

第2章：四方陣の代数的研究（新）：摂田 寛二

第5節：正方連結完全四方陣の構造と補数ペア（最新版）

1. 今回は、純正の正方連結型完全四方陣を採り上げる。その構造研究を深め、解の総数の意味を考察しよう。そのために「補数ペア」の構成も解明する。

先ずは、例の如く基本図と基本条件式によって対象を定義する。解の実例も先に示そう。

* 基本図と解の代表例（拡張方阵空間） *

				0#					1#						
16	13	14	15	16	13	13	8	10	3	13	8				
-----					-----					-----					
4	n1	n2	n3	n4	1	12	1 15	6 12	1						
-----					-----					-----					
8	n5	n6	n7	n8	5	7	14	4	9	7	14				
-----					-----					-----					
12	n9	10	11	12	9	2	11	5 16	2	11					
-----					-----					-----					
16	13	14	15	16	13	13	8 10	3 13	8						
-----					-----					-----					
4	1	2	3	4	1	12	1	15	6	12	1				

* 基本定義式：行列の定和：C=34 *

$$n1+n2+n3+n4=C \quad \dots rw; \quad | \quad n1+n5+n9+n13=C \quad \dots c1;$$

* 正方連結四数(昔は「相結四数」とも言った)の定和：C=34; *

$$\begin{aligned} n1+n2+n5+n6=C & \quad \dots c1; & n2+n3+n6+n7=C & \quad \dots c2; \\ n3+n4+n7+n8=C & \quad \dots c3; & n4+n1+n8+n5=C & \quad \dots c4; \\ n5+n6+n9+n10=C & \quad \dots c5; & n6+n7+n10+n11=C & \quad \dots c6; \\ n7+n8+n11+n12=C & \quad \dots c7; & n8+n5+n12+n9=C & \quad \dots c8; \\ n9+n10+n13+n14=C & \quad \dots c9; & n10+n11+n14+n15=C & \quad \dots c10; \\ n11+n12+n15+n16=C & \quad \dots c11; & n12+n9+n16+n13=C & \quad \dots c12; \\ n13+n14+n1+n2=C & \quad \dots c13; & n14+n15+n2+n3=C & \quad \dots c14; \\ n15+n16+n3+n4=C & \quad \dots c15; & n16+n13+n4+n1=C & \quad \dots c16; \end{aligned}$$

* 完全方阵の補数定和と独自配置：CC=17; *

$$n1+n11=n2+n12=n3+n9=n4+n10=n5+n15=n6+n16=n7+n13=n8+n14=CC \quad \dots cc$$

主対角線の定和の定義が無くても、心配御無用。上の式 $cc \uparrow$ から、
 $(n1+n11)+(n6+n16)=2CC=C$; $(n4+n10)+(n7+n13)=2CC=C$; だから。

* 正方連結完全四方陣(昔は「相結完全四方陣」とも言った)の解の実例 *

				1#					4#					7#					10#				
13	12	6	3	13	12	13	12	7	2	13	12	11	14	7	2	11	14	7	14	11	2	7	14
-----					-----					-----					-----					-----			
8	1	15	10	8	1	8	1 14	11	8	1	8	1 12	13	8	1	12	1	8 13	12	1			
-----					-----					-----					-----					-----			
11	14	4	5	11	14	10	15	4	5	10	15	10	15	6	3	10	15	6	15	10	3	6	15
-----					-----					-----					-----					-----			
2	7	9	16	2	7	3	6	9	16	3	6	5	4	9	16	5	4	9	4	5	16	9	4
-----					-----					-----					-----					-----			
13	12	6	3	13	12	13	12	7	2	13	12	11	14	7	2	11	14	7	14	11	2	7	14
-----					-----					-----					-----					-----			
8	1	15	10	8	1	8	1	14	11	8	1	8	1	12	13	8	1	12	1	8	13	12	1
				13#					16#					19#					22#				
14	11	5	4	14	11	14	11	8	1	14	11	12	13	8	1	12	13	8	13	12	1	8	13
-----					-----					-----					-----					-----			
7	2 16	9	7	2	7	2 13	12	7	2	7	2 11	14	7	2	11	2	7 14	11	2				
-----					-----					-----					-----					-----			
12	13	3	6	12	13	9	16	3	6	9	16	9	16	5	4	9	16	5	16	9	4	5	16
-----					-----					-----					-----					-----			
1	8	10	15	1	8	4	5 10	15	4	5	6	3 10	15	6	3	10	3	6 15	10	3			
-----					-----					-----					-----					-----			
14	11	5	4	14	11	14	11	8	1	14	11	12	13	8	1	12	13	8	13	12	1	8	13
-----					-----					-----					-----					-----			
7	2	16	9	7	2	7	2	13	12	7	2	7	2	11	14	7	2	11	2	7	14	11	2

25#	28#	31#	33#
15 10 5 4 15 10	15 10 8 1 15 10	12 13 8 1 12 13	8 13 12 1 8 13
6 3 16 9 6 3	6 3 13 12 6 3	6 3 10 15 6 3	10 3 6 15 10 3
12 13 2 7 12 13	9 16 2 7 9 16	9 16 5 4 9 16	5 16 9 4 5 16
1 8 11 14 1 8	4 5 11 14 4 5	7 2 11 14 7 2	11 2 7 14 11 2
15 10 5 4 15 10	15 10 8 1 15 10	12 13 8 1 12 13	8 13 12 1 8 13
6 3 16 9 6 3	6 3 13 12 6 3	6 3 10 15 6 3	10 3 6 15 10 3
35#	38#	41#	43#
16 9 6 3 16 9	16 9 7 2 16 9	11 14 7 2 11 14	7 14 11 2 7 14
5 4 15 10 5 4	5 4 14 11 5 4	5 4 9 16 5 4	9 4 5 16 9 4
11 14 1 8 11 14	10 15 1 8 10 15	10 15 6 3 10 15	6 15 10 3 6 15
2 7 12 13 2 7	3 6 12 13 3 6	8 1 12 13 8 1	12 1 8 13 12 1
16 9 6 3 16 9	16 9 7 2 16 9	11 14 7 2 11 14	7 14 11 2 7 14
5 4 15 10 5 4	5 4 14 11 5 4	5 4 9 16 5 4	9 4 5 16 9 4
45#	46#	47#	48#
8 11 2 13 8 11	8 11 14 1 8 11	7 12 1 14 7 12	7 12 13 2 7 12
10 5 16 3 10 5	10 5 4 15 10 5	9 6 15 4 9 6	9 6 3 16 9 6
15 4 9 6 15 4	3 16 9 6 3 16	16 3 10 5 16 3	4 15 10 5 4 15
1 14 7 12 1 14	13 2 7 12 13 2	2 13 8 11 2 13	14 1 8 11 14 1
8 11 2 13 8 11	8 11 14 1 8 11	7 12 1 14 7 12	7 12 13 2 7 12
10 5 16 3 10 5	10 5 4 15 10 5	9 6 15 4 9 6	9 6 3 16 9 6

こうした定義のもとで正方連結型の完全四角陣を作っても、得られる解集合は、汎対角線四角陣，完全四角陣，或いは正方連結汎四角陣の場合と少しも変わらない。全く同じ原始解が 384 個，標準解ならば 48 個が得られる。これが「汎四角陣の奇跡の一致」である。

しかも，上の解の実例を見てもわかるように，数値 1 の上下・左右にはいつも同じ顔ぶれが並ぶ。並び方に違いこそあるが，{8, 12, 14, 15} がいつも取り囲んでいて，他の数は来ない。どの解もそういうふうに出てくる。不思議と言えば不思議である。

いったい何故にそうなるのか？

2. 汎四角陣の奇跡の一致は，(1) 汎対角線四角陣，(2) 完全四角陣，(3) 正方連結汎四角陣，そして (4) 正方連結完全四角陣の 4 つのタイプが，論理的に「同値」の概念であることを示している。これは，実際に定義の条件式を代数的に書き換えることで，お互いに他と同じであることが示せることでもわかる。

特に (4) の正方連結完全四角陣の定義式から，全行列の定和と全汎対角線の定和を導き出すのは簡単だ。以下にその概略を示そう。

先ず $n_1+n_2+n_3+n_4=C \dots rw$; | $n_1+n_2+n_5+n_6=C \dots c1$;
の 2 式から， $n_3+n_4=n_5+n_6$ が言える。

また $n_1+n_2+n_3+n_4=C \dots rw$; | $n_3+n_4+n_7+n_8=C \dots c3$;
の 2 式から， $n_1+n_2=n_7+n_8$ が言える。

これと rw から， $n_5+n_6+n_7+n_8=n_1+n_2+n_3+n_4=C$ が言える。

同様にして， $n_9+n_{10}+n_{11}+n_{12}=n_{13}+n_{14}+n_{15}+n_{16}=n_1+n_2+n_3+n_4=C$ が言える。

一方 $n_1+n_5+n_9+n_{13}=C \dots c1$; | $n_1+n_2+n_5+n_6=C \dots c1$;
の 2 式から， $n_9+n_{13}=n_2+n_6$ が言える。

また $n_1+n_5+n_9+n_{13}=C \dots c1$; | $n_9+n_{10}+n_{13}+n_{14}=C \dots c9$;
の 2 式から， $n_1+n_5=n_{10}+n_{14}$ が言える。

これと $c1$ から, $n2+n6+n10+n14=n1+n5+n9+n13=C$ が言える。
 同様に, $n3+n7+n11+n15=n4+n8+n12+n16=n1+n5+n9+n13=C$ が言える。

0#					1#						
16	13	14	15	16	13	13	8	10	3	13	8
4 n1 n2 n3 n4					1	12	1 15 6 12			1	
8 n5 n6 n7 n8					5	7	14 4 9 7			14	
12 n9 10 11 12					9	2	11 5 16 2			11	
16 13 14 15 16					13	13	8 10 3 13			8	
4	1	2	3	4	1	12	1	15	6	12	1

汎対角線の定和は, 次の定義式 $cc \downarrow$ の中身を順次組み合わせるだけで言える。

$$\begin{aligned}
 &n1+n11=n2+n12=n3+n9=n4+n10=n5+n15=n6+n16=n7+n13=n8+n14=CC \quad \dots cc \\
 &n1+n6+n11+n16=(n1+n11)+(n6+n16)=CC+CC=17+17=34=C \quad \dots pd1; \\
 &n2+n7+n12+n13=(n2+n12)+(n7+n13)=CC+CC=17+17=34=C \quad \dots pd2; \\
 &n3+n8+n9+n14=(n3+n9)+(n8+n14)=CC+CC=17+17=34=C \quad \dots pd3; \\
 &n4+n5+n10+n15=(n4+n10)+(n5+n15)=CC+CC=17+17=34=C \quad \dots pd4; \\
 &n1+n8+n11+n14=(n1+n11)+(n8+n14)=CC+CC=17+17=34=C \quad \dots pb1; \\
 &n2+n5+n12+n15=(n2+n12)+(n5+n15)=CC+CC=17+17=34=C \quad \dots pb2; \\
 &n3+n6+n9+n16=(n3+n9)+(n6+n16)=CC+CC=17+17=34=C \quad \dots pb3; \\
 &n4+n7+n10+n13=(n4+n10)+(n7+n13)=CC+CC=17+17=34=C \quad \dots pb4;
 \end{aligned}$$

