

第3部：『魔方陣の新研究』： 撰田 寛二
 第2章： 四方陣の代数的研究（新）
 第5-2節： 補数対称四方陣の構造と補数ペア（最新版）

0. 最新研究の成果を反映させて、補数対称型四方陣を新しい切り口で解明してみたい。その点で参考になるのが、直前の「正方連結完全四方陣の構造と補数ペア」の記事だ。一緒に書いたものなので、一緒に読んでいただいた方がわかりやすいと思う。

補数対称型と完全型の四方陣は、お互いに良く似ている。しかし、少しだけ違う特徴がある。まるで「実の兄弟」みたいなものだ、よく言われる。

第一に、解の総数が同じである。第二に、構造的に種々の親近性がある。第三に、お互いの間に簡単な「書き換えの規則」が存在する。すぐに入れ替わることができるのである。

1. 先に正方連結完全四方陣の構造を研究していたので、補数対称型四方陣にも似たような特徴が見出せるのではないかという期待を抱いたのが、全ての発端だった。

- (1) 数値 1 の極く近くに「決まった数値」が幾つか集まって出来て居るのではないか。
 - (2) そうした 4 数の並び方によって 24 通りの解が出来ているのではないだろうか。
 - (3) 数値 1 の行きどころは、全部で 16 個所あるに違いない。したがって、解の総数は、 $24 \times 16 = 384$ と計算できるのではないか（もちろん「原始解」の話であるが）。
- これらの予想を何とか裏付け、実証しようと意気込んで、様々な代数計算を始めた。…

2. その成果を報告する前に、例の如く補数対称型四方陣の定義と解の実例を簡単に示しておこう。それも完全型四方陣と比較対照しながら。

** 補数対称型四方陣の基本図 **

S/0/C

n1 n2 n3 n4	n1 n2 n4 n3
n5 n6 n7 n8	n5 n6 n8 n7
n9 10 11 12	13 14 16 15
13 14 15 16	n9 10 12 11

** 基本定義式： **
 行列の定和式 $C=34$; and 対称型補数の定和式: $CC=17$;

$n1+n2+n3+n4=C$...rw1;	$n1+n16=CC$...Cmp1;
$n5+n6+n7+n8=C$...rw2;	$n2+n15=CC$...Cmp2;
$n9+n10+n11+n12=C$...rw3;	$n3+n14=CC$...Cmp3;
$n13+n14+n15+n16=C$...rw4;	$n4+n13=CC$...Cmp4;
$n1+n5+n9+n13=C$...c11;	$n5+n12=CC$...Cmp5;
$n2+n6+n10+n14=C$...c12;	$n6+n11=CC$...Cmp6;
$n3+n7+n11+n15=C$...c13;	$n7+n10=CC$...Cmp7;
$n4+n8+n12+n16=C$...c14;	$n8+n9=CC$...Cmp8;

右側の図 ↑ は、左側を書き換えて「完全型」としたもの

* 原始解384個のリスト（抜粋）： 左側に補数対称型(S), 右側に完全型(C)を比較用に置いた ↓ *

S/1/C	S/2/C	S/3/C																								
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>1 15 12 6</td><td>1 15 6 12</td></tr> <tr><td>14 4 7 9</td><td>14 4 9 7</td></tr> <tr><td>8 10 13 3</td><td>11 5 16 2</td></tr> <tr><td>11 5 2 16</td><td>8 10 3 13</td></tr> </table>	1 15 12 6	1 15 6 12	14 4 7 9	14 4 9 7	8 10 13 3	11 5 16 2	11 5 2 16	8 10 3 13	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>1 15 8 10</td><td>1 15 10 8</td></tr> <tr><td>14 4 11 5</td><td>14 4 5 11</td></tr> <tr><td>12 6 13 3</td><td>7 9 16 2</td></tr> <tr><td>7 9 2 16</td><td>12 6 3 13</td></tr> </table>	1 15 8 10	1 15 10 8	14 4 11 5	14 4 5 11	12 6 13 3	7 9 16 2	7 9 2 16	12 6 3 13	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>1 15 14 4</td><td>1 15 4 14</td></tr> <tr><td>12 6 7 9</td><td>12 6 9 7</td></tr> <tr><td>8 10 11 5</td><td>13 3 16 2</td></tr> <tr><td>13 3 2 16</td><td>8 10 5 11</td></tr> </table>	1 15 14 4	1 15 4 14	12 6 7 9	12 6 9 7	8 10 11 5	13 3 16 2	13 3 2 16	8 10 5 11
1 15 12 6	1 15 6 12																									
14 4 7 9	14 4 9 7																									
8 10 13 3	11 5 16 2																									
11 5 2 16	8 10 3 13																									
1 15 8 10	1 15 10 8																									
14 4 11 5	14 4 5 11																									
12 6 13 3	7 9 16 2																									
7 9 2 16	12 6 3 13																									
1 15 14 4	1 15 4 14																									
12 6 7 9	12 6 9 7																									
8 10 11 5	13 3 16 2																									
13 3 2 16	8 10 5 11																									
S/4/C	S/5/C	S/6/C																								
<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>1 15 8 10</td><td>1 15 10 8</td></tr> <tr><td>12 6 13 3</td><td>12 6 3 13</td></tr> <tr><td>14 4 11 5</td><td>7 9 16 2</td></tr> <tr><td>7 9 2 16</td><td>14 4 5 11</td></tr> </table>	1 15 8 10	1 15 10 8	12 6 13 3	12 6 3 13	14 4 11 5	7 9 16 2	7 9 2 16	14 4 5 11	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>1 15 14 4</td><td>1 15 4 14</td></tr> <tr><td>8 10 11 5</td><td>8 10 5 11</td></tr> <tr><td>12 6 7 9</td><td>13 3 16 2</td></tr> <tr><td>13 3 2 16</td><td>12 6 9 7</td></tr> </table>	1 15 14 4	1 15 4 14	8 10 11 5	8 10 5 11	12 6 7 9	13 3 16 2	13 3 2 16	12 6 9 7	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td>1 15 12 6</td><td>1 15 6 12</td></tr> <tr><td>8 10 13 3</td><td>8 10 3 13</td></tr> <tr><td>14 4 7 9</td><td>11 5 16 2</td></tr> <tr><td>11 5 2 16</td><td>14 4 9 7</td></tr> </table>	1 15 12 6	1 15 6 12	8 10 13 3	8 10 3 13	14 4 7 9	11 5 16 2	11 5 2 16	14 4 9 7
1 15 8 10	1 15 10 8																									
12 6 13 3	12 6 3 13																									
14 4 11 5	7 9 16 2																									
7 9 2 16	14 4 5 11																									
1 15 14 4	1 15 4 14																									
8 10 11 5	8 10 5 11																									
12 6 7 9	13 3 16 2																									
13 3 2 16	12 6 9 7																									
1 15 12 6	1 15 6 12																									
8 10 13 3	8 10 3 13																									
14 4 7 9	11 5 16 2																									
11 5 2 16	14 4 9 7																									

S/7/C

1	14	12	7	1	14	7	12
15	4	6	9	15	4	9	6
8	11	13	2	10	5	16	3
10	5	3	16	8	11	2	13

S/8/C

1	14	8	11	1	14	11	8
15	4	10	5	15	4	5	10
12	7	13	2	6	9	16	3
6	9	3	16	12	7	2	13

S/9/C

1	14	15	4	1	14	4	15
12	7	6	9	12	7	9	6
8	11	10	5	13	2	16	3
13	2	3	16	8	11	5	10

S/10/C

1	14	8	11	1	14	11	8
12	7	13	2	12	7	2	13
15	4	10	5	6	9	16	3
6	9	3	16	15	4	5	10

S/11/C

1	14	15	4	1	14	4	15
8	11	10	5	8	11	5	10
12	7	6	9	13	2	16	3
13	2	3	16	12	7	9	6

S/12/C

1	14	12	7	1	14	7	12
8	11	13	2	8	11	2	13
15	4	6	9	10	5	16	3
10	5	3	16	15	4	9	6

S/13/C

1	12	14	7	1	12	7	14
15	6	4	9	15	6	9	4
8	13	11	2	10	3	16	5
10	3	5	16	8	13	2	11

S/14/C

1	12	8	13	1	12	13	8
15	6	10	3	15	6	3	10
14	7	11	2	4	9	16	5
4	9	5	16	14	7	2	11

S/15/C

1	12	15	6	1	12	6	15
14	7	4	9	14	7	9	4
8	13	10	3	11	2	16	5
11	2	5	16	8	13	3	10

S/16/C

1	12	8	13	1	12	13	8
14	7	11	2	14	7	2	11
15	6	10	3	4	9	16	5
4	9	5	16	15	6	3	10

S/17/C

1	12	15	6	1	12	6	15
8	13	10	3	8	13	3	10
14	7	4	9	11	2	16	5
11	2	5	16	14	7	9	4

S/18/C

1	12	14	7	1	12	7	14
8	13	11	2	8	13	2	11
15	6	4	9	10	3	16	5
10	3	5	16	15	6	9	4

S/19/C

1	8	14	11	1	8	11	14
15	10	4	5	15	10	5	4
12	13	7	2	6	3	16	9
6	3	9	16	12	13	2	7

S/20/C

1	8	12	13	1	8	13	12
15	10	6	3	15	10	3	6
14	11	7	2	4	5	16	9
4	5	9	16	14	11	2	7

S/21/C

1	8	15	10	1	8	10	15
14	11	4	5	14	11	5	4
12	13	6	3	7	2	16	9
7	2	9	16	12	13	3	6

S/22/C

1	8	12	13	1	8	13	12
14	11	7	2	14	11	2	7
15	10	6	3	4	5	16	9
4	5	9	16	15	10	3	6

S/23/C

1	8	15	10	1	8	10	15
12	13	6	3	12	13	3	6
14	11	4	5	7	2	16	9
7	2	9	16	14	11	5	4

S/24/C

1	8	14	11	1	8	11	14
12	13	7	2	12	13	2	7
15	10	4	5	6	3	16	9
6	3	9	16	15	10	5	4

S/25/C

2	16	11	5	2	16	5	11
13	3	8	10	13	3	10	8
7	9	14	4	12	6	15	1
12	6	1	15	7	9	4	14

S/31/C

2	13	11	8	2	13	8	11
16	3	5	10	16	3	10	5
7	12	14	1	9	6	15	4
9	6	4	15	7	12	1	14

S/37/C

2	11	13	8	2	11	8	13
16	5	3	10	16	5	10	3
7	14	12	1	9	4	15	6
9	4	6	15	7	14	1	12

<p>S/43/C</p> <p>2 7 13 12 2 7 12 13 16 9 3 6 16 9 6 3 11 14 8 1 5 4 15 10 5 4 10 15 11 14 1 8</p>	<p>S/49/C</p> <p>3 16 10 5 3 16 5 10 13 2 8 11 13 2 11 8 6 9 15 4 12 7 14 1 12 7 1 14 6 9 4 15</p>	<p>S/55/C</p> <p>3 13 10 8 3 13 8 10 16 2 5 11 16 2 11 5 6 12 15 1 9 7 14 4 9 7 4 14 6 12 1 15</p>
<p>S/61/C</p> <p>3 10 13 8 3 10 8 13 16 5 2 11 16 5 11 2 6 15 12 1 9 4 14 7 9 4 7 14 6 15 1 12</p>	<p>S/67/C</p> <p>3 6 13 12 3 6 12 13 16 9 2 7 16 9 7 2 10 15 8 1 5 4 14 11 5 4 11 14 10 15 1 8</p>	<p>S/73/C</p> <p>4 15 9 6 4 15 6 9 14 1 7 12 14 1 12 7 5 10 16 3 11 8 13 2 11 8 2 13 5 10 3 16</p>
<p>S/79/C</p> <p>4 14 9 7 4 14 7 9 15 1 6 12 15 1 12 6 5 11 16 2 10 8 13 3 10 8 3 13 5 11 2 16</p>	<p>S/85/C</p> <p>4 9 14 7 4 9 7 14 15 6 1 12 15 6 12 1 5 16 11 2 10 3 13 8 10 3 8 13 5 16 2 11</p>	<p>S/91/C</p> <p>4 5 14 11 4 5 11 14 15 10 1 8 15 10 8 1 9 16 7 2 6 3 13 12 6 3 12 13 9 16 2 7</p>
<p>S/97/C</p> <p>5 16 10 3 5 16 3 10 11 2 8 13 11 2 13 8 4 9 15 6 14 7 12 1 14 7 1 12 4 9 6 15</p>	<p>S/103/C</p> <p>5 11 10 8 5 11 8 10 16 2 3 13 16 2 13 3 4 14 15 1 9 7 12 6 9 7 6 12 4 14 1 15</p>	<p>S/109/C</p> <p>5 10 11 8 5 10 8 11 16 3 2 13 16 3 13 2 4 15 14 1 9 6 12 7 9 6 7 12 4 15 1 14</p>
<p>S/115/C</p> <p>5 4 11 14 5 4 14 11 16 9 2 7 16 9 7 2 10 15 8 1 3 6 12 13 3 6 13 12 10 15 1 8</p>	<p>S/121/C</p> <p>6 15 9 4 6 15 4 9 12 1 7 14 12 1 14 7 3 10 16 5 13 8 11 2 13 8 2 11 3 10 5 16</p>	<p>S/127/C</p> <p>6 12 9 7 6 12 7 9 15 1 4 14 15 1 14 4 3 13 16 2 10 8 11 5 10 8 5 11 3 13 2 16</p>
<p>S/133/C</p> <p>6 9 12 7 6 9 7 12 15 4 1 14 15 4 14 1 3 16 13 2 10 5 11 8 10 5 8 11 3 16 2 13</p>	<p>S/139/C</p> <p>6 3 12 13 6 3 13 12 15 10 1 8 15 10 8 1 9 16 7 2 4 5 11 14 4 5 14 11 9 16 2 7</p>	<p>S/145/C</p> <p>7 14 9 4 7 14 4 9 12 1 6 15 12 1 15 6 2 11 16 5 13 8 10 3 13 8 3 10 2 11 5 16</p>
<p>S/151/C</p> <p>7 12 9 6 7 12 6 9 14 1 4 15 14 1 15 4 2 13 16 3 11 8 10 5 11 8 5 10 2 13 3 16</p>	<p>S/157/C</p> <p>7 9 12 6 7 9 6 12 14 4 1 15 14 4 15 1 2 16 13 3 11 5 10 8 11 5 8 10 2 16 3 13</p>	<p>S/163/C</p> <p>7 2 12 13 7 2 13 12 14 11 1 8 14 11 8 1 9 16 6 3 4 5 10 15 4 5 15 10 9 16 3 6</p>
<p>S/169/C</p> <p>8 13 10 3 8 13 3 10 11 2 5 16 11 2 16 5 1 12 15 6 14 7 9 4 14 7 4 9 1 12 6 15</p>	<p>S/175/C</p> <p>8 11 10 5 8 11 5 10 13 2 3 16 13 2 16 3 1 14 15 4 12 7 9 6 12 7 6 9 1 14 4 15</p>	<p>S/181/C</p> <p>8 10 11 5 8 10 5 11 13 3 2 16 13 3 16 2 1 15 14 4 12 6 9 7 12 6 7 9 1 15 4 14</p>
<p>S/187/C</p> <p>8 1 11 14 8 1 14 11 13 12 2 7 13 12 7 2 10 15 5 4 3 6 9 16 3 6 16 9 10 15 4 5</p>	<p>S/193/C</p> <p>9 16 6 3 9 16 3 6 7 2 12 13 7 2 13 12 4 5 15 10 14 11 8 1 14 11 1 8 4 5 10 15</p>	<p>S/199/C</p> <p>9 7 6 12 9 7 12 6 16 2 3 13 16 2 13 3 4 14 15 1 5 11 8 10 5 11 10 8 4 14 1 15</p>
<p>S/205/C</p> <p>9 6 7 12 9 6 12 7 16 3 2 13 16 3 13 2 4 15 14 1 5 10 8 11 5 10 11 8 4 15 1 14</p>	<p>S/211/C</p> <p>9 4 7 14 9 4 14 7 16 5 2 11 16 5 11 2 6 15 12 1 3 10 8 13 3 10 13 8 6 15 1 12</p>	<p>S/217/C</p> <p>10 15 5 4 10 15 4 5 8 1 11 14 8 1 14 11 3 6 16 9 13 12 7 2 13 12 2 7 3 6 9 16</p>
<p>S/223/C</p> <p>10 8 5 11 10 8 11 5 15 1 4 14 15 1 14 4 3 13 16 2 6 12 7 9 6 12 9 7 3 13 2 16</p>	<p>S/229/C</p> <p>10 5 8 11 10 5 11 8 15 4 1 14 15 4 14 1 3 16 13 2 6 9 7 12 6 9 12 7 3 16 2 13</p>	<p>S/235/C</p> <p>10 3 8 13 10 3 13 8 15 6 1 12 15 6 12 1 5 16 11 2 4 9 7 14 4 9 14 7 5 16 2 11</p>

