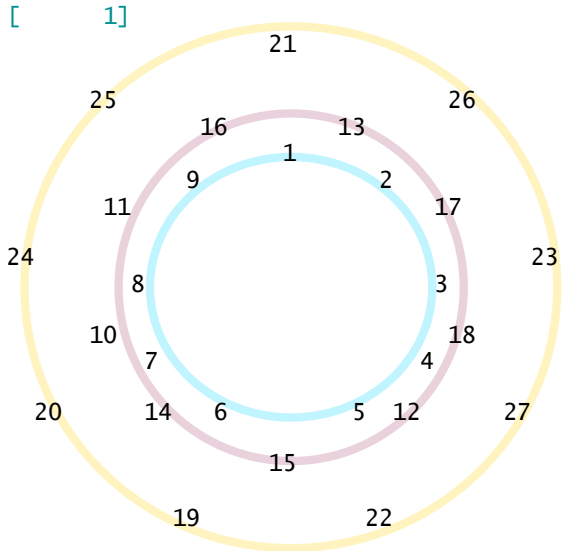
[ 534761]			1						1
	9				6		9		
		13		10				15	
			23		26				20
	12	25			11		13	26	27
8						2	8		
	24				27			19	
									25
	14				17		17		18
		19			20			22	
									23
7	15	21		22	16	3	6	16	21
			18						12
			5		4			5	
									4

[ 806621]			1						1
	9				8		8		
		11		10				15	
			21		27				21
	12	26			14		12	25	27
7						2	7		
	23				25			24	
									26
	17				18		13		17
		19			20			19	
									20
6	16	22		24	13	3	6	16	23
			15						18
			5		4			5	
									4

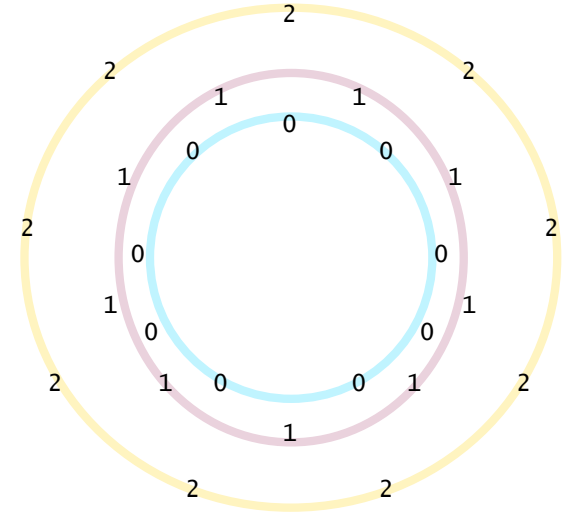
[Count=1072143] OK!

外周と内周との数値制限を逆にした場合も、次のような解が得られた。

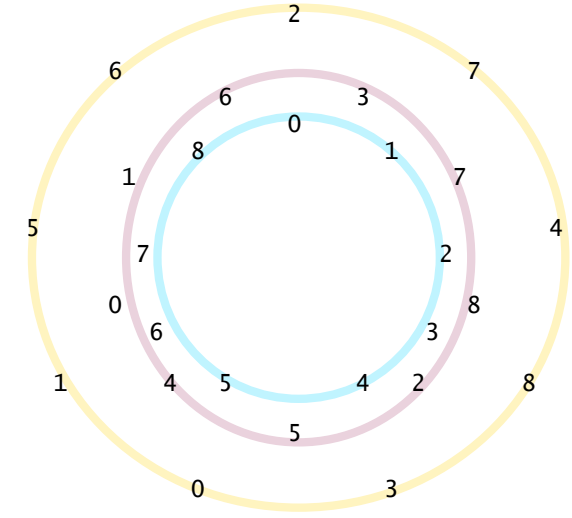
\* 外内周の数値制限を逆にした三周九星陣の解のリスト (部分) : **タイプ2** \*