かくして, 正方連結完全四方陣が汎対角線型の魔方陣であることが示せる。逆の証明もできる。そして, 論理的に「同値」の概念であることを示せる。

同値の4タイプの間では, どの1つを研究しても, 他の3つを研究するのと同じことになる。正方連結完全四方陣を研究するのは, 汎四方陣全般を研究するのと同じ意味になる。

3. 正方連結完全四方陣の代数的研究をもう少し続けよう。そして, この四方陣には一体幾つの「補数ペア」のセットが必要なのかを調べよう。

ちなみに我々は, $m+n=CC$ が成り立つ時, (m, n) を“ CC の補数”と言う。 CC が自明の時には, “ m は n の補数である”とも, “ n は m の補数である”とも言う。

* 代数計算 [1]: $C=34$; *

$$\begin{aligned}
 &n1+n2+n5+n6=C \quad \dots c1; \quad n5+n6+n9+n10=C \quad \dots c5; \rightarrow n1+n2=n9+n10=cp1 \\
 &n1+n2+n3+n4=C \quad \dots rw; \quad n3+n4+n7+n8=C \quad \dots c3; \rightarrow n1+n2=n7+n8=cp1 \\
 &n7+n8+n11+n12=C \quad \dots c7; \quad n11+n12+n15+n16=C \quad \dots c11; \rightarrow n7+n8=n15+n16=cp1 \\
 &n3+n4+n7+n8=C \quad \dots c3; \quad n7+n8+n11+n12=C \quad \dots c7; \rightarrow n3+n4=n11+n12=cp2 \\
 &n1+n2+n3+n4=C \quad \dots rw; \quad n1+n2+n5+n6=C \quad \dots c1; \rightarrow n3+n4=n5+n6=cp2 \\
 &n5+n6+n9+n10=C \quad \dots c5; \quad n9+n10+n13+n14=C \quad \dots c9; \rightarrow n5+n6=n13+n14=cp2 \\
 &\text{Therefore} \quad n1+n2=n7+n8=n9+n10=n15+n16=cp1; \\
 &\quad \quad \quad n3+n4=n5+n6=n11+n12=n13+n14=cp2; \quad cp1+cp2=C;
 \end{aligned}$$

* 代数計算 [2]: $C=34$; *

$$\begin{aligned}
 &n1+n2+n5+n6=C \quad \dots c1; \quad n2+n3+n6+n7=C \quad \dots c2; \rightarrow n1+n5=n3+n7=cp3 \\
 &n1+n5+n9+n13=C \quad \dots c1; \quad n9+n10+n13+n14=C \quad \dots c9; \rightarrow n1+n5=n10+n14=cp3 \\
 &n10+n11+n14+n15=C \quad \dots c10; \quad n11+n12+n15+n16=C \quad \dots c11; \rightarrow n10+n14=n12+n16=cp3 \\
 &n2+n3+n6+n7=C \quad \dots c2; \quad n3+n4+n7+n8=C \quad \dots c3; \rightarrow n2+n6=n4+n8=cp4 \\
 &n1+n2+n5+n6=C \quad \dots c1; \quad n1+n5+n9+n13=C \quad \dots c1; \rightarrow n2+n6=n9+n13=cp4 \\
 &n9+n10+n13+n14=C \quad \dots c9; \quad n10+n11+n14+n15=C \quad \dots c10; \rightarrow n9+n13=n11+n15=cp4 \\
 &\text{Therefore} \quad n1+n5=n3+n7=n10+n14=n12+n16=cp3; \\
 &\quad \quad \quad n2+n6=n4+n8=n9+n13=n11+n15=cp4; \quad cp3+cp4=C;
 \end{aligned}$$

* 代数計算 [3] *

$$\begin{aligned}
 &n1+n2+n3+n4=C \quad \dots rw; \quad n2+n3+n6+n7=C \quad \dots c2; \rightarrow n1+n4=n6+n7=cp5 \\
 &n6+n7+n10+n11=C \quad \dots c6; \quad n10+n11+n14+n15=C \quad \dots c10; \rightarrow n6+n7=n14+n15=cp5 \\
 &n4+n1+n8+n5=C \quad \dots c4; \quad n8+n5+n12+n9=C \quad \dots c8; \rightarrow n1+n4=n9+n12=cp5
 \end{aligned}$$

$n1+n2+n3+n4=C \dots rw$; $n4+n1+n8+n5=C \dots c4$; $\rightarrow n2+n3=n5+n8=cp6$
 $n2+n3+n6+n7=C \dots c2$; $n6+n7+n10+n11=C \dots c6$; $\rightarrow n2+n3=n10+n11=cp6$
 $n8+n5+n12+n9=C \dots c8$; $n12+n9+n16+n13=C \dots c12$; $\rightarrow n5+n8=n13+n16=cp6$
 Therefore $n1+n4=n6+n7=n9+n12=n14+n15=cp5$;
 $n2+n3=n5+n8=n10+n11=n13+n16=cp6$; $cp5+cp6=C$;

* 代数計算 [4] *

$n1+n5+n9+n13=C \dots c1$; $n5+n6+n9+n10=C \dots c5$; $\rightarrow n1+n13=n6+n10=cp7$
 $n6+n7+n10+n11=C \dots c6$; $n7+n8+n11+n12=C \dots c7$; $\rightarrow n6+n10=n8+n12=cp7$
 $n13+n14+n1+n2=C \dots c13$; $n14+n15+n2+n3=C \dots c14$; $\rightarrow n1+n13=n3+n15=cp7$
 $n1+n5+n9+n13=C \dots c1$; $n13+n14+n1+n2=C \dots c13$; $\rightarrow n5+n9=n2+n14=cp8$
 $n5+n6+n9+n10=C \dots c5$; $n6+n7+n10+n11=C \dots c6$; $\rightarrow n5+n9=n7+n11=cp8$
 $n14+n15+n2+n3=C \dots c14$; $n15+n16+n3+n4=C \dots c15$; $\rightarrow n2+n14=n4+n16=cp8$
 Therefore $n1+n13=n6+n10=n3+n15=n8+n12=cp7$;
 $n5+n9=n2+n14=n7+n11=n4+n16=cp8$; $cp7+cp8=C$;

かくして、定和になる補数ペアが各4組ずつ8セット見つかった。それぞれの定和値は違うが、加えて $C=34$; になる2セットを1つのグループにまとめると、次のようになる。

* 補数ペアのセットをグループ別に整理してその場所も示した: $C=34$; *

- [1] $n1+n2=n7+n8=n9+n10=n15+n16=cp1$;
 $n3+n4=n5+n6=n11+n12=n13+n14=cp2$; $cp1+cp2=C=34$;
- [2] $n1+n5=n3+n7=n10+n14=n12+n16=cp3$;
 $n2+n6=n4+n8=n9+n13=n11+n15=cp4$; $cp3+cp4=C=34$;
- [3] $n1+n4=n6+n7=n9+n12=n14+n15=cp5$;
 $n2+n3=n5+n8=n10+n11=n13+n16=cp6$; $cp5+cp6=C=34$;

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
16 13 14 15 16 13	16 13 14 15 16 13	16 13 14 15 16 13	16 13 14 15 16 13	16 13 14 15 16 13
n4 n1 n2 n3 n4 n1	n4 n1 n2 n3 n4 n1	n4 n1 n2 n3 n4 n1	n4 n1 n2 n3 n4 n1	n4 n1 n2 n3 n4 n1
n8 n5 n6 n7 n8 n5	n8 n5 n6 n7 n8 n5	n8 n5 n6 n7 n8 n5	n8 n5 n6 n7 n8 n5	n8 n5 n6 n7 n8 n5
12 n9 10 11 12 n9	12 n9 10 11 12 n9	12 n9 10 11 12 n9	12 n9 10 11 12 n9	12 n9 10 11 12 n9
16 13 14 15 16 13	16 13 14 15 16 13	16 13 14 15 16 13	16 13 14 15 16 13	16 13 14 15 16 13

- [4] $n1+n13=n6+n10=n3+n15=n8+n12=cp7$;
 $n5+n9=n2+n14=n7+n11=n4+n16=cp8$; $cp7+cp8=C=34$;
- [5] $n1+n11=n2+n12=n3+n9=n4+n10=n5+n15=n6+n16=n7+n13=n8+n14=CC=17 \dots cc$;
 (cc: この補数セットは、完全型四方陣の定義に最初から出てくる8個の補数ペアそのものだ;)

これだけの補数ペアが必要であり、それぞれを適切に配置しなければならない。

[1]~[4]の定和値: $cp1, cp2, cp3, \dots, cp7, cp8$ が幾つになるかは、定義の段階ではまだわからない。計算してみなければ決まらない。

最後の [5] は、完全方陣の補数定和と独自配置を定義した条件式そのものである。これだけは、定和値が 17 と最初からわかっていて、8ペアの補数が1セット必要である。

4. 全部で補数ペアが8組4セットと 17 の補数ペアが8組も必要なわけだが、はたして自然数 1~16 を各1回用いて作る汎四方陣の内部で、どのように組み合わせるべきか。

補数ペア5セット内部では、1セットごとに自然数 1~16 を各1回しか使えない。特定の数値の重複使用も無使用も許されない。しかも、[1]~[4] の各セットの定和値の間には、

[1] $cp1+cp2=34$; [2] $cp3+cp4=34$; [3] $cp5+cp6=34$; [4] $cp7+cp8=34$;
 が成り立たなければならない。

そんな厳しい条件に合致する補数ペアには、どんな組合せが可能であろうか?

手計算で、可能な補数ペアを数えてみよう。まず定和値から決める。 $CC=5$; $DD=29$; あたりから始めてみよう。(1, 4), (16, 13), (2, 3), (15, 14), (3, 2), (14, 15), (4, 1),

(13, 16) を思い付くが、後半の4ペアは前半の4ペアと同じ数値の組合せである。実質、4ペアしか作れないことがわかる。これでは、必要な8ペアをまかなえない。

次は、CC=6; DD=28; を調べる。

....

私が数えた結果を次のリストに示す。

* 自然数 1~16を用いて、可能な補数ペアを定和値別に作って数え尽くす *

/CC= 5: C1(1, 4), C2(2, 3),

\DD=29: D1(16,13), D2(15,14),

/CC= 6: C1(1, 5), C2(2, 4),

\DD=28: D1(16,12), D2(15,13),

/CC= 7: C1(1, 6), C2(2, 5), C3(3, 4),

\DD=27: D1(16,11), D2(15,12), D3(14,13),

/CC= 8: C1(1, 7), C2(2, 6), C3(3, 5),

\DD=26: D1(16,10), D2(15,11), D3(14,12),

/CC= 9: C1(1, 8), C2(2, 7), C3(3, 6), C4(4, 5),
\DD=25: D1(16, 9), D2(15,10), D3(14,11), D4(13,12); ... OK!