(↑ 左側に補数対称型(S), 右側に完全型(C)を置いてある)

<p>S/241/C</p> <p>11 14 5 4 11 14 4 5 8 1 10 15 8 1 15 10 2 7 16 9 13 12 6 3 13 12 3 6 2 7 9 16</p>	<p>S/247/C</p> <p>11 8 5 10 11 8 10 5 14 1 4 15 14 1 15 4 2 13 16 3 7 12 6 9 7 12 9 6 2 13 3 16</p>	<p>S/253/C</p> <p>11 5 8 10 11 5 10 8 14 4 1 15 14 4 15 1 2 16 13 3 7 9 6 12 7 9 12 6 2 16 3 13</p>
<p>S/259/C</p> <p>11 2 8 13 11 2 13 8 14 7 1 12 14 7 12 1 5 16 10 3 4 9 6 15 4 9 15 6 5 16 3 10</p>	<p>S/265/C</p> <p>12 13 6 3 12 13 3 6 7 2 9 16 7 2 16 9 1 8 15 10 14 11 5 4 14 11 4 5 1 8 10 15</p>	<p>S/271/C</p> <p>12 7 6 9 12 7 9 6 13 2 3 16 13 2 16 3 1 14 15 4 8 11 5 10 8 11 10 5 1 14 4 15</p>
<p>S/277/C</p> <p>12 6 7 9 12 6 9 7 13 3 2 16 13 3 16 2 1 15 14 4 8 10 5 11 8 10 11 5 1 15 4 14</p>	<p>S/283/C</p> <p>12 1 7 14 12 1 14 7 13 8 2 11 13 8 11 2 6 15 9 4 3 10 5 16 3 10 16 5 6 15 4 9</p>	<p>S/289/C</p> <p>13 12 3 6 13 12 6 3 8 1 10 15 8 1 15 10 2 7 16 9 11 14 4 5 11 14 5 4 2 7 9 16</p>
<p>S/295/C</p> <p>13 8 3 10 13 8 10 3 12 1 6 15 12 1 15 6 2 11 16 5 7 14 4 9 7 14 9 4 2 11 5 16</p>	<p>S/301/C</p> <p>13 3 8 10 13 3 10 8 12 6 1 15 12 6 15 1 2 16 11 5 7 9 4 14 7 9 14 4 2 16 5 11</p>	<p>S/307/C</p> <p>13 2 8 11 13 2 11 8 12 7 1 14 12 7 14 1 3 16 10 5 6 9 4 15 6 9 15 4 3 16 5 10</p>
<p>S/313/C</p> <p>14 11 4 5 14 11 5 4 7 2 9 16 7 2 16 9 1 8 15 10 12 13 3 6 12 13 6 3 1 8 10 15</p>	<p>S/319/C</p> <p>14 7 4 9 14 7 9 4 11 2 5 16 11 2 16 5 1 12 15 6 8 13 3 10 8 13 10 3 1 12 6 15</p>	<p>S/325/C</p> <p>14 4 7 9 14 4 9 7 11 5 2 16 11 5 16 2 1 15 12 6 8 10 3 13 8 10 13 3 1 15 6 12</p>
<p>S/331/C</p> <p>14 1 7 12 14 1 12 7 11 8 2 13 11 8 13 2 4 15 9 6 5 10 3 16 5 10 16 3 4 15 6 9</p>	<p>S/337/C</p> <p>15 10 4 5 15 10 5 4 6 3 9 16 6 3 16 9 1 8 14 11 12 13 2 7 12 13 7 2 1 8 11 14</p>	<p>S/343/C</p> <p>15 6 4 9 15 6 9 4 10 3 5 16 10 3 16 5 1 12 14 7 8 13 2 11 8 13 11 2 1 12 7 14</p>
<p>S/349/C</p> <p>15 4 6 9 15 4 9 6 10 5 3 16 10 5 16 3 1 14 12 7 8 11 2 13 8 11 13 2 1 14 7 12</p>	<p>S/355/C</p> <p>15 1 6 12 15 1 12 6 10 8 3 13 10 8 13 3 4 14 9 7 5 11 2 16 5 11 16 2 4 14 7 9</p>	<p>S/361/C</p> <p>16 9 3 6 16 9 6 3 5 4 10 15 5 4 15 10 2 7 13 12 11 14 1 8 11 14 8 1 2 7 12 13</p>
<p>S/367/C</p> <p>16 5 3 10 16 5 10 3 9 4 6 15 9 4 15 6 2 11 13 8 7 14 1 12 7 14 12 1 2 11 8 13</p>	<p>S/373/C</p> <p>16 3 5 10 16 3 10 5 9 6 4 15 9 6 15 4 2 13 11 8 7 12 1 14 7 12 14 1 2 13 8 11</p>	<p>S/379/C</p> <p>16 2 5 11 16 2 11 5 9 7 4 14 9 7 14 4 3 13 10 8 6 12 1 15 6 12 15 1 3 13 8 10</p>

[Count = 384]

↑ 左側に補数対称型(S), 右側に完全型(C)を置いてある

* モニター・リスト : 数値**1**がどの場所にあるかによって, 解を計数した結果 *

- 1: 24, 2: 24, 3: 24, 4: 24, 5: 24, 6: 24, 7: 24, 8: 24,
9: 24, 10: 24, 11: 24, 12: 24, 13: 24, 14: 24, 15: 24, 16: 24;

[OK!]

** Calculated and Listed by Kanji Setsuda on
Nov.29, 2014 with MacOSX 10.10.1 & Xcode 6.1 **

上のリストを御覧になって, 補数対称型と完全型が良く似ていること。そして, その似方にきっと興味を抱かれたかと思う。その特徴を列記する。

(1) 確かに数値**1**の近傍に「決まった4数」の配置が見られる。{**15, 14, 12, 8**}の4数である。**16**は, 方陣の中心点に対して数値**1**と対称の位置にあって動かない(「対称型補数」)。

対称方陣は, 汎魔方陣ではないので, 行列のシフトによって「拡張方陣空間」を作ることができない。そのために4数全てが数値**1**の直接「隣り」に来るということはないが, 数値**1**と同一の行・列に属していて, 「隣り」か「1つ置いて隣り」に来ている。十分に「近傍」である。

(2) 最初の 24 解 (n1=1) を見てもらえばわかるが、「同行・同列の 4 数」の間で「並び替え」が見られる ↓。並び替えの仕方が ${}_4P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$; と、**順列**で計算できる。

1#	2#	3#	4#	5#	6#	7#	8#
1 15 12 0	1 15 8 0	1 15 14 0	1 15 8 0	1 15 14 0	1 15 12 0	1 14 12 0	1 14 8 0
14 0 0 0	14 0 0 0	12 0 0 0	12 0 0 0	8 0 0 0	8 0 0 0	15 0 0 0	15 0 0 0
8 0 0 0	12 0 0 0	8 0 0 0	14 0 0 0	12 0 0 0	14 0 0 0	8 0 0 0	12 0 0 0
0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16
9#	10#	11#	12#	13#	14#	15#	16#
1 14 15 0	1 14 8 0	1 14 15 0	1 14 12 0	1 12 14 0	1 12 8 0	1 12 15 0	1 12 8 0
12 0 0 0	12 0 0 0	8 0 0 0	8 0 0 0	15 0 0 0	15 0 0 0	14 0 0 0	14 0 0 0
8 0 0 0	15 0 0 0	12 0 0 0	15 0 0 0	8 0 0 0	14 0 0 0	8 0 0 0	15 0 0 0
0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16
17#	18#	19#	20#	21#	22#	23#	24#
1 12 15 0	1 12 14 0	1 8 14 0	1 8 12 0	1 8 15 0	1 8 12 0	1 8 15 0	1 8 14 0
8 0 0 0	8 0 0 0	15 0 0 0	15 0 0 0	14 0 0 0	14 0 0 0	12 0 0 0	12 0 0 0
14 0 0 0	15 0 0 0	12 0 0 0	14 0 0 0	12 0 0 0	15 0 0 0	14 0 0 0	15 0 0 0
0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16	0 0 0 16

(3) 原始解全体でみると、数値 1 は原点 n1 から出て、n2, n3, n4, ..., n15, n16 と、全部で 16 カ所に行くことができる。その頻度は、前頁のモニター・リストが示す如く公平だ。したがって、(2) の 24 と掛けて、 $24 \times 16 = 384$; これで解の総数が説明できる。

予想は、全て叶えられた。だが、叶ったら叶ったで、ますます不思議の感情が深まる。何故にそうなるのか。

補数対称型の場合でも、完全型四方陣で見られた「補数ペア」のセットのような緊密な構造を持っているのだろうか。それに対して自然数 1~16 が、今度もまた具体的な補数ペアの存在を示し、適切な指示を与える「設計書」を示すのだろうか。

3. 代数計算による解析に入る前に、もう一つだけ心配事を解決しておこう。

今までの説明で、数値 1 とその「同朋」の 4 数だけで、原始解の総数 384 個全てを決定しているように書いたが、本当にそうなのか。他の数値には、何の役割も無いのだろうか。次のリストを見てほしい。

* 数値 2 とその同朋 4 数の内容 : {16, 13, 11, 7} が、近傍にある。15 が、対称型補数 *

25#	26#	27#	28#	29#	30#
2 16 11 0	2 16 7 0	2 16 13 0	2 16 7 0	2 16 13 0	2 16 11 0
13 0 0 0	13 0 0 0	11 0 0 0	11 0 0 0	7 0 0 0	7 0 0 0
7 0 0 0	11 0 0 0	7 0 0 0	13 0 0 0	11 0 0 0	13 0 0 0
0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15
31#	32#	33#	34#	35#	36#
2 13 11 0	2 13 7 0	2 13 16 0	2 13 7 0	2 13 16 0	2 13 11 0
16 0 0 0	16 0 0 0	11 0 0 0	11 0 0 0	7 0 0 0	7 0 0 0
7 0 0 0	11 0 0 0	7 0 0 0	16 0 0 0	11 0 0 0	16 0 0 0
0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15
37#	38#	39#	40#	41#	42#
2 11 13 0	2 11 7 0	2 11 16 0	2 11 7 0	2 11 16 0	2 11 13 0
16 0 0 0	16 0 0 0	13 0 0 0	13 0 0 0	7 0 0 0	7 0 0 0
7 0 0 0	13 0 0 0	7 0 0 0	16 0 0 0	13 0 0 0	16 0 0 0
0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15
43#	44#	45#	46#	47#	48#
2 7 13 0	2 7 11 0	2 7 16 0	2 7 11 0	2 7 16 0	2 7 13 0
16 0 0 0	16 0 0 0	13 0 0 0	13 0 0 0	11 0 0 0	11 0 0 0
11 0 0 0	13 0 0 0	11 0 0 0	16 0 0 0	13 0 0 0	16 0 0 0
0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15	0 0 0 15

* 数値 3 とその同朋 4 数の内容 : {16, 13, 10, 6} が、近傍にある。14 が、対称型補数 *

49#	50#	51#	52#	53#	54#
3 16 10 0	3 16 6 0	3 16 13 0	3 16 6 0	3 16 13 0	3 16 10 0
13 0 0 0	13 0 0 0	10 0 0 0	10 0 0 0	6 0 0 0	6 0 0 0
6 0 0 0	10 0 0 0	6 0 0 0	13 0 0 0	10 0 0 0	13 0 0 0
0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14