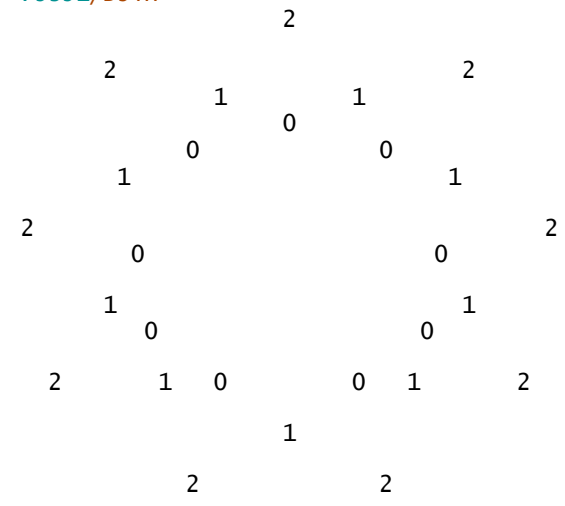
1/D9iH



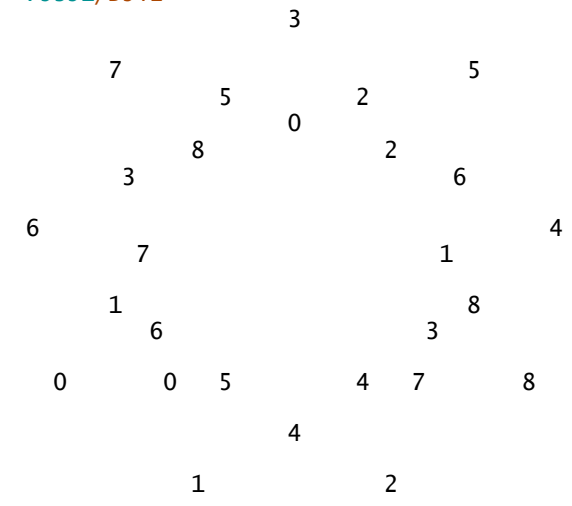
1/D9iL



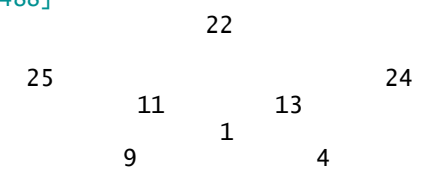
79391/D9iH



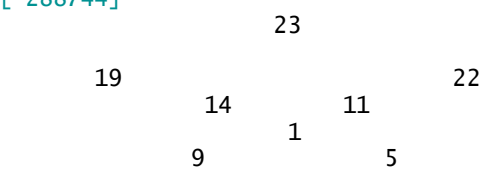
79391/D9iL



[ 176488 ]



[ 288744 ]



```

      14          16          16          18
23      8          2          27 25          8          2          27
      15      7          3 17          10      7          3 17
19     10 6          5 18      26      20      13 6          4 15      26
      12          12
      20          21          21          24
[ 423847]          [ 569310]
      23          23
      20          14          10      24          21          13          10      26
      9          1          6          17          11          9          1          7      18
13      13          17          26 27          8          2          24
27      8          2          26 27          8          2          24
      11      7          3 18          12      6          3 17
      19     15 5          4 16      25      19     16 5          4 15      25
      12          14
      21          22          22          20
[ 730441]          [ 895752]
      21          26
      20          15          10      27          22          12          10      27
      9          1          8          16          13          8          1          9      16
11      11          16          24 25          7          2          24
26      7          2          24 25          7          2          24
      13      6          3 18          11      6          3 14
      19     17 5          4 14      25      20     15 5          4 17      23
      12          18
      23          22          21          19

```

[Count=1072143] OK!

次は、三周十星陣と行きたいところだが、だんだんに荷が重くなる感じがする。それより、二周星陣に戻って、同様の数値制限を加える実験をしたくなった。二周星陣でも「ラテン星陣」はあるのだろうか？ 次節では、その辺を研究・報告したい。

(Written by Kanji Setsuda on July 15, 2008 with MacOSX and Xcode2.2)

E-Mail Address <jag12001@nifty.com>