/CC=10: C1(1, 9), C2(3, 7), C3(4, 6),

\DD=24: D1(16, 8), D2(14,10), D3(13,11),

/CC=11: C1(1,10), C2(2, 9), C3(5, 6),

\DD=23: D1(16, 7), D2(15, 8), D3(12,11),

/CC=12: C1(1,11), C2(2,10), C3(3, 9),

\DD=22: D1(16, 6), D2(15, 7), D3(14, 8),

/CC=13: C1(1,12), C2(2,11), C3(3,10), C4(4, 9),
\DD=21: D1(16, 5), D2(15, 6), D3(14, 7), D4(13, 8); ... OK!

/CC=14: C1(1,13), C2(2,12), C3(3,11),

\DD=20: D1(16, 4), D2(15, 5), D3(14, 6),

/CC=15: C1(1,14), C2(2,13), C3(5,10), C4(6, 9),
\DD=19: D1(16, 3), D2(15, 4), D3(12, 7), D4(11, 8); ... OK!

/CC=16: C1(1,15), C2(3,13), C3(5,11), C4(7, 9),
\DD=18: D1(16, 2), D2(14, 4), D3(12, 6), D4(10, 8); ... OK!

{CC=DD=17}: CD1(1,16), CD2(2,15), CD3(3,14), CD4(4,13),
CD5(5,12), CD6(6,11), CD7(7,10), CD8(8, 9); ... OK!

上のような計数を、手作業ではなく、コンピュータにやらせたい時には、例えば次のようなプログラムを書く。

```
/** Possible Complementary Pairs for **  
/** 'C&C' Magic Squares of Order 4 **  
/** 'CmpPairs4.c': Dictated by Kanji Setsuda *  
/** on May 16, 2007 with MacOSX & Xcode **  
/**  
#include <stdio.h>  
/**  
short LSM, CSM;  
short ctbl[17], dtbl[17];  
short uflg[17];
```

```

//
int maktbl(short x);
void prans(short x, short y);
//
/* main program *
int main(void){
short cc, n;
printf("\n");
printf("** Possible Complementary Pairs for\n");
printf(" 'Composite & Complete' Magic Squares of Order 4 **\n");
LSM=34; CSM=17;
for(cc=5;cc<=CSM;cc++){
for(n=0;n<CSM;n++){ctbl[n]=0; dtbl[n]=0;}
for(n=0;n<CSM;n++){uflg[n]=0;}
n=maktbl(cc);
prans(cc,n);
}
printf("\n");
printf(" [OK!]\n");
return 0;
}
//
int maktbl(short x){
short c, d, cn, dn;
short m,n,p,q;
cn=0; dn=0; m=0; p=CSM;
c=x; d=LSM-x;
do{m++; n=c-m;
if((m<n)&&(uflg[m]==0)&&(uflg[n]==0)){
ctbl[cn]=m; cn++; uflg[m]=1;
ctbl[cn]=n; cn++; uflg[n]=1;}
p--; q=d-p;
if((p>q)&&(uflg[p]==0)&&(uflg[q]==0)){
dtbl[dn]=p; dn++; uflg[p]=1;
dtbl[dn]=q; dn++; uflg[q]=1;}
}while((m<n)&&(p>q));
return cn;
}
//
void prans(short x, short y){
short cc, dd;
short m,n,c,d;
cc=x; dd=LSM-x;
if(cc==dd){printf("\n {CC=DD=%2d}:",cc);
for(m=0;m<y;m=m+2){
c=ctbl[m]; d=ctbl[m+1];
if((c>0)&&(d>0)){printf(" CD%d(%2d,%2d)",m/2+1,c,d);}
if(m%7==6){printf("\n ");}
}
printf(" ... OK!\n");}
else{printf("\n /CC=%2d:",cc);
for(m=0;m<y;m=m+2){
c=ctbl[m]; d=ctbl[m+1];
if((c>0)&&(d>0)){printf(" C%d(%2d,%2d)",m/2+1,c,d);}
}
printf("\n \DD=%2d:",dd);
for(n=0;n<y;n=n+2){
c=dtbl[n]; d=dtbl[n+1];
if((c>0)&&(d>0)){printf(" D%d(%2d,%2d)",n/2+1,c,d);}
}
if((m==8)&&(n==8)){printf(" ... OK!");}
printf("\n");}
}
//

```

次のリストが条件に合格した5セットの補数ペア一覧である。結局のところ、必要な分と同じ5セットしか見つからなかった。後は、これを適切に四方陣内部に配置するだけだ。

*** 条件に合格した補数ペアのセット一覧 ***

/CC= 9: C1(1, 8), C2(2, 7), C3(3, 6), C4(4, 5),
 \DD=25: D1(16, 9), D2(15,10), D3(14,11), D4(13,12); ... OK!

/CC=13: C1(1,12), C2(2,11), C3(3,10), C4(4, 9),
 \DD=21: D1(16, 5), D2(15, 6), D3(14, 7), D4(13, 8); ... OK!

/CC=15: C1(1,14), C2(2,13), C3(5,10), C4(6, 9),
 \DD=19: D1(16, 3), D2(15, 4), D3(12, 7), D4(11, 8); ... OK!

/CC=16: C1(1,15), C2(3,13), C3(5,11), C4(7, 9),
 \DD=18: D1(16, 2), D2(14, 4), D3(12, 6), D4(10, 8); ... OK!

{CC=DD=17}: CD1(1,16), CD2(2,15), CD3(3,14), CD4(4,13),
 CD5(5,12), CD6(6,11), CD7(7,10), CD8(8, 9); ... OK!

この表の縦横を逆にして「何の補数」かをわかりやすく再編集したものが、次表である。このタイプの表↓の方が实际的で、「設計書」として使いやすい(かも知れない)。

5 Groups: (S 9, S25) (S13, S21) (S15, S19) (S16, S18) (S17=S17)

- (1, X) = {(1, 8), (1,12), (1,14), (1,15), (1,16)};
- (2, X) = {(2, 7), (2,11), (2,13), (2,16), (2,15)};
- (3, X) = {(3, 6), (3,10), (3,16), (3,13), (3,14)};
- (4, X) = {(4, 5), (4, 9), (4,15), (4,14), (4,13)};
- (5, X) = {(5, 4), (5,16), (5,10), (5,11), (5,12)};
- (6, X) = {(6, 3), (6,15), (6, 9), (6,12), (6,11)};
- (7, X) = {(7, 2), (7,14), (7,12), (7, 9), (7,10)};
- (8, X) = {(8, 1), (8,13), (8,11), (8,10), (8, 9)};
- (9, X) = {(9,16), (9, 4), (9, 6), (9, 7), (9, 8)};
- (10, X) = {(10,15), (10, 3), (10, 5), (10, 8), (10, 7)};
- (11, X) = {(11,14), (11, 2), (11, 8), (11, 5), (11, 6)};
- (12, X) = {(12,13), (12, 1), (12, 7), (12, 6), (12, 5)};
- (13, X) = {(13,12), (13, 8), (13, 2), (13, 3), (13, 4)};
- (14, X) = {(14,11), (14, 7), (14, 1), (14, 4), (14, 3)};
- (15, X) = {(15,10), (15, 6), (15, 4), (15, 1), (15, 2)};
- (16, X) = {(16, 9), (16, 5), (16, 3), (16, 2), (16, 1)};

[1]	[2]	[3]	13	[4]	[5]
4 n1 n2 n3 n4 1	4 n1 n2 n3 n4 1	n4 n1 n2 n3 n4 1	4 n1 n2 n3 n4 1	4 n1 n2 n3 n4 1	4 n1 n2 n3 n4 1
8 n5 n6 n7 n8 5	8 n5 n6 n7 n8 5	8 n5 n6 n7 n8 5	8 n5 n6 n7 n8 5	8 n5 n6 n7 n8 5	8 n5 n6 n7 n8 5
12 n9 10 11 12 9	12 n9 10 11 12 9	12 n9 10 11 12 9	12 n9 10 11 12 9	12 n9 10 11 12 9	12 n9 10 11 12 9
16 13 14 15 16 13	16 13 14 15 16 13	16 13 14 15 16 13	16 13 14 15 16 13	16 13 14 15 16 13	16 13 14 15 16 13

1の補数ペア5セットを置くべき場所は、上の5タイプ↑ある。

最後の17の補数8ペアは、[5] 図の如く全て汎対角線上に置く。それが、完全型方阵の約束である。他の4セットは、[1]~[4]の場所に置く。どこを選んでも良い。

(1, X)={(1, 8), (1, 12), (1, 14), (1, 15)}

とわかったから、n1=1とした時に、1の左右上下には{ 8, 12, 14, 15}のいずれかしか来ないことがわかる。4個から4個を取る組合せは1であるから、顔ぶれが固定される。

実際の解が、下図↓のようになる必然がおわかりいただけようか？

1/F	2/F	3/F
13 8 10 3 13 8	13 12 6 3 13 12	11 8 10 5 11 8
12 1 15 6 12 1	8 1 15 10 8 1	14 1 15 4 14 1
7 14 4 9 7 14	11 14 4 5 11 14	7 12 6 9 7 12
2 11 5 16 2 11	2 7 9 16 2 7	2 13 3 16 2 13
13 8 10 3 13 8	13 12 6 3 13 12	11 8 10 5 11 8
12 1 15 6 12 1	8 1 15 10 8 1	14 1 15 4 14 1

こうなる理由の1つは方陣の内部構造であるが、もう1つは自然数の数論的性質である。

5. 以上のような性質は、解の総数にどのような影響を与えているであろうか。

$n_1 = 1$ の時に、 $(n_2, n_4, n_5, n_{13}) = \{8, 12, 14, 15\}$

と決まったからには、その並び方は ${}_4P_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 通りある (4個から4個を取る順列)。