55#	56#	57#	58#	59#	60#
3 13 10 0	3 13 6 0	3 13 16 0	3 13 6 0	3 13 16 0	3 13 10 0
16 0 0 0	16 0 0 0	10 0 0 0	10 0 0 0	6 0 0 0	6 0 0 0
6 0 0 0	10 0 0 0	6 0 0 0	16 0 0 0	10 0 0 0	16 0 0 0
0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14
61#	62#	63#	64#	65#	66#
3 10 13 0	3 10 6 0	3 10 16 0	3 10 6 0	3 10 16 0	3 10 13 0
16 0 0 0	16 0 0 0	13 0 0 0	13 0 0 0	6 0 0 0	6 0 0 0
6 0 0 0	13 0 0 0	6 0 0 0	16 0 0 0	13 0 0 0	16 0 0 0
0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14
67#	68#	69#	70#	71#	72#
3 6 13 0	3 6 10 0	3 6 16 0	3 6 10 0	3 6 16 0	3 6 13 0
16 0 0 0	16 0 0 0	13 0 0 0	13 0 0 0	10 0 0 0	10 0 0 0
10 0 0 0	13 0 0 0	10 0 0 0	16 0 0 0	13 0 0 0	16 0 0 0
0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14	0 0 0 14

* 数値5とその同朋4数の内容：{16, 11, 10, 4}が、近傍にある。12が、対称型補数 *

97#	98#	99#	100#	101#	102#
5 16 10 0	5 16 4 0	5 16 11 0	5 16 4 0	5 16 11 0	5 16 10 0
11 0 0 0	11 0 0 0	10 0 0 0	10 0 0 0	4 0 0 0	4 0 0 0
4 0 0 0	10 0 0 0	4 0 0 0	11 0 0 0	10 0 0 0	11 0 0 0
0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12
103#	104#	105#	106#	107#	108#
5 11 10 0	5 11 4 0	5 11 16 0	5 11 4 0	5 11 16 0	5 11 10 0
16 0 0 0	16 0 0 0	10 0 0 0	10 0 0 0	4 0 0 0	4 0 0 0
4 0 0 0	10 0 0 0	4 0 0 0	16 0 0 0	10 0 0 0	16 0 0 0
0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12
109#	110#	111#	112#	113#	114#
5 10 11 0	5 10 4 0	5 10 16 0	5 10 4 0	5 10 16 0	5 10 11 0
16 0 0 0	16 0 0 0	11 0 0 0	11 0 0 0	4 0 0 0	4 0 0 0
4 0 0 0	11 0 0 0	4 0 0 0	16 0 0 0	11 0 0 0	16 0 0 0
0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12
115#	116#	117#	118#	119#	120#
5 4 11 0	5 4 10 0	5 4 16 0	5 4 10 0	5 4 16 0	5 4 11 0
16 0 0 0	16 0 0 0	11 0 0 0	11 0 0 0	10 0 0 0	10 0 0 0
10 0 0 0	11 0 0 0	10 0 0 0	16 0 0 0	11 0 0 0	16 0 0 0
0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12	0 0 0 12

* 数値9とその同朋4数の内容：{16, 7, 6, 4}が、近傍にある。8が、対称型補数 *

193#	194#	195#	196#	197#	198#
9 16 6 0	9 16 4 0	9 16 7 0	9 16 4 0	9 16 7 0	9 16 6 0
7 0 0 0	7 0 0 0	6 0 0 0	6 0 0 0	4 0 0 0	4 0 0 0
4 0 0 0	6 0 0 0	4 0 0 0	7 0 0 0	6 0 0 0	7 0 0 0
0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8
199#	200#	201#	202#	203#	204#
9 7 6 0	9 7 4 0	9 7 16 0	9 7 4 0	9 7 16 0	9 7 6 0
16 0 0 0	16 0 0 0	6 0 0 0	6 0 0 0	4 0 0 0	4 0 0 0
4 0 0 0	6 0 0 0	4 0 0 0	16 0 0 0	6 0 0 0	16 0 0 0
0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8
205#	206#	207#	208#	209#	210#
9 6 7 0	9 6 4 0	9 6 16 0	9 6 4 0	9 6 16 0	9 6 7 0
16 0 0 0	16 0 0 0	7 0 0 0	7 0 0 0	4 0 0 0	4 0 0 0
4 0 0 0	7 0 0 0	4 0 0 0	16 0 0 0	7 0 0 0	16 0 0 0
0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8
211#	212#	213#	214#	215#	216#
9 4 7 0	9 4 6 0	9 4 16 0	9 4 6 0	9 4 16 0	9 4 7 0
16 0 0 0	16 0 0 0	7 0 0 0	7 0 0 0	6 0 0 0	6 0 0 0
6 0 0 0	7 0 0 0	6 0 0 0	16 0 0 0	7 0 0 0	16 0 0 0
0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8	0 0 0 8

調べて見ると、1～16のどの数値にも、その同行・同列上に4数の「決まった同朋」が等しく居る（無論対称型補数も居る）。同朋4数の並び方は、どれも ${}_4P_4=24$ 通りあり、解の総

数が $24 \times 16 = 384$ 個だと説明できる。そしてこれらの全てが「同時に」起きている。
 皆が同じことを言うので、数値 **1** の場合を「代表」として採用しているわけだ。

4. いよいよ代数計算による解析の報告に入ろう。

**** 基本定義式: ****

行列の定和式 $C=34$; and 対称型補数の定和式: $CC=17$;

```

n1+n2+n3+n4=C      ...rw1;   n1+n16=CC   ...Cmp1;
n5+n6+n7+n8=C      ...rw2;   n2+n15=CC   ...Cmp2;
n9+n10+n11+n12=C   ...rw3;   n3+n14=CC   ...Cmp3;
n13+n14+n15+n16=C  ...rw4;   n4+n13=CC   ...Cmp4;
n1+n5+n9+n13=C     ...c11;   n5+n12=CC   ...Cmp5;
n2+n6+n10+n14=C    ...c12;   n6+n11=CC   ...Cmp6;
n3+n7+n11+n15=C    ...c13;   n7+n10=CC   ...Cmp7;
n4+n8+n12+n16=C    ...c14;   n8+n9=CC    ...Cmp8;
    
```

**** 代数計算 ****

(1)

Cmp1+Cmp2

$(n1+n16)+(n2+n15)=(n1+n2)+(n15+n16)=2CC=C$;

But, $n1+n2+n3+n4=C$...rw1;

Therefore, $n3+n4=n15+n16=c1$;

Cmp3+Cmp4

$(n3+n14)+(n4+n13)=(n3+n4)+(n13+n14)=2CC=C$;

But, $n1+n2+n3+n4=C$...rw1;

Therefore, $n1+n2=n13+n14=c2$;

Cmp5+Cmp6

$(n5+n12)+(n6+n11)=(n5+n6)+(n11+n12)=2CC=C$;

But, $n5+n6+n7+n8=C$...rw1;

Therefore, $n7+n8=n11+n12=c3$;

Cmp7+Cmp8

$(n7+n10)+(n8+n9)=(n7+n8)+(n9+n10)=2CC=C$;

But, $n5+n6+n7+n8=C$...rw2;

Therefore, $n5+n6=n9+n10=c4$;

But, $n9+n10+n11+n12=C$...rw3;

It means $n7+n8=n11+n12=c5=c3$;

c13+c14

$n3+n7+n11+n15=C$

+) $n4+n8+n12+n16=C$

 $n3+n4+n7+n8+n11+n12+n15+n16=2C$

But, $n3+n4=n15+n16=c1$; $n7+n8=n11+n12=c3$;

Therefore, $2(n3+n4)+2(n7+n8)=2C$

It means $n3+n4+n7+n8=C$;

But, $n1+n2+n3+n4=C$...rw1;

Therefore, $n1+n2=n7+n8=c6$;

まとめの1:

$n1+n2=n7+n8=n11+n12=n13+n14=c6=c2=c3=cp1$;

And then

$n3+n4=C-(n1+n2)=C-cp1$; $n5+n6=C-(n7+n8)=C-cp1$;

$n9+n10=C-(n11+n12)=C-cp1$; $n15+n16=C-(n13+n14)=C-cp1$;

Therefore, $n3+n4=n5+n6=n9+n10=n15+n16=cp2$;

And $cp1+cp2=C$;

**** 補数対称型四方陣の「補数ペア」のある場所 ****

1P/	2P/																																																								
<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td style="border-right: 1px dashed black;">1</td><td style="border-right: 1px dashed black;">2</td><td style="border-right: 1px dashed black;">3</td><td>4</td></tr> <tr><td colspan="4" style="border-top: 1px dashed black; border-bottom: 1px dashed black;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black;">5</td><td style="border-right: 1px dashed black;">6</td><td style="border-right: 1px dashed black;">7</td><td>8</td></tr> <tr><td colspan="4" style="border-top: 1px dashed black; border-bottom: 1px dashed black;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black;">9</td><td style="border-right: 1px dashed black;">10</td><td style="border-right: 1px dashed black;">11</td><td>12</td></tr> <tr><td colspan="4" style="border-top: 1px dashed black; border-bottom: 1px dashed black;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black;">13</td><td style="border-right: 1px dashed black;">14</td><td style="border-right: 1px dashed black;">15</td><td>16</td></tr> </table>	1	2	3	4					5	6	7	8					9	10	11	12					13	14	15	16	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td style="border-right: 1px dashed black;">1</td><td style="border-right: 1px dashed black;">2</td><td style="border-right: 1px dashed black;">3</td><td>4</td></tr> <tr><td colspan="4" style="border-top: 1px dashed black; border-bottom: 1px dashed black;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black;">5</td><td style="border-right: 1px dashed black;">6</td><td style="border-right: 1px dashed black;">7</td><td>8</td></tr> <tr><td colspan="4" style="border-top: 1px dashed black; border-bottom: 1px dashed black;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black;">9</td><td style="border-right: 1px dashed black;">10</td><td style="border-right: 1px dashed black;">11</td><td>12</td></tr> <tr><td colspan="4" style="border-top: 1px dashed black; border-bottom: 1px dashed black;"></td></tr> <tr><td style="border-right: 1px dashed black;">13</td><td style="border-right: 1px dashed black;">14</td><td style="border-right: 1px dashed black;">15</td><td>16</td></tr> </table>	1	2	3	4					5	6	7	8					9	10	11	12					13	14	15	16
1	2	3	4																																																						
5	6	7	8																																																						
9	10	11	12																																																						
13	14	15	16																																																						
1	2	3	4																																																						
5	6	7	8																																																						
9	10	11	12																																																						
13	14	15	16																																																						

(2)

Cmp1+Cmp3
 $(n1+n16)+(n3+n14)=(n1+n3)+(n14+n16)=2CC=C;$
 But, $n1+n2+n3+n4=C \dots rw1;$
 Therefore, $n2+n4=n14+n16=c7;$
 But, $n1+n2+n3+n4=C \dots rw1; n13+n14+n15+n16=C \dots rw4;$
 It means $C-(n2+n4)=C-(n14+n16)=C-c7;$
 Therefore, $n1+n3=n13+n15=c8;$
 And $c7+c8=C;$

Cmp6+Cmp8
 $(n6+n11)+(n8+n9)=(n6+n8)+(n9+n11)=2CC=C;$
 But, $n5+n6+n7+n8=C \dots rw2;$
 Therefore, $n5+n7=n9+n11=c9;$
 But, $n5+n6+n7+n8=C \dots rw2; n9+n10+n11+n12=C \dots rw3;$
 It means $C-(n5+n7)=C-(n9+n11)=C-c9;$
 Therefore, $n6+n8=n10+n12=c10;$
 And $c9+c10=C;$

c12+c13
 $n2+n6+n10+n14=C \dots c12$
 $+)n4+n8+n12+n16=C \dots c13$

 $n2+n4+n6+n8+n10+n12+n14+n16=2C$
 But, $n2+n4=n14+n16=c7; n6+n8=n10+n12=c10;$
 Therefore, $2(n2+n4)+2(n6+n8)=2C$
 It means $n2+n4+n6+n8=C;$
 But, $n1+n2+n3+n4=C \dots rw1;$
 Therefore, $n1+n3=n6+n8=c11;$

まとめの2:

$n1+n3=n6+n8=n10+n12=n13+n15=c11=c10=c8=cp3;$
 And then
 $n2+n4=C-(n1+n3)=C-cp3; n5+n7=C-(n6+n8)=C-cp3;$
 $n9+n11=C-(n10+n12)=C-cp3; n14+n16=C-(n13+n15)=C-cp3;$
 Therefore, $n2+n4=n5+n7=n9+n11=n14+n16=cp4;$
 And $cp3+cp4=C;$

残りの2セットは、これまでの2セットを「対称変換」することによって求めることができる。元々が縦横を反対にただけなのだから、主対角線{ $n1, n6, n11, n16$ }について対称的にデータを入れ替えればよい。

- (3) $n1+n5=n10+n14=n11+n15=n4+n8=cp5;$
 $n9+n13=n2+n6=n3+n7=n12+n16=cp6; \text{ and } cp5+cp6=C;$
 (4) $n1+n9=n6+n14=n7+n15=n4+n12=cp7;$
 $n5+n13=n2+n10=n3+n11=n8+n16=cp8; \text{ and } cp7+cp8=C;$

1P/	2P/	3P/	4P/
1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4	1 2 3 4
5 6 7 8	5 6 7 8	5 6 7 8	5 6 7 8
9 10 11 12	9 10 11 12	9 10 11 12	9 10 11 12
13 14 15 16	13 14 15 16	13 14 15 16	13 14 15 16

** 補数ペア 4×2 個が5セットそろった一覧表: ($C=34; CC=17;$) **

- (1) $n1+n2=n7+n8=n11+n12=n13+n14=cp1;$
 $n3+n4=n5+n6=n9+n10=n15+n16=cp2; \text{ and } cp1+cp2=C;$
 (2) $n1+n3=n6+n8=n10+n12=n13+n15=cp3;$
 $n2+n4=n5+n7=n9+n11=n14+n16=cp4; \text{ and } cp3+cp4=C;$
 (3) $n1+n5=n4+n8=n10+n14=n11+n15=cp5;$
 $n2+n6=n3+n7=n9+n13=n12+n16=cp6; \text{ and } cp5+cp6=C;$
 (4) $n1+n9=n4+n12=n6+n14=n7+n15=cp7;$
 $n2+n10=n3+n11=n5+n13=n8+n16=cp8; \text{ and } cp7+cp8=C;$
 (5) $n1+n16=n2+n15=n3+n14=n4+n13=$
 $n5+n12=n6+n11=n7+n10=n8+n9=CC=cp9;$

[OK!]