$n_1 = 1$ の時の解が 24 個あるのは、いわゆる「原始解」のレベルだ。

* 正方連結完全四方陣の解のリスト：原始解384個（抜粋）*

1#	2#	3#	4#
13 8 10 3 13 8	13 12 6 3 13 12	11 8 10 5 11 8	11 14 4 5 11 14
12 1 15 6 12 1	8 1 15 10 8 1	14 1 15 4 14 1	8 1 15 10 8 1
7 14 4 9 7 14	11 14 4 5 11 14	7 12 6 9 7 12	13 12 6 3 13 12
2 11 5 16 2 11	2 7 9 16 2 7	2 13 3 16 2 13	2 7 9 16 2 7
13 8 10 3 13 8	13 12 6 3 13 12	11 8 10 5 11 8	11 14 4 5 11 14
12 1 15 6 12 1	8 1 15 10 8 1	14 1 15 4 14 1	8 1 15 10 8 1
5#	6#	7#	8#
7 12 6 9 7 12	7 14 4 9 7 14	13 8 11 2 13 8	13 12 7 2 13 12
14 1 15 4 14 1	12 1 15 6 12 1	12 1 14 7 12 1	8 1 14 11 8 1
11 8 10 5 11 8	13 8 10 3 13 8	6 15 4 9 6 15	10 15 4 5 10 15
2 13 3 16 2 13	2 11 5 16 2 11	3 10 5 16 3 10	3 6 9 16 3 6
7 12 6 9 7 12	7 14 4 9 7 14	13 8 11 2 13 8	13 12 7 2 13 12
14 1 15 4 14 1	12 1 15 6 12 1	12 1 14 7 12 1	8 1 14 11 8 1
9#	10#	11#	12#
10 8 11 5 10 8	10 15 4 5 10 15	6 12 7 9 6 12	6 15 4 9 6 15
15 1 14 4 15 1	8 1 14 11 8 1	15 1 14 4 15 1	12 1 14 7 12 1
6 12 7 9 6 12	13 12 7 2 13 12	10 8 11 5 10 8	13 8 11 2 13 8
3 13 2 16 3 13	3 6 9 16 3 6	3 13 2 16 3 13	3 10 5 16 3 10
10 8 11 5 10 8	10 15 4 5 10 15	6 12 7 9 6 12	6 15 4 9 6 15
15 1 14 4 15 1	8 1 14 11 8 1	15 1 14 4 15 1	12 1 14 7 12 1
13#	14#	15#	16#
11 8 13 2 11 8	11 14 7 2 11 14	10 8 13 3 10 8	10 15 6 3 10 15
14 1 12 7 14 1	8 1 12 13 8 1	15 1 12 6 15 1	8 1 12 13 8 1
4 15 6 9 4 15	10 15 6 3 10 15	4 14 7 9 4 14	11 14 7 2 11 14
5 10 3 16 5 10	5 4 9 16 5 4	5 11 2 16 5 11	5 4 9 16 5 4
11 8 13 2 11 8	11 14 7 2 11 14	10 8 13 3 10 8	10 15 6 3 10 15
14 1 12 7 14 1	8 1 12 13 8 1	15 1 12 6 15 1	8 1 12 13 8 1

17#	18#	19#	20#
4 14 7 9 4 14	4 15 6 9 4 15	7 12 13 2 7 12	7 14 11 2 7 14
15 1 12 6 15 1	14 1 12 7 14 1	14 1 8 11 14 1	12 1 8 13 12 1
10 8 13 3 10 8	11 8 13 2 11 8	4 15 10 5 4 15	6 15 10 3 6 15
5 11 2 16 5 11	5 10 3 16 5 10	9 6 3 16 9 6	9 4 5 16 9 4
4 14 7 9 4 14	4 15 6 9 4 15	7 12 13 2 7 12	7 14 11 2 7 14
15 1 12 6 15 1	14 1 12 7 14 1	14 1 8 11 14 1	12 1 8 13 12 1

21#	22#	23#	24#
6 12 13 3 6 12	6 15 10 3 6 15	4 14 11 5 4 14	4 15 10 5 4 15
15 1 8 10 15 1	12 1 8 13 12 1	15 1 8 10 15 1	14 1 8 11 14 1
4 14 11 5 4 14	7 14 11 2 7 14	6 12 13 3 6 12	7 12 13 2 7 12
9 7 2 16 9 7	9 4 5 16 9 4	9 7 2 16 9 7	9 6 3 16 9 6
6 12 13 3 6 12	6 15 10 3 6 15	4 14 11 5 4 14	4 15 10 5 4 15
15 1 8 10 15 1	12 1 8 13 12 1	15 1 8 10 15 1	14 1 8 11 14 1

25#	49#	73#	97#
14 7 9 4 14 7	15 6 9 4 15 6	16 5 10 3 16 5	15 4 9 6 15 4
11 2 16 5 11 2	10 3 16 5 10 3	9 4 15 6 9 4	10 5 16 3 10 5
8 13 3 10 8 13	8 13 2 11 8 13	7 14 1 12 7 14	8 11 2 13 8 11
1 12 6 15 1 12	1 12 7 14 1 12	2 11 8 13 2 11	1 14 7 12 1 14
14 7 9 4 14 7	15 6 9 4 15 6	16 5 10 3 16 5	15 4 9 6 15 4
11 2 16 5 11 2	10 3 16 5 10 3	9 4 15 6 9 4	10 5 16 3 10 5

121#	145#	169#	193#
16 3 10 5 16 3	16 2 11 5 16 2	15 1 12 6 15 1	15 4 5 10 15 4
9 6 15 4 9 6	9 7 14 4 9 7	10 8 13 3 10 8	6 9 16 3 6 9
7 12 1 14 7 12	6 12 1 15 6 12	5 11 2 16 5 11	12 7 2 13 12 7
2 13 8 11 2 13	3 13 8 10 3 13	4 14 7 9 4 14	1 14 11 8 1 14
16 3 10 5 16 3	16 2 11 5 16 2	15 1 12 6 15 1	15 4 5 10 15 4
9 6 15 4 9 6	9 7 14 4 9 7	10 8 13 3 10 8	6 9 16 3 6 9

217#	241#	265#	289#
16 3 6 9 16 3	16 2 7 9 16 2	15 1 8 10 15 1	16 2 7 9 16 2
5 10 15 4 5 10	5 11 14 4 5 11	6 12 13 3 6 12	3 13 12 6 3 13
11 8 1 14 11 8	10 8 1 15 10 8	9 7 2 16 9 7	10 8 1 15 10 8
2 13 12 7 2 13	3 13 12 6 3 13	4 14 11 5 4 14	5 11 14 4 5 11
16 3 6 9 16 3	16 2 7 9 16 2	15 1 8 10 15 1	16 2 7 9 16 2
5 10 15 4 5 10	5 11 14 4 5 11	6 12 13 3 6 12	3 13 12 6 3 13

313#	337#	361#	
15 1 8 10 15 1	14 1 8 11 14 1	13 2 7 12 13 2	
4 14 11 5 4 14	4 15 10 5 4 15	3 16 9 6 3 16	
9 7 2 16 9 7	9 6 3 16 9 6	10 5 4 15 10 5	
6 12 13 3 6 12	7 12 13 2 7 12	8 11 14 1 8 11	
15 1 8 10 15 1	14 1 8 11 14 1	13 2 7 12 13 2	
4 14 11 5 4 14	4 15 10 5 4 15	3 16 9 6 3 16	

[Count = 384]

* 数値1がどの場所にあるかによって解の個数をカウントした結果のリスト： [場所： 解の個数] *
 1: 24, 2: 24, 3: 24, 4: 24, 5: 24, 6: 24, 7: 24, 8: 24,
 9: 24, 10: 24, 11: 24, 12: 24, 13: 24, 14: 24, 15: 24, 16: 24;

数値1の行ける場所は、n1~n16の16通り。各々に24通りの並び方がある。そのことは、上のリスト↑で確認できる。即ち、原始解の総数は $16 \times 24 = 384$ ；そう説明できる。

原始解というのは、正規化によって「標準解」48個に整理する前の「原始的な」解384個のこと。この解集合の中には「反転形」や「回転形」が未整理のままに含まれている。解集合の構造や総数の計算式や変換法を論ずる時には、先ず原始解を調べるのが良い。

#6. 解の総数が数値1とその隣りの4数{8, 12, 14, 15}の並び方で事実上決まってしまうというのは、いかにも唐突な考え方で、分かり難い印象を与えるかも知れない。確認のために、次のリストを用意した。

** 原始解のリストから数値1とその隣りの4数と[N22]の内容を抽出した表： **

1# 8 12-1-15 14 [16]	2# 12 8-1-15 14 [16]	3# 8 14-1-15 12 [16]	4# 14 8-1-15 12 [16]	5# 12 14-1-15 8 [16]	6# 14 12-1-15 8 [16]	7# 8 12-1-14 15 [16]	8# 12 8-1-14 15 [16]
9# 8 15-1-14 12 [16]	10# 15 8-1-14 12 [16]	11# 12 15-1-14 8 [16]	12# 15 12-1-14 8 [16]	13# 8 14-1-12 15 [16]	14# 14 8-1-12 15 [16]	15# 8 15-1-12 14 [16]	16# 15 8-1-12 14 [16]
17# 14 15-1-12 8 [16]	18# 15 14-1-12 8 [16]	19# 12 14-1-8 15 [16]	20# 14 12-1-8 15 [16]	21# 12 15-1-8 14 [16]	22# 15 12-1-8 14 [16]	23# 14 15-1-8 12 [16]	24# 15 14-1-8 12 [16]
25# 8 15-1-12 14 [16]	49# 8 14-1-12 15 [16]	73# 15 14-1-12 8 [16]	97# 8 12-1-14 15 [16]	121# 15 12-1-14 8 [16]	145# 14 12-1-15 8 [16]	169# 14 15-1-12 8 [16]	193# 12 8-1-14 15 [16]
217# 15 8-1-14 12 [16]	241# 14 8-1-15 12 [16]	265# 14 15-1-8 12 [16]	289# 12 8-1-15 14 [16]	313# 12 15-1-8 14 [16]	337# 12 14-1-8 15 [16]	361# 15 14-1-8 12 [16]	

[Count = 384]

数値1がどこへ行こうとも、その隣りにはいつも同じメンバー{8, 12, 14, 15}たちが取り巻いているという「事実」に、先ず納得していただけたらどうか。

その4数の並び方は、n1=1のときの24解が示す如く、「4個から4個を取る順列」で $P = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ 通りと計算できる。

その上、数値1はどこへでも行ける。原始解のリストには、n2=1の解も、n3=1の解も、...、n15=1、n16=1の解も、いずれも24個ずつ含まれている。そして、どの数値1も例外無く、常に同じメンバーに取り巻かれているのである。

したがって、原始解の総数は、 $24 \times 16 = 384$ 個あるのである。

#7. 数値1とその隣りの4数 {8, 12, 14, 15} の並び方で、解の総数が事実上決まってしまうということの受け入れ難さには、もう一つの理由がある。

他の数値、例えば2や3や4や、11や16の関与する余地は無いのか。「一元的」に数値1だけで決まるというのが、何だか専制的で独裁的な気がする人も居るのではないかな。