* Calculated and Listed by Kanji Setsuda on
Nov.28, 2014 with MacOSX 10.10.1 & Xcode 6.1 **

完全型の場合と全く同様に、8個(=4×2個)の「補数ペア」が5セットそろった。

上のリストの(1)~(4)が、n1にからむ「同軸上近傍の4数」に関連した補数である。個々の和は未定なので(和のペアは、足すと34になるが)、この4セットの間では値の入れ替えが可能。そのために例の同朋間の「値の並び替え」が起きる。

最後の(5)の場合は、対称型補数の定義式をそのまま採用している。方陣の幾何学的中心点に対して対称の位置にある2数の和が17になるタイプの不動の補数ペアである。

はたして、自然数1~16は、これに対してどう対応するのだろうか。

条件が完全型の場合と全く同じなのだから、きっと同じ答えを出して来るに違いない。

元々あの自然数の数論的性質は、補数和だけを意識していて、魔方陣のタイプの具体的な違いなどを全然気遣っては居なかったのだから。

これについては、前節「正方連結完全四方陣の構造と補数ペア」の記事を参照してほしい。ここでは、その結論だけを写す。例の「自然数1~16の用意した設計書」である。

** 与条件を満たした5セットの補数ペアを
「どの補数か」が分かる形に再編集したリスト **

5 Groups: (S 9, S25)(S13, S21)(S15, S19)(S16, S18)(S17=S17)

- (1, X) = {(1, 8), (1, 12), (1, 14), (1, 15), (1, 16)};
- (2, X) = {(2, 7), (2, 11), (2, 13), (2, 16), (2, 15)};
- (3, X) = {(3, 6), (3, 10), (3, 16), (3, 13), (3, 14)};
- (4, X) = {(4, 5), (4, 9), (4, 15), (4, 14), (4, 13)};
- (5, X) = {(5, 4), (5, 16), (5, 10), (5, 11), (5, 12)};
- (6, X) = {(6, 3), (6, 15), (6, 9), (6, 12), (6, 11)};
- (7, X) = {(7, 2), (7, 14), (7, 12), (7, 9), (7, 10)};
- (8, X) = {(8, 1), (8, 13), (8, 11), (8, 10), (8, 9)};
- (9, X) = {(9, 16), (9, 4), (9, 6), (9, 7), (9, 8)};
- (10, X) = {(10, 15), (10, 3), (10, 5), (10, 8), (10, 7)};
- (11, X) = {(11, 14), (11, 2), (11, 8), (11, 5), (11, 6)};
- (12, X) = {(12, 13), (12, 1), (12, 7), (12, 6), (12, 5)};
- (13, X) = {(13, 12), (13, 8), (13, 2), (13, 3), (13, 4)};
- (14, X) = {(14, 11), (14, 7), (14, 1), (14, 4), (14, 3)};
- (15, X) = {(15, 10), (15, 6), (15, 4), (15, 1), (15, 2)};
- (16, X) = {(16, 9), (16, 5), (16, 3), (16, 2), (16, 1)};

** Calculated and Listed by Kanji Setsuda on
Nov.14, 2014 with MacOSX 10.10 & Xcode 6.1 **

この表が、各数値の「近傍の4数」と対称的補数の顔ぶれをまさに具体的に決定しているではないか。各方陣は、その指示通りに同軸上と対称点に5数を侍らせていたのだ。

5. これだけわかれば、この記事をもう終りにしてもよいのだが、他に一つの実験を試みたので、それを報告することにしよう。これまでの推理を直接に実証しようという試みだ。

変換構成法を用いて、n1=1の解24個から全原始解384個を復元・再構成してみた。

そのためにオリジナルの変換構成法を新たに工夫した。

各解について自身も含めて16個の変換をどう行うかを示したのが、次の概念図だ。

** 変換法の概念図 : 0#が原型, それを15通りに変換した結果を示してある **

0#	1#	2#	3#
1 2 3 4	2 1 4 3	3 4 1 2	4 3 2 1
5 6 7 8	6 5 8 7	7 8 5 6	8 7 6 5
9 10 11 12	10 9 12 11	11 12 9 10	12 11 10 9
13 14 15 16	14 13 16 15	15 16 13 14	16 15 14 13

4#	5#	6#	7#
5 6 7 8 +---+---+---+ 1 2 3 4 +---+---+---+ 13 14 15 16 +---+---+---+ 9 10 11 12	6 5 8 7 +---+---+---+ 2 1 4 3 +---+---+---+ 14 13 16 15 +---+---+---+ 10 9 12 11	7 8 5 6 +---+---+---+ 3 4 1 2 +---+---+---+ 15 16 13 14 +---+---+---+ 11 12 9 10	8 7 6 5 +---+---+---+ 4 3 2 1 +---+---+---+ 16 15 14 13 +---+---+---+ 12 11 10 9
8#	9#	10#	11#
9 10 11 12 +---+---+---+ 1 2 3 4 +---+---+---+ 13 14 15 16 +---+---+---+ 5 6 7 8	10 9 12 11 +---+---+---+ 2 1 4 3 +---+---+---+ 14 13 16 15 +---+---+---+ 6 5 8 7	11 12 9 10 +---+---+---+ 3 4 1 2 +---+---+---+ 15 16 13 14 +---+---+---+ 7 8 5 6	12 11 10 9 +---+---+---+ 4 3 2 1 +---+---+---+ 16 15 14 13 +---+---+---+ 8 7 6 5
12#	13#	14#	15#
13 14 15 16 +---+---+---+ 9 10 11 12 +---+---+---+ 5 6 7 8 +---+---+---+ 1 2 3 4	14 13 16 15 +---+---+---+ 10 9 12 11 +---+---+---+ 6 5 8 7 +---+---+---+ 2 1 4 3	15 16 13 14 +---+---+---+ 11 12 9 10 +---+---+---+ 7 8 5 6 +---+---+---+ 3 4 1 2	16 15 14 13 +---+---+---+ 12 11 10 9 +---+---+---+ 8 7 6 5 +---+---+---+ 4 3 2 1

数値 1 を n1 から n2, n3, n4, n5, ..., n15, n16 へと順に動かしている。中には単に左右・上下を反転させたものや回転させただけのタイプも含まれているが、相手が原始解なので、これで全然構わない。結果が良ければ全て良しである。

早速にも専用の変換構成プログラムを組んだ。
その実行結果の全部を省略無しに以下に示そう。

**** 変換構成法によって、全原始解384個を復元・再構成した結果のリスト ****

Group 1: (↓各グループの先頭には、元になった n1=1 の解を無変換のまま置いている。)

1#	360#	280#	129#	330#	79#
1 15 12 6 +---+---+---+ 14 4 7 9 +---+---+---+ 8 10 13 3 +---+---+---+ 11 5 2 16	15 1 6 12 +---+---+---+ 4 14 9 7 +---+---+---+ 10 8 3 13 +---+---+---+ 5 11 16 2	12 6 1 15 +---+---+---+ 7 9 14 4 +---+---+---+ 13 3 8 10 +---+---+---+ 2 16 11 5	6 12 15 1 +---+---+---+ 9 7 4 14 +---+---+---+ 3 13 10 8 +---+---+---+ 16 2 5 11	14 4 7 9 +---+---+---+ 1 15 12 6 +---+---+---+ 11 5 2 16 +---+---+---+ 8 10 13 3	4 14 9 7 +---+---+---+ 15 1 6 12 +---+---+---+ 5 11 16 2 +---+---+---+ 10 8 3 13
159#	202#	183#	226#	306#	55#
7 9 14 4 +---+---+---+ 12 6 1 15 +---+---+---+ 2 16 11 5 +---+---+---+ 13 3 8 10	9 7 4 14 +---+---+---+ 6 12 15 1 +---+---+---+ 16 2 5 11 +---+---+---+ 3 13 10 8	8 10 13 3 +---+---+---+ 11 5 2 16 +---+---+---+ 1 15 12 6 +---+---+---+ 14 4 7 9	10 8 3 13 +---+---+---+ 5 11 16 2 +---+---+---+ 15 1 6 12 +---+---+---+ 4 14 9 7	13 3 8 10 +---+---+---+ 2 16 11 5 +---+---+---+ 12 6 1 15 +---+---+---+ 7 9 14 4	3 13 10 8 +---+---+---+ 16 2 5 11 +---+---+---+ 6 12 15 1 +---+---+---+ 9 7 4 14
256#	105#	25#	384#		
11 5 2 16 +---+---+---+ 8 10 13 3 +---+---+---+ 14 4 7 9 +---+---+---+ 1 15 12 6	5 11 16 2 +---+---+---+ 10 8 3 13 +---+---+---+ 4 14 9 7 +---+---+---+ 15 1 6 12	2 16 11 5 +---+---+---+ 13 3 8 10 +---+---+---+ 7 9 14 4 +---+---+---+ 12 6 1 15	16 2 5 11 +---+---+---+ 3 13 10 8 +---+---+---+ 9 7 4 14 +---+---+---+ 6 12 15 1		

Group 2: (↓各グループの先頭には、元になった n1=1 の解を無変換のまま置いている。)

2#	359#	184#	225#	329#	80#
1 15 8 10 14 4 11 5 12 6 13 3 7 9 2 16	15 1 10 8 4 14 5 11 6 12 3 13 9 7 16 2	8 10 1 15 11 5 14 4 13 3 12 6 2 16 7 9	10 8 15 1 5 11 4 14 3 13 6 12 16 2 9 7	14 4 11 5 1 15 8 10 7 9 2 16 12 6 13 3	4 14 5 11 15 1 10 8 9 7 16 2 6 12 3 13
255#	106#	279#	130#	305#	56#
11 5 14 4 8 10 1 15 2 16 7 9 13 3 12 6	5 11 4 14 10 8 15 1 16 2 9 7 3 13 6 12	12 6 13 3 7 9 2 16 1 15 8 10 14 4 11 5	6 12 3 13 9 7 16 2 15 1 10 8 4 14 5 11	13 3 12 6 2 16 7 9 8 10 1 15 11 5 14 4	3 13 6 12 16 2 9 7 10 8 15 1 5 11 4 14
160#	201#	26#	383#		
7 9 2 16 12 6 13 3 14 4 11 5 1 15 8 10	9 7 16 2 6 12 3 13 4 14 5 11 15 1 10 8	2 16 7 9 13 3 12 6 11 5 14 4 8 10 1 15	16 2 9 7 3 13 6 12 5 11 4 14 10 8 15 1		

Group 3:

3#	358#	328#	81#	282#	127#
1 15 14 4 12 6 7 9 8 10 11 5 13 3 2 16	15 1 4 14 6 12 9 7 10 8 5 11 3 13 16 2	14 4 1 15 7 9 12 6 11 5 8 10 2 16 13 3	4 14 15 1 9 7 6 12 5 11 10 8 16 2 3 13	12 6 7 9 1 15 14 4 13 3 2 16 8 10 11 5	6 12 9 7 15 1 4 14 3 13 16 2 10 8 5 11
157#	204#	181#	228#	258#	103#
7 9 12 6 14 4 1 15 2 16 13 3 11 5 8 10	9 7 6 12 4 14 15 1 16 2 3 13 5 11 10 8	8 10 11 5 13 3 2 16 1 15 14 4 12 6 7 9	10 8 5 11 3 13 16 2 15 1 4 14 6 12 9 7	11 5 8 10 2 16 13 3 14 4 1 15 7 9 12 6	5 11 10 8 16 2 3 13 4 14 15 1 9 7 6 12
304#	57#	27#	382#		
13 3 2 16 8 10 11 5 12 6 7 9 1 15 14 4	3 13 16 2 10 8 5 11 6 12 9 7 15 1 4 14	2 16 13 3 11 5 8 10 7 9 12 6 14 4 1 15	16 2 3 13 5 11 10 8 9 7 6 12 4 14 15 1		

Group 4:

4#	357#	182#	227#	281#	128#
1 15 8 10 12 6 13 3 14 4 11 5 7 9 2 16	15 1 10 8 6 12 3 13 4 14 5 11 9 7 16 2	8 10 1 15 13 3 12 6 11 5 14 4 2 16 7 9	10 8 15 1 3 13 6 12 5 11 4 14 16 2 9 7	12 6 13 3 1 15 8 10 7 9 2 16 14 4 11 5	6 12 3 13 15 1 10 8 9 7 16 2 4 14 5 11
303#	58#	327#	82#	257#	104#
13 3 12 6 8 10 1 15 2 16 7 9 11 5 14 4	3 13 6 12 10 8 15 1 16 2 9 7 5 11 4 14	14 4 11 5 7 9 2 16 1 15 8 10 12 6 13 3	4 14 5 11 9 7 16 2 15 1 10 8 6 12 3 13	11 5 14 4 2 16 7 9 8 10 1 15 13 3 12 6	5 11 4 14 16 2 9 7 10 8 15 1 3 13 6 12

(各解の右肩にある番号#は、原始解のリストに当たって調べた解番号である)

158#	203#	28#	381#
7 9 2 16	9 7 16 2	2 16 7 9	16 2 9 7
14 4 11 5	4 14 5 11	11 5 14 4	5 11 4 14
12 6 13 3	6 12 3 13	13 3 12 6	3 13 6 12
1 15 8 10	15 1 10 8	8 10 1 15	10 8 15 1

Group 5:

5#	356#	326#	83#	186#	223#
1 15 14 4	15 1 4 14	14 4 1 15	4 14 15 1	8 10 11 5	10 8 5 11
8 10 11 5	10 8 5 11	11 5 8 10	5 11 10 8	1 15 14 4	15 1 4 14
12 6 7 9	6 12 9 7	7 9 12 6	9 7 6 12	13 3 2 16	3 13 16 2
13 3 2 16	3 13 16 2	2 16 13 3	16 2 3 13	12 6 7 9	6 12 9 7
253#	108#	277#	132#	162#	199#
11 5 8 10	5 11 10 8	12 6 7 9	6 12 9 7	7 9 12 6	9 7 6 12
14 4 1 15	4 14 15 1	13 3 2 16	3 13 16 2	2 16 13 3	16 2 3 13
2 16 13 3	16 2 3 13	1 15 14 4	15 1 4 14	14 4 1 15	4 14 15 1
7 9 12 6	9 7 6 12	8 10 11 5	10 8 5 11	11 5 8 10	5 11 10 8
302#	59#	29#	380#		
13 3 2 16	3 13 16 2	2 16 13 3	16 2 3 13		
12 6 7 9	6 12 9 7	7 9 12 6	9 7 6 12		
8 10 11 5	10 8 5 11	11 5 8 10	5 11 10 8		
1 15 14 4	15 1 4 14	14 4 1 15	4 14 15 1		