そういう心優しい「民主主義者」たちのために、次のリストを特別に用意した。

** 原始解のリストから数値2とその隣りの4数と[N2]の内容を抽出した表: **

1#	25#	26#	27#	28#	29#	30#	31#
7	7	11	7	13	11	13	7
16-2-11	11-2-16	7-2-16	13-2-16	7-2-16	13-2-16	11-2-16	11-2-13
13	13	13	11	11	7	7	16
[15]	[15]	[15]	[15]	[15]	[15]	[15]	[15]
32#	33#	34#	35#	36#	37#	38#	39#
11	7	16	11	16	7	13	7
7-2-13	16-2-13	7-2-13	16-2-13	11-2-13	13-2-11	7-2-11	16-2-11
16	11	11	7	7	16	16	13
[15]	[15]	[15]	[15]	[15]	[15]	[15]	[15]
40#	41#	42#	43#	44#	45#	46#	47#
16	13	16	11	13	11	16	13
7-2-11	16-2-11	13-2-11	13-2-7	11-2-7	16-2-7	11-2-7	16-2-7
13	7	7	16	16	13	13	11
[15]	[15]	[15]	[15]	[15]	[15]	[15]	[15]
48#	49#	73#	97#	121#	145#	169#	193#
16	16	7	16	7	13	13	16
13-2-7	13-2-11	13-2-11	11-2-13	11-2-13	16-2-11	11-2-16	7-2-13
11	7	16	7	16	7	7	11
[15]	[15]	[15]	[15]	[15]	[15]	[15]	[15]
217#	241#	265#	289#	313#	337#	361#	
11	13	13	11	11	16	11	
7-2-13	16-2-7	7-2-16	16-2-7	7-2-16	13-2-7	13-2-7	
16	11	11	13	13	11	16	
[15]	[15]	[15]	[15]	[15]	[15]	[15]	

[Count = 384]

** 原始解のリストから数値3とその隣りの隣りの4数、および[N2]の内容を抽出した表: **

1#	25#	49#	50#	51#	52#	53#	54#
16	16	6	10	6	13	10	13
10-3-13	13-3-10	10-3-16	6-3-16	13-3-16	6-3-16	13-3-16	10-3-16
6	6	13	13	10	10	6	6
[14]	[14]	[14]	[14]	[14]	[14]	[14]	[14]
55#	56#	57#	58#	59#	60#	61#	62#
6	10	6	16	10	16	6	13
10-3-13	6-3-13	16-3-13	6-3-13	16-3-13	10-3-13	13-3-10	6-3-10
16	16	10	10	6	6	16	16
[14]	[14]	[14]	[14]	[14]	[14]	[14]	[14]
63#	64#	65#	66#	67#	68#	69#	70#
6	16	13	16	10	13	10	16
16-3-10	6-3-10	16-3-10	13-3-10	13-3-6	10-3-6	16-3-6	10-3-6
13	13	6	6	16	16	13	13
[14]	[14]	[14]	[14]	[14]	[14]	[14]	[14]

71# 3: 6, 16, 10, 13, [14]; 72# 3: 6, 13, 10, 16, [14]; 73# 3: 16, 10, 6, 13, [14];
 97# 3: 10, 16, 13, 6, [14]; 121# 3: 10, 16, 6, 13, [14]; 145# 3: 13, 10, 16, 6, [14];
 169# 3: 10, 13, 16, 6, [14]; 193# 3: 6, 16, 13, 10, [14]; 217# 3: 6, 16, 10, 13, [14];
 241# 3: 13, 6, 16, 10, [14]; 265# 3: 6, 13, 16, 10, [14]; 289# 3: 13, 6, 10, 16, [14];
 313# 3: 6, 13, 10, 16, [14]; 337# 3: 16, 6, 13, 10, [14]; 361# 3: 16, 6, 10, 13, [14];
 [Count = 384]

** 原始解のリストから数値4とその隣りの隣りの4数, および[N22]の内容を抽出した表: **

1# 4: 9, 14, 5, 15, [13]; 25# 4: 14, 9, 5, 15, [13]; 49# 4: 15, 9, 5, 14, [13];
 73# 4: 15, 9, 14, 5, [13]; 74# 4: 15, 5, 14, 9, [13]; 75# 4: 15, 14, 9, 5, [13];
 76# 4: 15, 5, 9, 14, [13]; 77# 4: 15, 14, 5, 9, [13]; 78# 4: 15, 9, 5, 14, [13];
 79# 4: 14, 9, 15, 5, [13]; 80# 4: 14, 5, 15, 9, [13]; 81# 4: 14, 15, 9, 5, [13];
 82# 4: 14, 5, 9, 15, [13]; 83# 4: 14, 15, 5, 9, [13]; 84# 4: 14, 9, 5, 15, [13];
 85# 4: 9, 14, 15, 5, [13]; 86# 4: 9, 5, 15, 14, [13]; 87# 4: 9, 15, 14, 5, [13];
 88# 4: 9, 5, 14, 15, [13]; 89# 4: 9, 15, 5, 14, [13]; 90# 4: 9, 14, 5, 15, [13];
 91# 4: 5, 14, 15, 9, [13]; 92# 4: 5, 9, 15, 14, [13]; 93# 4: 5, 15, 14, 9, [13];
 94# 4: 5, 9, 14, 15, [13]; 95# 4: 5, 15, 9, 14, [13]; 96# 4: 5, 14, 9, 15, [13];
 97# 4: 9, 15, 5, 14, [13]; 121# 4: 9, 15, 14, 5, [13]; 145# 4: 9, 14, 15, 5, [13];
 169# 4: 14, 9, 15, 5, [13]; 193# 4: 5, 15, 9, 14, [13]; 217# 4: 5, 15, 14, 9, [13];
 241# 4: 5, 14, 15, 9, [13]; 265# 4: 14, 5, 15, 9, [13]; 289# 4: 5, 14, 9, 15, [13];
 313# 4: 14, 5, 9, 15, [13]; 337# 4: 15, 5, 9, 14, [13]; 361# 4: 15, 5, 14, 9, [13];
 [Count = 384]

** 原始解のリストから数値5とその隣りの4数, および[N22]の内容を抽出した表: **

1# 5: 16, 11, 10, 4, [12]; 25# 5: 11, 16, 10, 4, [12]; 49# 5: 10, 16, 11, 4, [12];
 73# 5: 10, 16, 4, 11, [12]; 97# 5: 16, 10, 11, 4, [12]; 98# 5: 16, 4, 11, 10, [12];
 99# 5: 16, 11, 10, 4, [12]; 100# 5: 16, 4, 10, 11, [12]; 101# 5: 16, 11, 4, 10, [12];
 102# 5: 16, 10, 4, 11, [12]; 103# 5: 11, 10, 16, 4, [12]; 104# 5: 11, 4, 16, 10, [12];
 105# 5: 11, 16, 10, 4, [12]; 106# 5: 11, 4, 10, 16, [12]; 107# 5: 11, 16, 4, 10, [12];
 108# 5: 11, 10, 4, 16, [12]; 109# 5: 10, 11, 16, 4, [12]; 110# 5: 10, 4, 16, 11, [12];
 111# 5: 10, 16, 11, 4, [12]; 112# 5: 10, 4, 11, 16, [12]; 113# 5: 10, 16, 4, 11, [12];
 114# 5: 10, 11, 4, 16, [12]; 115# 5: 4, 11, 16, 10, [12]; 116# 5: 4, 10, 16, 11, [12];
 117# 5: 4, 16, 11, 10, [12]; 118# 5: 4, 10, 11, 16, [12]; 119# 5: 4, 16, 10, 11, [12];
 120# 5: 4, 11, 10, 16, [12]; 121# 5: 16, 10, 4, 11, [12]; 145# 5: 16, 11, 4, 10, [12];
 169# 5: 11, 16, 4, 10, [12]; 193# 5: 10, 4, 16, 11, [12]; 217# 5: 10, 4, 11, 16, [12];
 241# 5: 11, 4, 10, 16, [12]; 265# 5: 4, 11, 10, 16, [12]; 289# 5: 11, 4, 16, 10, [12];
 313# 5: 4, 11, 16, 10, [12]; 337# 5: 4, 10, 16, 11, [12]; 361# 5: 4, 10, 11, 16, [12];
 [Count = 384]

** 原始解のリストから数値9とその隣りの4数, および[N22]の内容を抽出した表: **

1# 9: 7, 4, 16, 6, [8]; 25# 9: 4, 7, 16, 6, [8]; 49# 9: 4, 6, 16, 7, [8];
 73# 9: 4, 6, 7, 16, [8]; 97# 9: 6, 4, 16, 7, [8]; 121# 9: 6, 4, 7, 16, [8];
 145# 9: 7, 4, 6, 16, [8]; 169# 9: 4, 7, 6, 16, [8]; 193# 9: 16, 6, 7, 4, [8];
 194# 9: 16, 4, 7, 6, [8]; 195# 9: 16, 7, 6, 4, [8]; 196# 9: 16, 4, 6, 7, [8];
 197# 9: 16, 7, 4, 6, [8]; 198# 9: 16, 6, 4, 7, [8]; 199# 9: 7, 6, 16, 4, [8];
 200# 9: 7, 4, 16, 6, [8]; 201# 9: 7, 16, 6, 4, [8]; 202# 9: 7, 4, 6, 16, [8];
 203# 9: 7, 16, 4, 6, [8]; 204# 9: 7, 6, 4, 16, [8]; 205# 9: 6, 7, 16, 4, [8];
 206# 9: 6, 4, 16, 7, [8]; 207# 9: 6, 16, 7, 4, [8]; 208# 9: 6, 4, 7, 16, [8];
 209# 9: 6, 16, 4, 7, [8]; 210# 9: 6, 7, 4, 16, [8]; 211# 9: 4, 7, 16, 6, [8];
 212# 9: 4, 6, 16, 7, [8]; 213# 9: 4, 16, 7, 6, [8]; 214# 9: 4, 6, 7, 16, [8];
 215# 9: 4, 16, 6, 7, [8]; 216# 9: 4, 7, 6, 16, [8]; 217# 9: 16, 6, 4, 7, [8];
 241# 9: 16, 7, 4, 6, [8]; 265# 9: 7, 16, 4, 6, [8]; 289# 9: 16, 7, 6, 4, [8];
 313# 9: 7, 16, 6, 4, [8]; 337# 9: 6, 16, 7, 4, [8]; 361# 9: 6, 16, 4, 7, [8];
 [Count = 384]

** 原始解のリストから数値13とその隣りの4数, および[N22]の内容を抽出した表: **

1# 13: 8, 3, 12, 2, [4]; 25# 13: 3, 8, 12, 2, [4]; 49# 13: 2, 8, 12, 3, [4];
 73# 13: 2, 8, 3, 12, [4]; 97# 13: 8, 2, 12, 3, [4]; 121# 13: 8, 2, 3, 12, [4];
 145# 13: 8, 3, 2, 12, [4]; 169# 13: 3, 8, 2, 12, [4]; 193# 13: 12, 2, 8, 3, [4];
 217# 13: 12, 2, 3, 8, [4]; 241# 13: 12, 3, 2, 8, [4]; 265# 13: 3, 12, 2, 8, [4];
 289# 13: 12, 3, 8, 2, [4]; 290# 13: 12, 2, 8, 3, [4]; 291# 13: 12, 8, 3, 2, [4];
 292# 13: 12, 2, 3, 8, [4]; 293# 13: 12, 8, 2, 3, [4]; 294# 13: 12, 3, 2, 8, [4];
 295# 13: 8, 3, 12, 2, [4]; 296# 13: 8, 2, 12, 3, [4]; 297# 13: 8, 12, 3, 2, [4];
 298# 13: 8, 2, 3, 12, [4]; 299# 13: 8, 12, 2, 3, [4]; 300# 13: 8, 3, 2, 12, [4];
 [Count = 384]

301# 13: 3, 8,12, 2, [4]; 302# 13: 3, 2,12, 8, [4]; 303# 13: 3,12, 8, 2, [4];
 304# 13: 3, 2, 8,12, [4]; 305# 13: 3,12, 2, 8, [4]; 306# 13: 3, 8, 2,12, [4];
 307# 13: 2, 8,12, 3, [4]; 308# 13: 2, 3,12, 8, [4]; 309# 13: 2,12, 8, 3, [4];
 310# 13: 2, 3, 8,12, [4]; 311# 13: 2,12, 3, 8, [4]; 312# 13: 2, 8, 3,12, [4];
 313# 13: 3,12, 8, 2, [4]; 337# 13: 2,12, 8, 3, [4]; 361# 13: 2,12, 3, 8, [4];

[Count = 384]

** 原始解のリストから数値16とその隣りの4数, および[N23]の内容を抽出した表: **

1#	25#	49#	73#	97#	121#	145#	169#
9	9	9	2	9	2	3	3
5-16-2	2-16-5	3-16-5	3-16-5	5-16-3	5-16-3	5-16-2	2-16-5
3	3	2	9	2	9	9	9
[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]
193#	217#	241#	265#	289#	313#	337#	
5	2	3	3	5	5	5	
9-16-3	9-16-3	9-16-2	2-16-9	9-16-2	2-16-9	3-16-9	
2	5	5	5	3	3	2	
[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	

361# 16: 9, 3, 5, 2, [1]; 362# 16: 9, 2, 5, 3, [1]; 363# 16: 9, 5, 3, 2, [1];
 364# 16: 9, 2, 3, 5, [1]; 365# 16: 9, 5, 2, 3, [1]; 366# 16: 9, 3, 2, 5, [1];
 367# 16: 5, 3, 9, 2, [1]; 368# 16: 5, 2, 9, 3, [1]; 369# 16: 5, 9, 3, 2, [1];
 370# 16: 5, 2, 3, 9, [1]; 371# 16: 5, 9, 2, 3, [1]; 372# 16: 5, 3, 2, 9, [1];
 373# 16: 3, 5, 9, 2, [1]; 374# 16: 3, 2, 9, 5, [1]; 375# 16: 3, 9, 5, 2, [1];
 376# 16: 3, 2, 5, 9, [1]; 377# 16: 3, 9, 2, 5, [1]; 378# 16: 3, 5, 2, 9, [1];
 379# 16: 2, 5, 9, 3, [1]; 380# 16: 2, 3, 9, 5, [1]; 381# 16: 2, 9, 5, 3, [1];
 382# 16: 2, 3, 5, 9, [1]; 383# 16: 2, 9, 3, 5, [1]; 384# 16: 2, 5, 3, 9, [1];

[Count = 384]

以上で分かるように, どの数値にも決まった「取り巻きの4数」が平等に付きまとう。その並び方から見て, $24 \times 16 = 384$ の計算式が平等に成り立つ。

しかも, これらの全てが「同時に」起きている。その同時性ゆえに「一元的に」成り立っているように見える。ここに数値1を「代表」として扱って良い理由があるのである。

それら全ての根拠は, 再度表示するが, 自然数16個が用意した例の設計書↓にある。

** Re-arranged List of Essential Complementary Pairs led by their Masters **

5 Groups: (S 9, S25) (S13, S21) (S15, S19) (S16, S18) (S17=S17)

(1, X) = {(1, 8), (1, 12), (1, 14), (1, 15), (1, 16)};
 (2, X) = {(2, 7), (2, 11), (2, 13), (2, 16), (2, 15)};
 (3, X) = {(3, 6), (3, 10), (3, 16), (3, 13), (3, 14)};
 (4, X) = {(4, 5), (4, 9), (4, 15), (4, 14), (4, 13)};
 (5, X) = {(5, 4), (5, 16), (5, 10), (5, 11), (5, 12)};
 (6, X) = {(6, 3), (6, 15), (6, 9), (6, 12), (6, 11)};
 (7, X) = {(7, 2), (7, 14), (7, 12), (7, 9), (7, 10)};
 (8, X) = {(8, 1), (8, 13), (8, 11), (8, 10), (8, 9)};
 (9, X) = {(9, 16), (9, 4), (9, 6), (9, 7), (9, 8)};
 (10, X) = {(10, 15), (10, 3), (10, 5), (10, 8), (10, 7)};
 (11, X) = {(11, 14), (11, 2), (11, 8), (11, 5), (11, 6)};
 (12, X) = {(12, 13), (12, 1), (12, 7), (12, 6), (12, 5)};
 (13, X) = {(13, 12), (13, 8), (13, 2), (13, 3), (13, 4)};
 (14, X) = {(14, 11), (14, 7), (14, 1), (14, 4), (14, 3)};
 (15, X) = {(15, 10), (15, 6), (15, 4), (15, 1), (15, 2)};
 (16, X) = {(16, 9), (16, 5), (16, 3), (16, 2), (16, 1)};

OK!

自然数の用意してくれたこの設計書と, 例の正方連結完全四方陣の緻密な構造の両者が, この384個の「奇跡」を生み出しているのだ。… そう考えざるを得ない。

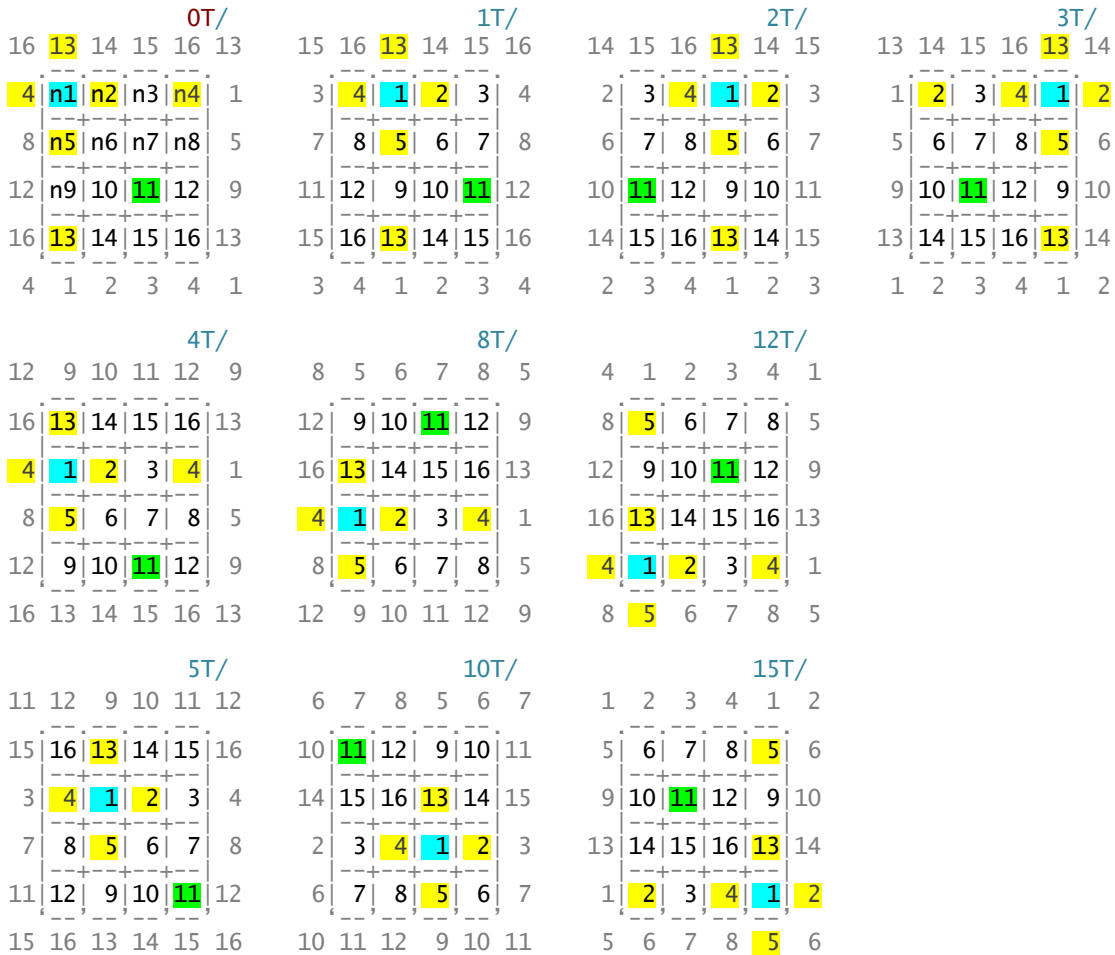
8. 次は、変換構成法を考える。n1=1の24解を元にして、各々について16通りの変換を施し、最終的に24×16=384個の原始解を作りたい。そうすることによって、今までに論じたことの追跡・検証を試みたい。

では、どのような変換構成法を採用するか。先ずn1に有った1をn2, n3, n4, ..., n9, ..., n16に移動し、その時に1の隣りの4数とn11の16も一緒に動かしたい。

要するに下図のような変換をしたいのだ。

この様に都合の良い構成法がかつて有っただろうか。

** 正方連結完全四方陣の基本図と変換構成法概念図 (拡張方阵空間図で示す): 抜粋 **



良く見ていただければわかると思うが、行・列を単位にして順繰りに移動している。これは、例の「汎魔方陣シフト」だ。そのものズバリではないか。

そうとわかったからには、0T/を元にしてそれを変換し1T/~15T/を連続的に構成するプログラムを組んで、早速にも実行することにしよう。

* 汎魔方陣シフトによる変換構成法: n1=1の24解を各々15通りに書き換えた結果 (全) *

Group 1: (各解の右肩にある番号#は、元のリストに当たって調べた原始解の番号である)



185#	295#	60#	235#
2 11 5 16 2 11 13 8 10 3 13 8 12 1 15 6 12 1 7 14 4 9 7 14 2 11 5 16 2 11 13 8 10 3 13 8	16 2 11 5 16 2 3 13 8 10 3 13 6 12 1 15 6 12 9 7 14 4 9 7 16 2 11 5 16 2 3 13 8 10 3 13	5 16 2 11 5 16 10 3 13 8 10 3 15 6 12 1 15 6 4 9 7 14 4 9 5 16 2 11 5 16 10 3 13 8 10 3	11 5 16 2 11 5 8 10 3 13 8 10 1 15 6 12 1 15 14 4 9 7 14 4 11 5 16 2 11 5 8 10 3 13 8 10
256#	39#	384#	99#
7 14 4 9 7 14 2 11 5 16 2 11 13 8 10 3 13 8 12 1 15 6 12 1 7 14 4 9 7 14 2 11 5 16 2 11	9 7 14 4 9 7 16 2 11 5 16 2 3 13 8 10 3 13 6 12 1 15 6 12 9 7 14 4 9 7 16 2 11 5 16 2	4 9 7 14 4 9 5 16 2 11 5 16 10 3 13 8 10 3 15 6 12 1 15 6 4 9 7 14 4 9 5 16 2 11 5 16	14 4 9 7 14 4 11 5 16 2 11 5 8 10 3 13 8 10 1 15 6 12 1 15 14 4 9 7 14 4 11 5 16 2 11 5
325#	150#	200#	90#
12 1 15 6 12 1 7 14 4 9 7 14 2 11 5 16 2 11 13 8 10 3 13 8 12 1 15 6 12 1 7 14 4 9 7 14	6 12 1 15 6 12 9 7 14 4 9 7 16 2 11 5 16 2 3 13 8 10 3 13 6 12 1 15 6 12 9 7 14 4 9 7	15 6 12 1 15 6 4 9 7 14 4 9 5 16 2 11 5 16 10 3 13 8 10 3 15 6 12 1 15 6 4 9 7 14 4 9	1 15 6 12 1 15 14 4 9 7 14 4 11 5 16 2 11 5 8 10 3 13 8 10 1 15 6 12 1 15 14 4 9 7 14 4