Group 6:

6#	355#	278#	131#	185#	224#
1 15 12 6	15 1 6 12	12 6 1 15	6 12 15 1	8 10 13 3	10 8 3 13
8 10 13 3	10 8 3 13	13 3 8 10	3 13 10 8	1 15 12 6	15 1 6 12
14 4 7 9	4 14 9 7	7 9 14 4	9 7 4 14	11 5 2 16	5 11 16 2
11 5 2 16	5 11 16 2	2 16 11 5	16 2 5 11	14 4 7 9	4 14 9 7
301#	60#	325#	84#	161#	200#
13 3 8 10	3 13 10 8	14 4 7 9	4 14 9 7	7 9 14 4	9 7 4 14
12 6 1 15	6 12 15 1	11 5 2 16	5 11 16 2	2 16 11 5	16 2 5 11
2 16 11 5	16 2 5 11	1 15 12 6	15 1 6 12	12 6 1 15	6 12 15 1
7 9 14 4	9 7 4 14	8 10 13 3	10 8 3 13	13 3 8 10	3 13 10 8
254#	107#	30#	379#		
11 5 2 16	5 11 16 2	2 16 11 5	16 2 5 11		
14 4 7 9	4 14 9 7	7 9 14 4	9 7 4 14		
8 10 13 3	10 8 3 13	13 3 8 10	3 13 10 8		
1 15 12 6	15 1 6 12	12 6 1 15	6 12 15 1		

Group 7:

7#	336#	274#	153#	354#	73#
1 14 12 7	14 1 7 12	12 7 1 14	7 12 14 1	15 4 6 9	4 15 9 6
15 4 6 9	4 15 9 6	6 9 15 4	9 6 4 15	1 14 12 7	14 1 7 12
8 11 13 2	11 8 2 13	13 2 8 11	2 13 11 8	10 5 3 16	5 10 16 3
10 5 3 16	5 10 16 3	3 16 10 5	16 3 5 10	8 11 13 2	11 8 2 13
135#	208#	177#	250#	312#	31#
6 9 15 4	9 6 4 15	8 11 13 2	11 8 2 13	13 2 8 11	2 13 11 8
12 7 1 14	7 12 14 1	10 5 3 16	5 10 16 3	3 16 10 5	16 3 5 10
3 16 10 5	16 3 5 10	1 14 12 7	14 1 7 12	12 7 1 14	7 12 14 1
13 2 8 11	2 13 11 8	15 4 6 9	4 15 9 6	6 9 15 4	9 6 4 15
232#	111#	49#	378#		
10 5 3 16	5 10 16 3	3 16 10 5	16 3 5 10		
8 11 13 2	11 8 2 13	13 2 8 11	2 13 11 8		
15 4 6 9	4 15 9 6	6 9 15 4	9 6 4 15		
1 14 12 7	14 1 7 12	12 7 1 14	7 12 14 1		

Group 8: (各解の右肩にある番号#は、原始解のリストに当たって調べた解番号である)

8#	335#	178#	249#	353#	74#
1 14 8 11	14 1 11 8	8 11 1 14	11 8 14 1	15 4 10 5	4 15 5 10
15 4 10 5	4 15 5 10	10 5 15 4	5 10 4 15	1 14 8 11	14 1 11 8
12 7 13 2	7 12 2 13	13 2 12 7	2 13 7 12	6 9 3 16	9 6 16 3
6 9 3 16	9 6 16 3	3 16 6 9	16 3 9 6	12 7 13 2	7 12 2 13
231#	112#	273#	154#	311#	32#
10 5 15 4	5 10 4 15	12 7 13 2	7 12 2 13	13 2 12 7	2 13 7 12
8 11 1 14	11 8 14 1	6 9 3 16	9 6 16 3	3 16 6 9	16 3 9 6
3 16 6 9	16 3 9 6	1 14 8 11	14 1 11 8	8 11 1 14	11 8 14 1
13 2 12 7	2 13 7 12	15 4 10 5	4 15 5 10	10 5 15 4	5 10 4 15
136#	207#	50#	377#		
6 9 3 16	9 6 16 3	3 16 6 9	16 3 9 6		
12 7 13 2	7 12 2 13	13 2 12 7	2 13 7 12		
15 4 10 5	4 15 5 10	10 5 15 4	5 10 4 15		
1 14 8 11	14 1 11 8	8 11 1 14	11 8 14 1		

Group 9:

9#	334#	352#	75#	276#	151#
1 14 15 4	14 1 4 15	15 4 1 14	4 15 14 1	12 7 6 9	7 12 9 6
12 7 6 9	7 12 9 6	6 9 12 7	9 6 7 12	1 14 15 4	14 1 4 15
8 11 10 5	11 8 5 10	10 5 8 11	5 10 11 8	13 2 3 16	2 13 16 3
13 2 3 16	2 13 16 3	3 16 13 2	16 3 2 13	8 11 10 5	11 8 5 10
133#	210#	175#	252#	234#	109#
6 9 12 7	9 6 7 12	8 11 10 5	11 8 5 10	10 5 8 11	5 10 11 8
15 4 1 14	4 15 14 1	13 2 3 16	2 13 16 3	3 16 13 2	16 3 2 13
3 16 13 2	16 3 2 13	1 14 15 4	14 1 4 15	15 4 1 14	4 15 14 1
10 5 8 11	5 10 11 8	12 7 6 9	7 12 9 6	6 9 12 7	9 6 7 12
310#	33#	51#	376#		
13 2 3 16	2 13 16 3	3 16 13 2	16 3 2 13		
8 11 10 5	11 8 5 10	10 5 8 11	5 10 11 8		
12 7 6 9	7 12 9 6	6 9 12 7	9 6 7 12		
1 14 15 4	14 1 4 15	15 4 1 14	4 15 14 1		

Group 10:

10#	333#	176#	251#	275#	152#
1 14 8 11	14 1 11 8	8 11 1 14	11 8 14 1	12 7 13 2	7 12 2 13
12 7 13 2	7 12 2 13	13 2 12 7	2 13 7 12	1 14 8 11	14 1 11 8
15 4 10 5	4 15 5 10	10 5 15 4	5 10 4 15	6 9 3 16	9 6 16 3
6 9 3 16	9 6 16 3	3 16 6 9	16 3 9 6	15 4 10 5	4 15 5 10
309#	34#	351#	76#	233#	110#
13 2 12 7	2 13 7 12	15 4 10 5	4 15 5 10	10 5 15 4	5 10 4 15
8 11 1 14	11 8 14 1	6 9 3 16	9 6 16 3	3 16 6 9	16 3 9 6
3 16 6 9	16 3 9 6	1 14 8 11	14 1 11 8	8 11 1 14	11 8 14 1
10 5 15 4	5 10 4 15	12 7 13 2	7 12 2 13	13 2 12 7	2 13 7 12
134#	209#	52#	375#		
6 9 3 16	9 6 16 3	3 16 6 9	16 3 9 6		
15 4 10 5	4 15 5 10	10 5 15 4	5 10 4 15		
12 7 13 2	7 12 2 13	13 2 12 7	2 13 7 12		
1 14 8 11	14 1 11 8	8 11 1 14	11 8 14 1		

Group 11:

11#	332#	350#	77#	180#	247#
1 14 15 4	14 1 4 15	15 4 1 14	4 15 14 1	8 11 10 5	11 8 5 10
8 11 10 5	11 8 5 10	10 5 8 11	5 10 11 8	1 14 15 4	14 1 4 15
12 7 6 9	7 12 9 6	6 9 12 7	9 6 7 12	13 2 3 16	2 13 16 3
13 2 3 16	2 13 16 3	3 16 13 2	16 3 2 13	12 7 6 9	7 12 9 6
229#	114#	271#	156#	138#	205#
10 5 8 11	5 10 11 8	12 7 6 9	7 12 9 6	6 9 12 7	9 6 7 12
15 4 1 14	4 15 14 1	13 2 3 16	2 13 16 3	3 16 13 2	16 3 2 13
3 16 13 2	16 3 2 13	1 14 15 4	14 1 4 15	15 4 1 14	4 15 14 1
6 9 12 7	9 6 7 12	8 11 10 5	11 8 5 10	10 5 8 11	5 10 11 8

308#	35#	53#	374#
13 2 3 16	2 13 16 3	3 16 13 2	16 3 2 13
12 7 6 9	7 12 9 6	6 9 12 7	9 6 7 12
8 11 10 5	11 8 5 10	10 5 8 11	5 10 11 8
1 14 15 4	14 1 4 15	15 4 1 14	4 15 14 1

Group 12:

12#	331#	272#	155#	179#	248#
1 14 12 7	14 1 7 12	12 7 1 14	7 12 14 1	8 11 13 2	11 8 2 13
8 11 13 2	11 8 2 13	13 2 8 11	2 13 11 8	1 14 12 7	14 1 7 12
15 4 6 9	4 15 9 6	6 9 15 4	9 6 4 15	10 5 3 16	5 10 16 3
10 5 3 16	5 10 16 3	3 16 10 5	16 3 5 10	15 4 6 9	4 15 9 6

307#	36#	349#	78#	137#	206#
13 2 8 11	2 13 11 8	15 4 6 9	4 15 9 6	6 9 15 4	9 6 4 15
12 7 1 14	7 12 14 1	10 5 3 16	5 10 16 3	3 16 10 5	16 3 5 10
3 16 10 5	16 3 5 10	1 14 12 7	14 1 7 12	12 7 1 14	7 12 14 1
6 9 15 4	9 6 4 15	8 11 13 2	11 8 2 13	13 2 8 11	2 13 11 8

230#	113#	54#	373#
10 5 3 16	5 10 16 3	3 16 10 5	16 3 5 10
15 4 6 9	4 15 9 6	6 9 15 4	9 6 4 15
8 11 13 2	11 8 2 13	13 2 8 11	2 13 11 8
1 14 12 7	14 1 7 12	12 7 1 14	7 12 14 1

Group 13:

13#	288#	322#	147#	348#	121#
1 12 14 7	12 1 7 14	14 7 1 12	7 14 12 1	15 6 4 9	6 15 9 4
15 6 4 9	6 15 9 4	4 9 15 6	9 4 6 15	1 12 14 7	12 1 7 14
8 13 11 2	13 8 2 11	11 2 8 13	2 11 13 8	10 3 5 16	3 10 16 5
10 3 5 16	3 10 16 5	5 16 10 3	16 5 3 10	8 13 11 2	13 8 2 11

87#	214#	171#	298#	264#	37#
4 9 15 6	9 4 6 15	8 13 11 2	13 8 2 11	11 2 8 13	2 11 13 8
14 7 1 12	7 14 12 1	10 3 5 16	3 10 16 5	5 16 10 3	16 5 3 10
5 16 10 3	16 5 3 10	1 12 14 7	12 1 7 14	14 7 1 12	7 14 12 1
11 2 8 13	2 11 13 8	15 6 4 9	6 15 9 4	4 9 15 6	9 4 6 15

238#	63#	97#	372#
10 3 5 16	3 10 16 5	5 16 10 3	16 5 3 10
8 13 11 2	13 8 2 11	11 2 8 13	2 11 13 8
15 6 4 9	6 15 9 4	4 9 15 6	9 4 6 15
1 12 14 7	12 1 7 14	14 7 1 12	7 14 12 1

Group 14:

14#	287#	172#	297#	347#	122#
1 12 8 13	12 1 13 8	8 13 1 12	13 8 12 1	15 6 10 3	6 15 3 10
15 6 10 3	6 15 3 10	10 3 15 6	3 10 6 15	1 12 8 13	12 1 13 8
14 7 11 2	7 14 2 11	11 2 14 7	2 11 7 14	4 9 5 16	9 4 16 5
4 9 5 16	9 4 16 5	5 16 4 9	16 5 9 4	14 7 11 2	7 14 2 11

237#	64#	321#	148#	263#	38#
10 3 15 6	3 10 6 15	14 7 11 2	7 14 2 11	11 2 14 7	2 11 7 14
8 13 1 12	13 8 12 1	4 9 5 16	9 4 16 5	5 16 4 9	16 5 9 4
5 16 4 9	16 5 9 4	1 12 8 13	12 1 13 8	8 13 1 12	13 8 12 1
11 2 14 7	2 11 7 14	15 6 10 3	6 15 3 10	10 3 15 6	3 10 6 15

88#	213#	98#	371#
4 9 5 16	9 4 16 5	5 16 4 9	16 5 9 4
14 7 11 2	7 14 2 11	11 2 14 7	2 11 7 14
15 6 10 3	6 15 3 10	10 3 15 6	3 10 6 15
1 12 8 13	12 1 13 8	8 13 1 12	13 8 12 1

Group 15: (各解の右肩にある番号#は、原始解のリストに当たって調べた解番号である)

15#	286#	346#	123#	324#	145#
1 12 15 6	12 1 6 15	15 6 1 12	6 15 12 1	14 7 4 9	7 14 9 4
14 7 4 9	7 14 9 4	4 9 14 7	9 4 7 14	1 12 15 6	12 1 6 15
8 13 10 3	13 8 3 10	10 3 8 13	3 10 13 8	11 2 5 16	2 11 16 5
11 2 5 16	2 11 16 5	5 16 11 2	16 5 2 11	8 13 10 3	13 8 3 10
85#	216#	169#	300#	240#	61#
4 9 14 7	9 4 7 14	8 13 10 3	13 8 3 10	10 3 8 13	3 10 13 8
15 6 1 12	6 15 12 1	11 2 5 16	2 11 16 5	5 16 11 2	16 5 2 11
5 16 11 2	16 5 2 11	1 12 15 6	12 1 6 15	15 6 1 12	6 15 12 1
10 3 8 13	3 10 13 8	14 7 4 9	7 14 9 4	4 9 14 7	9 4 7 14
262#	39#	99#	370#		
11 2 5 16	2 11 16 5	5 16 11 2	16 5 2 11		
8 13 10 3	13 8 3 10	10 3 8 13	3 10 13 8		
14 7 4 9	7 14 9 4	4 9 14 7	9 4 7 14		
1 12 15 6	12 1 6 15	15 6 1 12	6 15 12 1		

Group 16:

16#	285#	170#	299#	323#	146#
1 12 8 13	12 1 13 8	8 13 1 12	13 8 12 1	14 7 11 2	7 14 2 11
14 7 11 2	7 14 2 11	11 2 14 7	2 11 7 14	1 12 8 13	12 1 13 8
15 6 10 3	6 15 3 10	10 3 15 6	3 10 6 15	4 9 5 16	9 4 16 5
4 9 5 16	9 4 16 5	5 16 4 9	16 5 9 4	15 6 10 3	6 15 3 10
261#	40#	345#	124#	239#	62#
11 2 14 7	2 11 7 14	15 6 10 3	6 15 3 10	10 3 15 6	3 10 6 15
8 13 1 12	13 8 12 1	4 9 5 16	9 4 16 5	5 16 4 9	16 5 9 4
5 16 4 9	16 5 9 4	1 12 8 13	12 1 13 8	8 13 1 12	13 8 12 1
10 3 15 6	3 10 6 15	14 7 11 2	7 14 2 11	11 2 14 7	2 11 7 14
86#	215#	100#	369#		
4 9 5 16	9 4 16 5	5 16 4 9	16 5 9 4		
15 6 10 3	6 15 3 10	10 3 15 6	3 10 6 15		
14 7 11 2	7 14 2 11	11 2 14 7	2 11 7 14		
1 12 8 13	12 1 13 8	8 13 1 12	13 8 12 1		

Group 17:

17#	284#	344#	125#	174#	295#
1 12 15 6	12 1 6 15	15 6 1 12	6 15 12 1	8 13 10 3	13 8 3 10
8 13 10 3	13 8 3 10	10 3 8 13	3 10 13 8	1 12 15 6	12 1 6 15
14 7 4 9	7 14 9 4	4 9 14 7	9 4 7 14	11 2 5 16	2 11 16 5
11 2 5 16	2 11 16 5	5 16 11 2	16 5 2 11	14 7 4 9	7 14 9 4
235#	66#	319#	150#	90#	211#
10 3 8 13	3 10 13 8	14 7 4 9	7 14 9 4	4 9 14 7	9 4 7 14
15 6 1 12	6 15 12 1	11 2 5 16	2 11 16 5	5 16 11 2	16 5 2 11
5 16 11 2	16 5 2 11	1 12 15 6	12 1 6 15	15 6 1 12	6 15 12 1
4 9 14 7	9 4 7 14	8 13 10 3	13 8 3 10	10 3 8 13	3 10 13 8
260#	41#	101#	368#		
11 2 5 16	2 11 16 5	5 16 11 2	16 5 2 11		
14 7 4 9	7 14 9 4	4 9 14 7	9 4 7 14		
8 13 10 3	13 8 3 10	10 3 8 13	3 10 13 8		
1 12 15 6	12 1 6 15	15 6 1 12	6 15 12 1		

Group 18:

18#	283#	320#	149#	173#	296#
1 12 14 7	12 1 7 14	14 7 1 12	7 14 12 1	8 13 11 2	13 8 2 11
8 13 11 2	13 8 2 11	11 2 8 13	2 11 13 8	1 12 14 7	12 1 7 14
15 6 4 9	6 15 9 4	4 9 15 6	9 4 6 15	10 3 5 16	3 10 16 5
10 3 5 16	3 10 16 5	5 16 10 3	16 5 3 10	15 6 4 9	6 15 9 4
259#	42#	343#	126#	89#	212#
11 2 8 13	2 11 13 8	15 6 4 9	6 15 9 4	4 9 15 6	9 4 6 15
14 7 1 12	7 14 12 1	10 3 5 16	3 10 16 5	5 16 10 3	16 5 3 10
5 16 10 3	16 5 3 10	1 12 14 7	12 1 7 14	14 7 1 12	7 14 12 1
4 9 15 6	9 4 6 15	8 13 11 2	13 8 2 11	11 2 8 13	2 11 13 8

236#	65#	102#	367#
10 3 5 16	3 10 16 5	5 16 10 3	16 5 3 10
15 6 4 9	6 15 9 4	4 9 15 6	9 4 6 15
8 13 11 2	13 8 2 11	11 2 8 13	2 11 13 8
1 12 14 7	12 1 7 14	14 7 1 12	7 14 12 1

Group 19:

19#	192#	316#	243#	342#	217#
1 8 14 11	8 1 11 14	14 11 1 8	11 14 8 1	15 10 4 5	10 15 5 4
15 10 4 5	10 15 5 4	4 5 15 10	5 4 10 15	1 8 14 11	8 1 11 14
12 13 7 2	13 12 2 7	7 2 12 13	2 7 13 12	6 3 9 16	3 6 16 9
6 3 9 16	3 6 16 9	9 16 6 3	16 9 3 6	12 13 7 2	13 12 2 7
93#	118#	267#	292#	168#	43#
4 5 15 10	5 4 10 15	12 13 7 2	13 12 2 7	7 2 12 13	2 7 13 12
14 11 1 8	11 14 8 1	6 3 9 16	3 6 16 9	9 16 6 3	16 9 3 6
9 16 6 3	16 9 3 6	1 8 14 11	8 1 11 14	14 11 1 8	11 14 8 1
7 2 12 13	2 7 13 12	15 10 4 5	10 15 5 4	4 5 15 10	5 4 10 15
142#	69#	193#	366#		
6 3 9 16	3 6 16 9	9 16 6 3	16 9 3 6		
12 13 7 2	13 12 2 7	7 2 12 13	2 7 13 12		
15 10 4 5	10 15 5 4	4 5 15 10	5 4 10 15		
1 8 14 11	8 1 11 14	14 11 1 8	11 14 8 1		

Group 20:

20#	191#	268#	291#	341#	218#
1 8 12 13	8 1 13 12	12 13 1 8	13 12 8 1	15 10 6 3	10 15 3 6
15 10 6 3	10 15 3 6	6 3 15 10	3 6 10 15	1 8 12 13	8 1 13 12
14 11 7 2	11 14 2 7	7 2 14 11	2 7 11 14	4 5 9 16	5 4 16 9
4 5 9 16	5 4 16 9	9 16 4 5	16 9 5 4	14 11 7 2	11 14 2 7
141#	70#	315#	244#	167#	44#
6 3 15 10	3 6 10 15	14 11 7 2	11 14 2 7	7 2 14 11	2 7 11 14
12 13 1 8	13 12 8 1	4 5 9 16	5 4 16 9	9 16 4 5	16 9 5 4
9 16 4 5	16 9 5 4	1 8 12 13	8 1 13 12	12 13 1 8	13 12 8 1
7 2 14 11	2 7 11 14	15 10 6 3	10 15 3 6	6 3 15 10	3 6 10 15
94#	117#	194#	365#		
4 5 9 16	5 4 16 9	9 16 4 5	16 9 5 4		
14 11 7 2	11 14 2 7	7 2 14 11	2 7 11 14		
15 10 6 3	10 15 3 6	6 3 15 10	3 6 10 15		
1 8 12 13	8 1 13 12	12 13 1 8	13 12 8 1		

Group 21:

21#	190#	340#	219#	318#	241#
1 8 15 10	8 1 10 15	15 10 1 8	10 15 8 1	14 11 4 5	11 14 5 4
14 11 4 5	11 14 5 4	4 5 14 11	5 4 11 14	1 8 15 10	8 1 10 15
12 13 6 3	13 12 3 6	6 3 12 13	3 6 13 12	7 2 9 16	2 7 16 9
7 2 9 16	2 7 16 9	9 16 7 2	16 9 2 7	12 13 6 3	13 12 3 6
91#	120#	265#	294#	144#	67#
4 5 14 11	5 4 11 14	12 13 6 3	13 12 3 6	6 3 12 13	3 6 13 12
15 10 1 8	10 15 8 1	7 2 9 16	2 7 16 9	9 16 7 2	16 9 2 7
9 16 7 2	16 9 2 7	1 8 15 10	8 1 10 15	15 10 1 8	10 15 8 1
6 3 12 13	3 6 13 12	14 11 4 5	11 14 5 4	4 5 14 11	5 4 11 14
166#	45#	195#	364#		
7 2 9 16	2 7 16 9	9 16 7 2	16 9 2 7		
12 13 6 3	13 12 3 6	6 3 12 13	3 6 13 12		
14 11 4 5	11 14 5 4	4 5 14 11	5 4 11 14		
1 8 15 10	8 1 10 15	15 10 1 8	10 15 8 1		

Group 22: (各解の右肩にある番号#は、原始解のリストに当たって調べた解番号である)

328#	81#	3#	358#
14 4 1 15	4 14 15 1	1 15 14 4	15 1 4 14
7 9 12 6	9 7 6 12	12 6 7 9	6 12 9 7
11 5 8 10	5 11 10 8	8 10 11 5	10 8 5 11
2 16 13 3	16 2 3 13	13 3 2 16	3 13 16 2

Group 4:

28#	381#	158#	203#	257#	104#
2 16 7 9	16 2 9 7	7 9 2 16	9 7 16 2	11 5 14 4	5 11 4 14
11 5 14 4	5 11 4 14	14 4 11 5	4 14 5 11	2 16 7 9	16 2 9 7
13 3 12 6	3 13 6 12	12 6 13 3	6 12 3 13	8 10 1 15	10 8 15 1
8 10 1 15	10 8 15 1	1 15 8 10	15 1 10 8	13 3 12 6	3 13 6 12
327#	82#	303#	58#	281#	128#
14 4 11 5	4 14 5 11	13 3 12 6	3 13 6 12	12 6 13 3	6 12 3 13
7 9 2 16	9 7 16 2	8 10 1 15	10 8 15 1	1 15 8 10	15 1 10 8
1 15 8 10	15 1 10 8	2 16 7 9	16 2 9 7	7 9 2 16	9 7 16 2
12 6 13 3	6 12 3 13	11 5 14 4	5 11 4 14	14 4 11 5	4 14 5 11
182#	227#	4#	357#		
8 10 1 15	10 8 15 1	1 15 8 10	15 1 10 8		
13 3 12 6	3 13 6 12	12 6 13 3	6 12 3 13		
11 5 14 4	5 11 4 14	14 4 11 5	4 14 5 11		
2 16 7 9	16 2 9 7	7 9 2 16	9 7 16 2		

Group 5:

29#	380#	302#	59#	162#	199#
2 16 13 3	16 2 3 13	13 3 2 16	3 13 16 2	7 9 12 6	9 7 6 12
7 9 12 6	9 7 6 12	12 6 7 9	6 12 9 7	2 16 13 3	16 2 3 13
11 5 8 10	5 11 10 8	8 10 11 5	10 8 5 11	14 4 1 15	4 14 15 1
14 4 1 15	4 14 15 1	1 15 14 4	15 1 4 14	11 5 8 10	5 11 10 8
277#	132#	253#	108#	186#	223#
12 6 7 9	6 12 9 7	11 5 8 10	5 11 10 8	8 10 11 5	10 8 5 11
13 3 2 16	3 13 16 2	14 4 1 15	4 14 15 1	1 15 14 4	15 1 4 14
1 15 14 4	15 1 4 14	2 16 13 3	16 2 3 13	13 3 2 16	3 13 16 2
8 10 11 5	10 8 5 11	7 9 12 6	9 7 6 12	12 6 7 9	6 12 9 7
326#	83#	5#	356#		
14 4 1 15	4 14 15 1	1 15 14 4	15 1 4 14		
11 5 8 10	5 11 10 8	8 10 11 5	10 8 5 11		
7 9 12 6	9 7 6 12	12 6 7 9	6 12 9 7		
2 16 13 3	16 2 3 13	13 3 2 16	3 13 16 2		

Group 6:

30#	379#	254#	107#	161#	200#
2 16 11 5	16 2 5 11	11 5 2 16	5 11 16 2	7 9 14 4	9 7 4 14
7 9 14 4	9 7 4 14	14 4 7 9	4 14 9 7	2 16 11 5	16 2 5 11
13 3 8 10	3 13 10 8	8 10 13 3	10 8 3 13	12 6 1 15	6 12 15 1
12 6 1 15	6 12 15 1	1 15 12 6	15 1 6 12	13 3 8 10	3 13 10 8
325#	84#	301#	60#	185#	224#
14 4 7 9	4 14 9 7	13 3 8 10	3 13 10 8	8 10 13 3	10 8 3 13
11 5 2 16	5 11 16 2	12 6 1 15	6 12 15 1	1 15 12 6	15 1 6 12
1 15 12 6	15 1 6 12	2 16 11 5	16 2 5 11	11 5 2 16	5 11 16 2
8 10 13 3	10 8 3 13	7 9 14 4	9 7 4 14	14 4 7 9	4 14 9 7
278#	131#	6#	355#		
12 6 1 15	6 12 15 1	1 15 12 6	15 1 6 12		
13 3 8 10	3 13 10 8	8 10 13 3	10 8 3 13		
7 9 14 4	9 7 4 14	14 4 7 9	4 14 9 7		
2 16 11 5	16 2 5 11	11 5 2 16	5 11 16 2		

Group 7:

31#	312#	250#	177#	378#	49#
2 13 11 8	13 2 8 11	11 8 2 13	8 11 13 2	16 3 5 10	3 16 10 5
16 3 5 10	3 16 10 5	5 10 16 3	10 5 3 16	2 13 11 8	13 2 8 11
7 12 14 1	12 7 1 14	14 1 7 12	1 14 12 7	9 6 4 15	6 9 15 4
9 6 4 15	6 9 15 4	4 15 9 6	15 4 6 9	7 12 14 1	12 7 1 14
111#	232#	153#	274#	336#	7#
5 10 16 3	10 5 3 16	7 12 14 1	12 7 1 14	14 1 7 12	1 14 12 7
11 8 2 13	8 11 13 2	9 6 4 15	6 9 15 4	4 15 9 6	15 4 6 9
4 15 9 6	15 4 6 9	2 13 11 8	13 2 8 11	11 8 2 13	8 11 13 2
14 1 7 12	1 14 12 7	16 3 5 10	3 16 10 5	5 10 16 3	10 5 3 16

7. 補数対称型四方陣の標準解は、48個あることが知られている。

原始解384個の中から「正規化」によって単なる「反転形」や「回転形」を省くと、48個になる。8分の1になる。

では、標準解の総数48個の意味は、いったい何か？

$48 = 2^4 \times 3$; と因数に分解してみても、このままでは何の意味があるのか、不明だ。ここは、原始解分析で得た知識を活用して理解する以外には無いと思われる。

$384 = {}_4P_4 \times 16 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 16$ の「8分の1」なのである。

ゆえに上の式の因数 4×2 を省いて、 $3 \times 2^4 \times 1 = 48$; なのである（しかし、この結果に構造的な意味はもはや見出せない。真相は正規化のために隠されてしまう。…）。

こうした全ては、原始解を研究してみて初めてわかったことであった。

しかし、これによって「大基本解」が何故に3個なのかが、少しはわかった気がする。

8. 最後に「おまけ」として、補数対称型四方陣の解を手作りする方法を紹介する。

良く知られている「構成法」とは、全然別の方法だ。

コンピュータなど一切使わずに、記憶力と手計算だけで作る。

(1) 最初のスタートは、予め記憶しておかなければならない。

数値1を基本図の原点 n1 に置いて、その同軸上の近傍に {15, 14, 12, 8} を置く。

(その並べ方は、自由にして良い。) さらに方陣の幾何学的中心に対して1と対称の位置にある右下の n16に「1の補数」である16を置く。

**** How to make the Solution of 'Self-complementary' MS44 by your own hand ****

[Start] Step 1

1	15	12	
14			
8			
			16

Step 2

1	15	12	
14			9
8			3
	5	2	16

Step 3

1	15	12	6
14			9
8			3
11	5	2	16

Step 4

1	15	12	6
14		7	9
8		13	3
11	5	2	16

[Goal] Step 5

1	15	12	6
14	4	7	9
8	10	13	3
11	5	2	16

(2) 後は、全て計算で決めて行く。まずは、対称型補数の定和式を使って、

$15+x=17 \therefore x=2$; $12+x=17 \therefore x=5$; $14+x=17 \therefore x=3$; $8+x=17 \therefore x=9$;

(3) 次に第1行と第1列の残りを決める。

使う計算式は、行列の定和式だ。4数の和が34になるように残りの1数を決める。

$1+15+12+x=34$ から $x=6$; また $1+14+x+8=34$ から $x=11$;

(4) 次は中央の4数を決めたいが、実はいろいろな決め方がある。ここでは、前の代数計算のところで得た結論(8頁)を使おう。

$n1+n2=n7+n8=n11+n12=n13+n14=cp1$;

$n3+n4=n5+n6=n9+n10=n15+n16=cp2$; and $cp1+cp2=C$;

$1+15=x+9$ から $x=7$; また $x+3=11+5$ から $x=13$;

$12+6=14+x$ から $x=4$; また $8+x=2+16$ から $x=10$;

少し面倒な作業と感ずるかもしれないが、練習して熟練の技としていただきたい。何しろ出来上がりは対称四方陣という「名物」だ。それを励みにして頑張るべし。

1の「近傍の4数」の並べ方を替えれば別解23個を作れるのが、この方法の特長だ。

(最新版: on December 3, 2014 with MacOSX 10.10.1 and Xcode 6.1;
by 撰田 寛二(Kanji Setsuda); jag12001@nifty.com: E-Mail Address)

【付記】この記事に興味深く思われた方は、先ず第3部第2章第5節の「正方連結完全四方陣の構造と補数ペア」の記事をお読みいただきたい。「双子」のようなDNAをお感じになれよう。

次に正方連結汎立体四方陣の記事も併せてお読み頂きたい。同様に補数ペアだの、「数値1の取り巻き」だの、解の総数の意味だの、良く似た論理の展開がある。

第1部第4章の第2節 **Part 1, Part 2, Part 3** に詳述している。

【付録資料】最新プログラムのリスト (英語版で申し訳ない)

```
/** Self-Complementary Magic Squares of Order 4: **
/** Making 24 trnsformed into 384 Reconstructed **
/** File 'SCMS44PT.c': Dictated by Kanji Setsuda **
/** on Dec.18, 2004; Nov.30, 2014; **
/** with MacOSX 10.10.1 and Xcode 6.1 **
//
/** Definition: 'Self-Complementary' Magic Squares of Order 4 **
// [Basic Form and a Model Solution]
// .-.-.-.-.-. .-.-.-.-.-.
// | 1| 2| 3| 4| | 1|15|12| 6|
// |---+---+---| |---+---+---|
// | 5| 6| 7| 8| |14| 4| 7| 9|
// |---+---+---| |---+---+---|
// | 9|10|11|12| | 8|10|13| 3|
// |---+---+---| |---+---+---|
// |13|14|15|16| |11| 5| 2|16|
// |'-'-'-'-'-'-'| |'-'-'-'-'-'-'|
// [Basic Conditions: C=34] [Self-Complementary Conditions: SC=17]
// n1+n2+n3+n4=C ...rw1; n1+n16=SC ...cmp1;
// n5+n6+n7+n8=C ...rw2; n2+n15=SC ...cmp2;
// n9+n10+n11+n12=C ...rw3; n3+n14=SC ...cmp3;
// n13+n14+n15+n16=C ...rw4; n4+n13=SC ...cmp4;
// n1+n5+n9+n13=C ...cl1; n5+n12=SC ...cmp5;
// n2+n6+n10+n14=C ...cl2; n6+n11=SC ...cmp6;
// n3+n7+n11+n15=C ...cl3; n7+n10=SC ...cmp7;
// n4+n8+n12+n16=C ...cl4; n8+n9=SC ...cmp8;
//
#include <stdio.h>
//
short cnt, cnt3;
short LSM, SC;
short nm[17], uflg[17], mn[17];
short anm[9][17];
short snm[385][17], tnm[17][17];
short cnt01[17];
short refnmb[385];
//
void stp01(void), stp02(void), stp03(void), stp04(void);
void stp05(void), stp06(void), stp07(void), stp08(void);
void svsol(void), ansprint(void), recprint(void);
void printsol(short x);
void fnd01(void);
void prcnt01(void);
void prtrns(void), prtrlst(void), trnsprc(void);
void trnsf01(void), trnsf02(void), trnsf03(void), trnsf04(void);
void trnsf05(void), trnsf06(void), trnsf07(void), trnsf08(void);
void trnsf09(void), trnsf10(void), trnsf11(void), trnsf12(void);
```

```

void trnsf13(void), trnsf14(void), trnsf15(void);
void prmon(void);
//
short fndon(short x);
//
/* Main Program *
int main(){
short n;
printf("\n");
printf("*** 'Self-Complementary' Magic Squares of Order 4 **\n");
printf(" ** Basic Form **\n");
for(n=0;n<17;n++){anm[0][n]=n;}
printsol(1);
printf("*** Making the Primitive Solutions ... **\n");
for(n=0;n<17;n++){nm[n]=0; uflg[n]=0;}
LSM=34; SC=17; cnt=0; cnt3=0;
stp01(); /* Begin the Calculations *
printf(" [Count = %d]\n",cnt);
printf("\n");
printf("*** Compact List the 384 Primitive Solutions of 'Self-Complementary' MS44 **\n");
ansprint();
if(cnt3>0){printsol(cnt3);}
printf(" [Solution Counts = %d]\n",cnt);
printf("\n");
printf("* Solution Counts according to the Positions of Value 1 [Position: Counts] *\n");
prcnt01();
printf("\n");
for(n=0;n<=cnt;n++){refnmb[n]=0;}
printf("*** Basic Form of SCMS44 and Concepts of 15 Transformations **\n");
cnt3=0; prtrns();
printf("\n");
printf("*** Reconstruction of SCMS44 by our Original Transformation Method ***\n");
printf("*** List of 24 Solutions when n1=1 and the 15 Transformations of each **\n");
cnt3=0; recprint();
printf("\n");
printf(" ** Monitor List: Check the Old Numbers of Solutions Reconstructed **\n");
prmon();
printf("\n");
printf(" OK!\n");
printf("*** Calculated and Listed by Kanji Setsuda on\n");
printf(" Nov.30, 2014 with MacOSX 10.10.1 & Xcode 6.1 **\n");
printf("\n");
return 0;
}
/* Begin the Calculations *
/* Search Level: 1 *
/* Set N1 & n16=SC-n1 *
void stp01(){
short a,b;
for(a=1;a<17;a++){b=SC-a;
if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
nm[1]=a; nm[16]=b;
uflg[a]=1; uflg[b]=1;
stp02();
uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
}
}
/* Set N2 & n15=SC-n2 *
void stp02(){
short a,b;
for(a=16;a>0;a--){b=SC-a;
if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
nm[2]=a; nm[15]=b;
uflg[a]=1; uflg[b]=1;
stp03();
}
}
}

```

```

        uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
    }
}
/* Set N5 & n12=SC-n5 *
void stp03(){
    short a,b;
    for(a=16;a>0;a--){b=SC-a;
        if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
            nm[5]=a; nm[12]=b;
            uflg[a]=1; uflg[b]=1;
            stp04();
            uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
        }
}
/* Set N3 & n14 *
void stp04(){
    short a,b;
    for(a=16;a>0;a--){b=SC-a;
        if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
            uflg[a]=1; uflg[b]=1;
            nm[3]=a; nm[14]=b;
            stp05();
            uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
        }
}
/* Set n4=LSM-n1-n2-n3 & n13 *
void stp05(){
    short a,b;
    a=LSM-nm[1]-nm[2]-nm[3];
    if((0<a)&&(a<17)){
        b=LSM-nm[14]-nm[15]-nm[16];
        if(a+b==SC){
            if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
                uflg[a]=1; uflg[b]=1;
                nm[4]=a; nm[13]=b;
                stp06();
                uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
        }
}
/* Set n9=LSM-n1-n5-n13 & n8 *
void stp06(){
    short a,b;
    a=LSM-nm[1]-nm[5]-nm[13];
    if((0<a)&&(a<17)){
        b=LSM-nm[4]-nm[12]-nm[16];
        if(a+b==SC){
            if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
                uflg[a]=1; uflg[b]=1;
                nm[9]=a; nm[8]=b;
                stp07();
                uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
        }
}
/* Set N6 & n11 *
void stp07(){
    short a,b;
    for(a=1;a<17;a++){b=SC-a;
        if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
            uflg[a]=1; uflg[b]=1;
            nm[6]=a; nm[11]=b;
            stp08();
            uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
        }
}
/* Set n7=LSM-n5-n6-n8 & n10 *
void stp08(){
    short a,b,c,d;

```



```

a=LSM-nm[5]-nm[6]-nm[8];
if((0<a)&&(a<17)){
    b=LSM-nm[9]-nm[11]-nm[12];
    if(a+b==SC){
        c=LSM-nm[3]-nm[11]-nm[15];
        d=LSM-nm[2]-nm[6]-nm[14];
        if((a==c)&&(b==d)){
            if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
                nm[7]=a; nm[10]=b;
                uflg[a]=1; uflg[b]=1;
                svsol();
                uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}}}
}
//
/* Save the Solutions *
void svsol(){
    short n;
    cnt++; snm[cnt][0]=cnt;
    for(n=1;n<17;n++){snm[cnt][n]=nm[n];}
    n=0; /* Find 1 and Count how many solutions with that position *
    for(n=1;n<17;n++){
        if(nm[n]==1){cnt01[n]++;}
    }
}
//
/* Print the Answers *
void ansprint(){
    short m,n;
    for(m=1;m<=24;m++){
        anm[cnt3][0]=snm[m][0];
        for(n=1;n<17;n++){anm[cnt3][n]=snm[m][n];}
        cnt3++; if(cnt3==6){printsol(cnt3); cnt3=0;}
    }
    for(m=25;m<=cnt;m=m+12){
        anm[cnt3][0]=snm[m][0];
        for(n=1;n<17;n++){anm[cnt3][n]=snm[m][n];}
        cnt3++; if(cnt3==6){printsol(cnt3); cnt3=0;}
    }
}
//
/* Print the Answers *
void printsol(short x){
    short m;
    for(m=0;m<x;m++){printf("%13d# ",anm[m][0]);}; printf("\n");
    for(m=0;m<x;m++){printf(" .---.---.---.");}; printf("\n");
    for(m=0;m<x;m++){
        printf("   |%2d|%2d|%2d|%2d|",
            anm[m][1],anm[m][2],anm[m][3],anm[m][4]);}
    printf("\n");
    for(m=0;m<x;m++){printf(" |---+---+---+---|");}; printf("\n");
    for(m=0;m<x;m++){
        printf("   |%2d|%2d|%2d|%2d|",
            anm[m][5],anm[m][6],anm[m][7],anm[m][8]);}
    printf("\n");
    for(m=0;m<x;m++){printf(" |---+---+---+---|");}; printf("\n");
    for(m=0;m<x;m++){
        printf("   |%2d|%2d|%2d|%2d|",
            anm[m][9],anm[m][10],anm[m][11],anm[m][12]);}
    printf("\n");
    for(m=0;m<x;m++){printf(" |---+---+---+---|");}; printf("\n");
    for(m=0;m<x;m++){
        printf("   |%2d|%2d|%2d|%2d|",
            anm[m][13],anm[m][14],anm[m][15],anm[m][16]);}
    printf("\n");
    for(m=0;m<x;m++){printf(" '---'---'---'---");}
}

```

```

    printf("\n");
}
//
/* Find 1 and Count how many solutions with that position *
void fnd01(){
    short m;
    m=0;
    for(m=1;m<17;m++){
        if(nm[m]==1){cnt01[m]++;}
    }
}
//
/* Solution Counts according to the Positions of Value 1 *
void prcnt01(){
    short m,n;
    for(m=1;m<17;m++){n=cnt01[m];
        printf("%4d:%3d,",m,n);
        if((m%8)==0){printf("\n");}
    }
    printf("\n");
}
//
/* Print the Reconstruction transformed from the 24 solutions with n1=1 *
void reprint(){
    short m,n;
    for(m=1;m<=24;m++){
        printf(" Group %d:\n",snm[m][0]);
        for(n=1;n<17;n++){nm[n]=snm[m][n]; tnm[0][n]=snm[m][n];};
        trnsprc();
        prtrlst();
    }
}
//
/* Conceptual Diagrams of our original Transformations *
void prtrns(){
    short m,n;
    for(n=0;n<17;n++){nm[n]=n; tnm[0][n]=n;};
    trnsprc();
    cnt3=0; for(n=0;n<17;n++){tnm[n][0]=n;}
    for(m=0;m<16;m++){
        for(n=0;n<17;n++){anm[cnt3][n]=tnm[m][n];}
        cnt3++; if(cnt3==4){printsol(cnt3); cnt3=0;}
    }
}
//
/* Transform them by our original Transformations *
void trnsprc(){
    short n;
    for(n=1;n<=16;n++){nm[n]=tnm[0][n];}
    trnsf01(); for(n=1;n<=16;n++){tnm[ 1][n]=mn[n];}
    trnsf02(); for(n=1;n<=16;n++){tnm[ 2][n]=mn[n];}
    trnsf03(); for(n=1;n<=16;n++){tnm[ 3][n]=mn[n];}
    trnsf04(); for(n=1;n<=16;n++){tnm[ 4][n]=mn[n];}
    trnsf05(); for(n=1;n<=16;n++){tnm[ 5][n]=mn[n];}
    trnsf06(); for(n=1;n<=16;n++){tnm[ 6][n]=mn[n];}
    trnsf07(); for(n=1;n<=16;n++){tnm[ 7][n]=mn[n];}
    trnsf08(); for(n=1;n<=16;n++){tnm[ 8][n]=mn[n];}
    trnsf09(); for(n=1;n<=16;n++){tnm[ 9][n]=mn[n];}
    trnsf10(); for(n=1;n<=16;n++){tnm[10][n]=mn[n];}
    trnsf11(); for(n=1;n<=16;n++){tnm[11][n]=mn[n];}
    trnsf12(); for(n=1;n<=16;n++){tnm[12][n]=mn[n];}
    trnsf13(); for(n=1;n<=16;n++){tnm[13][n]=mn[n];}
    trnsf14(); for(n=1;n<=16;n++){tnm[14][n]=mn[n];}
    trnsf15(); for(n=1;n<=16;n++){tnm[15][n]=mn[n];}
}

```

```

//
/** Basic Form of SCMS44 and Concepts of 15 Transformations **
//
//      0#          1#          2#          3#
// .....
// | 1| 2| 3| 4| | 2| 1| 4| 3| | 3| 4| 1| 2| | 4| 3| 2| 1|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// | 5| 6| 7| 8| | 6| 5| 8| 7| | 7| 8| 5| 6| | 8| 7| 6| 5|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// | 9|10|11|12| |10| 9|12|11| |11|12| 9|10| |12|11|10| 9|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// |13|14|15|16| |14|13|16|15| |15|16|13|14| |16|15|14|13|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// .....
//      4#          5#          6#          7#
// .....
// | 5| 6| 7| 8| | 6| 5| 8| 7| | 7| 8| 5| 6| | 8| 7| 6| 5|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// | 1| 2| 3| 4| | 2| 1| 4| 3| | 3| 4| 1| 2| | 4| 3| 2| 1|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// |13|14|15|16| |14|13|16|15| |15|16|13|14| |16|15|14|13|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// | 9|10|11|12| |10| 9|12|11| |11|12| 9|10| |12|11|10| 9|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// .....
//      8#          9#          10#         11#
// .....
// | 9|10|11|12| |10| 9|12|11| |11|12| 9|10| |12|11|10| 9|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// |13|14|15|16| |14|13|16|15| |15|16|13|14| |16|15|14|13|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// | 1| 2| 3| 4| | 2| 1| 4| 3| | 3| 4| 1| 2| | 4| 3| 2| 1|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// | 5| 6| 7| 8| | 6| 5| 8| 7| | 7| 8| 5| 6| | 8| 7| 6| 5|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// .....
//      12#         13#         14#         15#
// .....
// |13|14|15|16| |14|13|16|15| |15|16|13|14| |16|15|14|13|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// | 9|10|11|12| |10| 9|12|11| |11|12| 9|10| |12|11|10| 9|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// | 5| 6| 7| 8| | 6| 5| 8| 7| | 7| 8| 5| 6| | 8| 7| 6| 5|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// | 1| 2| 3| 4| | 2| 1| 4| 3| | 3| 4| 1| 2| | 4| 3| 2| 1|
// |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+| |---+---+---+|
// .....
/** 15 Types of Transformation *
void trnsf01(){
    mn[ 1]=nm[ 2]; mn[ 2]=nm[ 1]; mn[ 3]=nm[ 4]; mn[ 4]=nm[ 3];
    mn[ 5]=nm[ 6]; mn[ 6]=nm[ 5]; mn[ 7]=nm[ 8]; mn[ 8]=nm[ 7];
    mn[ 9]=nm[10]; mn[10]=nm[ 9]; mn[11]=nm[12]; mn[12]=nm[11];
    mn[13]=nm[14]; mn[14]=nm[13]; mn[15]=nm[16]; mn[16]=nm[15];
};
void trnsf02(){
    mn[ 1]=nm[ 3]; mn[ 2]=nm[ 4]; mn[ 3]=nm[ 1]; mn[ 4]=nm[ 2];
    mn[ 5]=nm[ 7]; mn[ 6]=nm[ 8]; mn[ 7]=nm[ 5]; mn[ 8]=nm[ 6];
    mn[ 9]=nm[11]; mn[10]=nm[12]; mn[11]=nm[ 9]; mn[12]=nm[10];
    mn[13]=nm[15]; mn[14]=nm[16]; mn[15]=nm[13]; mn[16]=nm[14];
};
void trnsf03(){
    mn[ 1]=nm[ 4]; mn[ 2]=nm[ 3]; mn[ 3]=nm[ 2]; mn[ 4]=nm[ 1];
    mn[ 5]=nm[ 8]; mn[ 6]=nm[ 7]; mn[ 7]=nm[ 6]; mn[ 8]=nm[ 5];
    mn[ 9]=nm[12]; mn[10]=nm[11]; mn[11]=nm[10]; mn[12]=nm[ 9];
    mn[13]=nm[16]; mn[14]=nm[15]; mn[15]=nm[14]; mn[16]=nm[13];
};
void trnsf04(){
    mn[ 1]=nm[ 5]; mn[ 2]=nm[ 6]; mn[ 3]=nm[ 7]; mn[ 4]=nm[ 8];
    mn[ 5]=nm[ 1]; mn[ 6]=nm[ 2]; mn[ 7]=nm[ 3]; mn[ 8]=nm[ 4];

```

```

    mn[ 9]=nm[13]; mn[10]=nm[14]; mn[11]=nm[15]; mn[12]=nm[16];
    mn[13]=nm[ 9]; mn[14]=nm[10]; mn[15]=nm[11]; mn[16]=nm[12];
};
void trnsf05(){
    mn[ 1]=nm[ 6]; mn[ 2]=nm[ 5]; mn[ 3]=nm[ 8]; mn[ 4]=nm[ 7];
    mn[ 5]=nm[ 2]; mn[ 6]=nm[ 1]; mn[ 7]=nm[ 4]; mn[ 8]=nm[ 3];
    mn[ 9]=nm[14]; mn[10]=nm[13]; mn[11]=nm[16]; mn[12]=nm[15];
    mn[13]=nm[10]; mn[14]=nm[ 9]; mn[15]=nm[12]; mn[16]=nm[11];
};
void trnsf06(){
    mn[ 1]=nm[ 7]; mn[ 2]=nm[ 8]; mn[ 3]=nm[ 5]; mn[ 4]=nm[ 6];
    mn[ 5]=nm[ 3]; mn[ 6]=nm[ 4]; mn[ 7]=nm[ 1]; mn[ 8]=nm[ 2];
    mn[ 9]=nm[15]; mn[10]=nm[16]; mn[11]=nm[13]; mn[12]=nm[14];
    mn[13]=nm[11]; mn[14]=nm[12]; mn[15]=nm[ 9]; mn[16]=nm[10];
};
void trnsf07(){
    mn[ 1]=nm[ 8]; mn[ 2]=nm[ 7]; mn[ 3]=nm[ 6]; mn[ 4]=nm[ 5];
    mn[ 5]=nm[ 4]; mn[ 6]=nm[ 3]; mn[ 7]=nm[ 2]; mn[ 8]=nm[ 1];
    mn[ 9]=nm[16]; mn[10]=nm[15]; mn[11]=nm[14]; mn[12]=nm[13];
    mn[13]=nm[12]; mn[14]=nm[11]; mn[15]=nm[10]; mn[16]=nm[ 9];
};
void trnsf08(){
    mn[ 1]=nm[ 9]; mn[ 2]=nm[10]; mn[ 3]=nm[11]; mn[ 4]=nm[12];
    mn[ 5]=nm[13]; mn[ 6]=nm[14]; mn[ 7]=nm[15]; mn[ 8]=nm[16];
    mn[ 9]=nm[ 1]; mn[10]=nm[ 2]; mn[11]=nm[ 3]; mn[12]=nm[ 4];
    mn[13]=nm[ 5]; mn[14]=nm[ 6]; mn[15]=nm[ 7]; mn[16]=nm[ 8];
};
void trnsf09(){
    mn[ 1]=nm[10]; mn[ 2]=nm[ 9]; mn[ 3]=nm[12]; mn[ 4]=nm[11];
    mn[ 5]=nm[14]; mn[ 6]=nm[13]; mn[ 7]=nm[16]; mn[ 8]=nm[15];
    mn[ 9]=nm[ 2]; mn[10]=nm[ 1]; mn[11]=nm[ 4]; mn[12]=nm[ 3];
    mn[13]=nm[ 6]; mn[14]=nm[ 5]; mn[15]=nm[ 8]; mn[16]=nm[ 7];
};
void trnsf10(){
    mn[ 1]=nm[11]; mn[ 2]=nm[12]; mn[ 3]=nm[ 9]; mn[ 4]=nm[10];
    mn[ 5]=nm[15]; mn[ 6]=nm[16]; mn[ 7]=nm[13]; mn[ 8]=nm[14];
    mn[ 9]=nm[ 3]; mn[10]=nm[ 4]; mn[11]=nm[ 1]; mn[12]=nm[ 2];
    mn[13]=nm[ 7]; mn[14]=nm[ 8]; mn[15]=nm[ 5]; mn[16]=nm[ 6];
};
void trnsf11(){
    mn[ 1]=nm[12]; mn[ 2]=nm[11]; mn[ 3]=nm[10]; mn[ 4]=nm[ 9];
    mn[ 5]=nm[16]; mn[ 6]=nm[15]; mn[ 7]=nm[14]; mn[ 8]=nm[13];
    mn[ 9]=nm[ 4]; mn[10]=nm[ 3]; mn[11]=nm[ 2]; mn[12]=nm[ 1];
    mn[13]=nm[ 8]; mn[14]=nm[ 7]; mn[15]=nm[ 6]; mn[16]=nm[ 5];
};
void trnsf12(){
    mn[ 1]=nm[13]; mn[ 2]=nm[14]; mn[ 3]=nm[15]; mn[ 4]=nm[16];
    mn[ 5]=nm[ 9]; mn[ 6]=nm[10]; mn[ 7]=nm[11]; mn[ 8]=nm[12];
    mn[ 9]=nm[ 5]; mn[10]=nm[ 6]; mn[11]=nm[ 7]; mn[12]=nm[ 8];
    mn[13]=nm[ 1]; mn[14]=nm[ 2]; mn[15]=nm[ 3]; mn[16]=nm[ 4];
};
void trnsf13(){
    mn[ 1]=nm[14]; mn[ 2]=nm[13]; mn[ 3]=nm[16]; mn[ 4]=nm[15];
    mn[ 5]=nm[10]; mn[ 6]=nm[ 9]; mn[ 7]=nm[12]; mn[ 8]=nm[11];
    mn[ 9]=nm[ 6]; mn[10]=nm[ 5]; mn[11]=nm[ 8]; mn[12]=nm[ 7];
    mn[13]=nm[ 2]; mn[14]=nm[ 1]; mn[15]=nm[ 4]; mn[16]=nm[ 3];
};
void trnsf14(){
    mn[ 1]=nm[15]; mn[ 2]=nm[16]; mn[ 3]=nm[13]; mn[ 4]=nm[14];
    mn[ 5]=nm[11]; mn[ 6]=nm[12]; mn[ 7]=nm[ 9]; mn[ 8]=nm[10];
    mn[ 9]=nm[ 7]; mn[10]=nm[ 8]; mn[11]=nm[ 5]; mn[12]=nm[ 6];
    mn[13]=nm[ 3]; mn[14]=nm[ 4]; mn[15]=nm[ 1]; mn[16]=nm[ 2];
};
void trnsf15(){
    mn[ 1]=nm[16]; mn[ 2]=nm[15]; mn[ 3]=nm[14]; mn[ 4]=nm[13];

```

```

mn[ 5]=nm[12]; mn[ 6]=nm[11]; mn[ 7]=nm[10]; mn[ 8]=nm[ 9];
mn[ 9]=nm[ 8]; mn[10]=nm[ 7]; mn[11]=nm[ 6]; mn[12]=nm[ 5];
mn[13]=nm[ 4]; mn[14]=nm[ 3]; mn[15]=nm[ 2]; mn[16]=nm[ 1];
};
//
/* Print the Result List of Transformations *
void prtrlst(){
short m,n,oldn;
for(m=0;m<16;m++){
for(n=0;n<17;n++){anm[cnt3][n]=tnm[m][n];}
oldn=fndon(cnt3); anm[cnt3][0]=oldn; refnmb[oldn]++;
cnt3++; if(cnt3==6){printsol(cnt3); cnt3=0;}
}
if(cnt3>0){printsol(cnt3); cnt3=0;}
}
//
/* Find the Relative Solution Number in the Old List *
short fndon(short x){
short d,m;
short n,f;
d=0;
for(m=1;m<=cnt;m++){f=0;
for(n=1;n<17;n++){
if(anm[x][n]==snm[m][n]){f++;}
else{break;}
}
if(f==16){d=snm[m][0]; break;}
}
return d;
}
//
/** Monitor of the Old Numbers of the Reconstructed **
void prmon(){
short n;
printf(" ?? : %d",refnmb[0]);
for(n=1;n<385;n++){
if(n%48==1){printf("\n%4d:",n);}
printf("%2d",refnmb[n]);
}
printf("\n");
}
//

```