Group 2: (各解の右肩にある 番号# は、元のリストに当たって調べた原始解の番号である)

2#	190#	225#	340#
13 12 6 3 13 12 8 1 15 10 8 1 11 14 4 5 11 14 2 7 9 16 2 7 13 12 6 3 13 12 8 1 15 10 8 1	3 13 12 6 3 13 10 8 1 15 10 8 5 11 14 4 5 11 16 2 7 9 16 2 3 13 12 6 3 13 10 8 1 15 10 8	6 3 13 12 6 3 15 10 8 1 15 10 4 5 11 14 4 5 9 16 2 7 9 16 6 3 13 12 6 3 15 10 8 1 15 10	12 6 3 13 12 6 1 15 10 8 1 15 14 4 5 11 14 4 7 9 16 2 7 9 12 6 3 13 12 6 1 15 10 8 1 15
281#	289#	58#	139#
2 7 9 16 2 7 13 12 6 3 13 12 8 1 15 10 8 1 11 14 4 5 11 14 2 7 9 16 2 7 13 12 6 3 13 12	16 2 7 9 16 2 3 13 12 6 3 13 10 8 1 15 10 8 5 11 14 4 5 11 16 2 7 9 16 2 3 13 12 6 3 13	9 16 2 7 9 16 6 3 13 12 6 3 15 10 8 1 15 10 4 5 11 14 4 5 9 16 2 7 9 16 6 3 13 12 6 3	7 9 16 2 7 9 12 6 3 13 12 6 1 15 10 8 1 15 14 4 5 11 14 4 7 9 16 2 7 9 12 6 3 13 12 6
160#	45#	383#	195#
11 14 4 5 11 14 2 7 9 16 2 7 13 12 6 3 13 12 8 1 15 10 8 1 11 14 4 5 11 14 2 7 9 16 2 7	5 11 14 4 5 11 16 2 7 9 16 2 3 13 12 6 3 13 10 8 1 15 10 8 5 11 14 4 5 11 16 2 7 9 16 2	4 5 11 14 4 5 9 16 2 7 9 16 6 3 13 12 6 3 15 10 8 1 15 10 4 5 11 14 4 5 9 16 2 7 9 16	14 4 5 11 14 4 7 9 16 2 7 9 12 6 3 13 12 6 1 15 10 8 1 15 14 4 5 11 14 4 7 9 16 2 7 9

327#	246#	104#	96#
8 1 15 10 8 1	10 8 1 15 10 8	15 10 8 1 15 10	1 15 10 8 1 15
11 14 4 5 11 14	5 11 14 4 5 11	4 5 11 14 4 5	14 4 5 11 14 4
2 7 9 16 2 7	16 2 7 9 16 2	9 16 2 7 9 16	7 9 16 2 7 9
13 12 6 3 13 12	3 13 12 6 3 13	6 3 13 12 6 3	12 6 3 13 12 6
8 1 15 10 8 1	10 8 1 15 10 8	15 10 8 1 15 10	1 15 10 8 1 15
11 14 4 5 11 14	5 11 14 4 5 11	4 5 11 14 4 5	14 4 5 11 14 4

Group 3: (各解の右肩にある 番号# は、元のリストに当たって調べた原始解の番号である)

3#	334#	81#	352#
11 8 10 5 11 8	5 11 8 10 5 11	10 5 11 8 10 5	8 10 5 11 8 10
14 1 15 4 14 1	4 14 1 15 4 14	15 4 14 1 15 4	1 15 4 14 1 15
7 12 6 9 7 12	9 7 12 6 9 7	6 9 7 12 6 9	12 6 9 7 12 6
2 13 3 16 2 13	16 2 13 3 16 2	3 16 2 13 3 16	13 3 16 2 13 3
11 8 10 5 11 8	5 11 8 10 5 11	10 5 11 8 10 5	8 10 5 11 8 10
14 1 15 4 14 1	4 14 1 15 4 14	15 4 14 1 15 4	1 15 4 14 1 15

186#	247#	108#	229#
2 13 3 16 2 13	16 2 13 3 16 2	3 16 2 13 3 16	13 3 16 2 13 3
11 8 10 5 11 8	5 11 8 10 5 11	10 5 11 8 10 5	8 10 5 11 8 10
14 1 15 4 14 1	4 14 1 15 4 14	15 4 14 1 15 4	1 15 4 14 1 15
7 12 6 9 7 12	9 7 12 6 9 7	6 9 7 12 6 9	12 6 9 7 12 6
2 13 3 16 2 13	16 2 13 3 16 2	3 16 2 13 3 16	13 3 16 2 13 3
11 8 10 5 11 8	5 11 8 10 5 11	10 5 11 8 10 5	8 10 5 11 8 10

304#	33#	382#	51#	277#	156#	199#	138#
13 3 16 2	2 13 3 16	16 2 13 3	3 16 2 13	12 6 9 7	7 12 6 9	9 7 12 6	6 9 7 12
8 10 5 11	11 8 10 5	5 11 8 10	10 5 11 8	13 3 16 2	2 13 3 16	16 2 13 3	3 16 2 13
1 15 4 14	14 1 15 4	4 14 1 15	15 4 14 1	8 10 5 11	11 8 10 5	5 11 8 10	10 5 11 8
12 6 9 7	7 12 6 9	9 7 12 6	6 9 7 12	1 15 4 14	14 1 15 4	4 14 1 15	15 4 14 1

Group 4: (各解の右肩にある 番号# は、元のリストに当たって調べた原始解の番号である)

4#	188#	227#	338#	329#	241#	106#	91#
1 15 10 8	8 1 15 10	10 8 1 15	15 10 8 1	14 4 5 11	11 14 4 5	5 11 14 4	4 5 11 14
12 6 3 13	13 12 6 3	3 13 12 6	6 3 13 12	1 15 10 8	8 1 15 10	10 8 1 15	15 10 8 1
7 9 16 2	2 7 9 16	16 2 7 9	9 16 2 7	12 6 3 13	13 12 6 3	3 13 12 6	6 3 13 12
14 4 5 11	11 14 4 5	5 11 14 4	4 5 11 14	7 9 16 2	2 7 9 16	16 2 7 9	9 16 2 7
158#	47#	381#	197#	279#	294#	56#	144#
7 9 16 2	2 7 9 16	16 2 7 9	9 16 2 7	12 6 3 13	13 12 6 3	3 13 12 6	6 3 13 12
14 4 5 11	11 14 4 5	5 11 14 4	4 5 11 14	7 9 16 2	2 7 9 16	16 2 7 9	9 16 2 7
1 15 10 8	8 1 15 10	10 8 1 15	15 10 8 1	14 4 5 11	11 14 4 5	5 11 14 4	4 5 11 14
12 6 3 13	13 12 6 3	3 13 12 6	6 3 13 12	1 15 10 8	8 1 15 10	10 8 1 15	15 10 8 1

Group 5:

5#	332#	83#	350#	282#	151#	204#	133#
1 15 4 14	14 1 15 4	4 14 1 15	15 4 14 1	12 6 9 7	7 12 6 9	9 7 12 6	6 9 7 12
8 10 5 11	11 8 10 5	5 11 8 10	10 5 11 8	1 15 4 14	14 1 15 4	4 14 1 15	15 4 14 1
13 3 16 2	2 13 3 16	16 2 13 3	3 16 2 13	8 10 5 11	11 8 10 5	5 11 8 10	10 5 11 8
12 6 9 7	7 12 6 9	9 7 12 6	6 9 7 12	13 3 16 2	2 13 3 16	16 2 13 3	3 16 2 13
302#	35#	380#	53#	181#	252#	103#	234#
13 3 16 2	2 13 3 16	16 2 13 3	3 16 2 13	8 10 5 11	11 8 10 5	5 11 8 10	10 5 11 8
12 6 9 7	7 12 6 9	9 7 12 6	6 9 7 12	13 3 16 2	2 13 3 16	16 2 13 3	3 16 2 13
1 15 4 14	14 1 15 4	4 14 1 15	15 4 14 1	12 6 9 7	7 12 6 9	9 7 12 6	6 9 7 12
8 10 5 11	11 8 10 5	5 11 8 10	10 5 11 8	1 15 4 14	14 1 15 4	4 14 1 15	15 4 14 1

Group 6:

6#	284#	131#	344#	330#	145#	202#	85#
1 15 6 12	12 1 15 6	6 12 1 15	15 6 12 1	14 4 9 7	7 14 4 9	9 7 14 4	4 9 7 14
8 10 3 13	13 8 10 3	3 13 8 10	10 3 13 8	1 15 6 12	12 1 15 6	6 12 1 15	15 6 12 1
11 5 16 2	2 11 5 16	16 2 11 5	5 16 2 11	8 10 3 13	13 8 10 3	3 13 8 10	10 3 13 8
14 4 9 7	7 14 4 9	9 7 14 4	4 9 7 14	11 5 16 2	2 11 5 16	16 2 11 5	5 16 2 11

254#	41#	379#	101#	183#	300#	55#	240#
11 5 16 2	2 11 5 16	16 2 11 5	5 16 2 11	8 10 3 13	13 8 10 3	3 13 8 10	10 3 13 8
14 4 9 7	7 14 4 9	9 7 14 4	4 9 7 14	11 5 16 2	2 11 5 16	16 2 11 5	5 16 2 11
1 15 6 12	12 1 15 6	6 12 1 15	15 6 12 1	14 4 9 7	7 14 4 9	9 7 14 4	4 9 7 14
8 10 3 13	13 8 10 3	3 13 8 10	10 3 13 8	1 15 6 12	12 1 15 6	6 12 1 15	15 6 12 1

Group 7:

7#	288#	153#	322#	179#	296#	36#	259#
1 14 7 12	12 1 14 7	7 12 1 14	14 7 12 1	8 11 2 13	13 8 11 2	2 13 8 11	11 2 13 8
15 4 9 6	6 15 4 9	9 6 15 4	4 9 6 15	1 14 7 12	12 1 14 7	7 12 1 14	14 7 12 1
10 5 16 3	3 10 5 16	16 3 10 5	5 16 3 10	15 4 9 6	6 15 4 9	9 6 15 4	4 9 6 15
8 11 2 13	13 8 11 2	2 13 8 11	11 2 13 8	10 5 16 3	3 10 5 16	16 3 10 5	5 16 3 10

232#	63#	378#	97#	349#	126#	206#	89#
10 5 16 3	3 10 5 16	16 3 10 5	5 16 3 10	15 4 9 6	6 15 4 9	9 6 15 4	4 9 6 15
8 11 2 13	13 8 11 2	2 13 8 11	11 2 13 8	10 5 16 3	3 10 5 16	16 3 10 5	5 16 3 10
1 14 7 12	12 1 14 7	7 12 1 14	14 7 12 1	8 11 2 13	13 8 11 2	2 13 8 11	11 2 13 8
15 4 9 6	6 15 4 9	9 6 15 4	4 9 6 15	1 14 7 12	12 1 14 7	7 12 1 14	14 7 12 1

Group 8:

8#	192#	249#	316#	275#	290#	34#	163#
1 14 11 8	8 1 14 11	11 8 1 14	14 11 8 1	12 7 2 13	13 12 7 2	2 13 12 7	7 2 13 12
15 4 5 10	10 15 4 5	5 10 15 4	4 5 10 15	1 14 11 8	8 1 14 11	11 8 1 14	14 11 8 1
6 9 16 3	3 6 9 16	16 3 6 9	9 16 3 6	15 4 5 10	10 15 4 5	5 10 15 4	4 5 10 15
12 7 2 13	13 12 7 2	2 13 12 7	7 2 13 12	6 9 16 3	3 6 9 16	16 3 6 9	9 16 3 6

136#	69#	377#	193#	351#	222#	110#	95#
6 9 16 3	3 6 9 16	16 3 6 9	9 16 3 6	15 4 5 10	10 15 4 5	5 10 15 4	4 5 10 15
12 7 2 13	13 12 7 2	2 13 12 7	7 2 13 12	6 9 16 3	3 6 9 16	16 3 6 9	9 16 3 6
1 14 11 8	8 1 14 11	11 8 1 14	14 11 8 1	12 7 2 13	13 12 7 2	2 13 12 7	7 2 13 12
15 4 5 10	10 15 4 5	5 10 15 4	4 5 10 15	1 14 11 8	8 1 14 11	11 8 1 14	14 11 8 1

Group 9:

9#	358#	75#	328#	180#	223#	114#	253#
1 14 4 15	15 1 14 4	4 15 1 14	14 4 15 1	8 11 5 10	10 8 11 5	5 10 8 11	11 5 10 8
12 7 9 6	6 12 7 9	9 6 12 7	7 9 6 12	1 14 4 15	15 1 14 4	4 15 1 14	14 4 15 1
13 2 16 3	3 13 2 16	16 3 13 2	2 16 3 13	12 7 9 6	6 12 7 9	9 6 12 7	7 9 6 12
8 11 5 10	10 8 11 5	5 10 8 11	11 5 10 8	13 2 16 3	3 13 2 16	16 3 13 2	2 16 3 13

310#	57#	376#	27#	271#	132#	205#	162#
13 2 16 3	3 13 2 16	16 3 13 2	2 16 3 13	12 7 9 6	6 12 7 9	9 6 12 7	7 9 6 12
8 11 5 10	10 8 11 5	5 10 8 11	11 5 10 8	13 2 16 3	3 13 2 16	16 3 13 2	2 16 3 13
1 14 4 15	15 1 14 4	4 15 1 14	14 4 15 1	8 11 5 10	10 8 11 5	5 10 8 11	11 5 10 8
12 7 9 6	6 12 7 9	9 6 12 7	7 9 6 12	1 14 4 15	15 1 14 4	4 15 1 14	14 4 15 1

Group 10:

10#	187#	251#	314#	353#	217#	112#	93#
1 14 11 8	8 1 14 11	11 8 1 14	14 11 8 1	15 4 5 10	10 15 4 5	5 10 15 4	4 5 10 15
12 7 2 13	13 12 7 2	2 13 12 7	7 2 13 12	1 14 11 8	8 1 14 11	11 8 1 14	14 11 8 1
6 9 16 3	3 6 9 16	16 3 6 9	9 16 3 6	12 7 2 13	13 12 7 2	2 13 12 7	7 2 13 12
15 4 5 10	10 15 4 5	5 10 15 4	4 5 10 15	6 9 16 3	3 6 9 16	16 3 6 9	9 16 3 6

134#	71#	375#	198#	273#	292#	32#	168#
6 9 16 3	3 6 9 16	16 3 6 9	9 16 3 6	12 7 2 13	13 12 7 2	2 13 12 7	7 2 13 12
15 4 5 10	10 15 4 5	5 10 15 4	4 5 10 15	6 9 16 3	3 6 9 16	16 3 6 9	9 16 3 6
1 14 11 8	8 1 14 11	11 8 1 14	14 11 8 1	15 4 5 10	10 15 4 5	5 10 15 4	4 5 10 15
12 7 2 13	13 12 7 2	2 13 12 7	7 2 13 12	1 14 11 8	8 1 14 11	11 8 1 14	14 11 8 1

Group 11:

11#	356#	77#	326#	276#	127#	210#	157#
1 14 4 15	15 1 14 4	4 15 1 14	14 4 15 1	12 7 9 6	6 12 7 9	9 6 12 7	7 9 6 12
8 11 5 10	10 8 11 5	5 10 8 11	11 5 10 8	1 14 4 15	15 1 14 4	4 15 1 14	14 4 15 1
13 2 16 3	3 13 2 16	16 3 13 2	2 16 3 13	8 11 5 10	10 8 11 5	5 10 8 11	11 5 10 8
12 7 9 6	6 12 7 9	9 6 12 7	7 9 6 12	13 2 16 3	3 13 2 16	16 3 13 2	2 16 3 13
308#	59#	374#	29#	175#	228#	109#	258#
13 2 16 3	3 13 2 16	16 3 13 2	2 16 3 13	8 11 5 10	10 8 11 5	5 10 8 11	11 5 10 8
12 7 9 6	6 12 7 9	9 6 12 7	7 9 6 12	13 2 16 3	3 13 2 16	16 3 13 2	2 16 3 13
1 14 4 15	15 1 14 4	4 15 1 14	14 4 15 1	12 7 9 6	6 12 7 9	9 6 12 7	7 9 6 12
8 11 5 10	10 8 11 5	5 10 8 11	11 5 10 8	1 14 4 15	15 1 14 4	4 15 1 14	14 4 15 1

Group 12:

12#	283#	155#	320#	354#	121#	208#	87#
1 14 7 12	12 1 14 7	7 12 1 14	14 7 12 1	15 4 9 6	6 15 4 9	9 6 15 4	4 9 6 15
8 11 2 13	13 8 11 2	2 13 8 11	11 2 13 8	1 14 7 12	12 1 14 7	7 12 1 14	14 7 12 1
10 5 16 3	3 10 5 16	16 3 10 5	5 16 3 10	8 11 2 13	13 8 11 2	2 13 8 11	11 2 13 8
15 4 9 6	6 15 4 9	9 6 15 4	4 9 6 15	10 5 16 3	3 10 5 16	16 3 10 5	5 16 3 10
1 14 7 12	12 1 14 7	7 12 1 14	14 7 12 1	15 4 9 6	6 15 4 9	9 6 15 4	4 9 6 15
8 11 2 13	13 8 11 2	2 13 8 11	11 2 13 8	1 14 7 12	12 1 14 7	7 12 1 14	14 7 12 1
230#	65#	373#	102#	177#	298#	31#	264#
10 5 16 3	3 10 5 16	16 3 10 5	5 16 3 10	8 11 2 13	13 8 11 2	2 13 8 11	11 2 13 8
15 4 9 6	6 15 4 9	9 6 15 4	4 9 6 15	10 5 16 3	3 10 5 16	16 3 10 5	5 16 3 10
1 14 7 12	12 1 14 7	7 12 1 14	14 7 12 1	15 4 9 6	6 15 4 9	9 6 15 4	4 9 6 15
8 11 2 13	13 8 11 2	2 13 8 11	11 2 13 8	1 14 7 12	12 1 14 7	7 12 1 14	14 7 12 1

Group 13:

13#	336#	147#	274#	173#	248#	42#	307#
1 12 7 14	14 1 12 7	7 14 1 12	12 7 14 1	8 13 2 11	11 8 13 2	2 11 8 13	13 2 11 8
15 6 9 4	4 15 6 9	9 4 15 6	6 9 4 15	1 12 7 14	14 1 12 7	7 14 1 12	12 7 14 1
10 3 16 5	5 10 3 16	16 5 10 3	3 16 5 10	15 6 9 4	4 15 6 9	9 4 15 6	6 9 4 15
8 13 2 11	11 8 13 2	2 11 8 13	13 2 11 8	10 3 16 5	5 10 3 16	16 5 10 3	3 16 5 10
1 12 7 14	14 1 12 7	7 14 1 12	12 7 14 1	8 13 2 11	11 8 13 2	2 11 8 13	13 2 11 8
15 6 9 4	4 15 6 9	9 4 15 6	6 9 4 15	1 12 7 14	14 1 12 7	7 14 1 12	12 7 14 1
238#	111#	372#	49#	343#	78#	212#	137#
10 3 16 5	5 10 3 16	16 5 10 3	3 16 5 10	15 6 9 4	4 15 6 9	9 4 15 6	6 9 4 15
8 13 2 11	11 8 13 2	2 11 8 13	13 2 11 8	10 3 16 5	5 10 3 16	16 5 10 3	3 16 5 10
1 12 7 14	14 1 12 7	7 14 1 12	12 7 14 1	8 13 2 11	11 8 13 2	2 11 8 13	13 2 11 8
15 6 9 4	4 15 6 9	9 4 15 6	6 9 4 15	1 12 7 14	14 1 12 7	7 14 1 12	12 7 14 1

Group 14:

14#	191#	297#	268#	323#	242#	40#	165#
1 12 13 8	8 1 12 13	13 8 1 12	12 13 8 1	14 7 2 11	11 14 7 2	2 11 14 7	7 2 11 14
15 6 3 10	10 15 6 3	3 10 15 6	6 3 10 15	1 12 13 8	8 1 12 13	13 8 1 12	12 13 8 1
4 9 16 5	5 4 9 16	16 5 4 9	9 16 5 4	15 6 3 10	10 15 6 3	3 10 15 6	6 3 10 15
14 7 2 11	11 14 7 2	2 11 14 7	7 2 11 14	4 9 16 5	5 4 9 16	16 5 4 9	9 16 5 4
1 12 13 8	8 1 12 13	13 8 1 12	12 13 8 1	14 7 2 11	11 14 7 2	2 11 14 7	7 2 11 14
15 6 3 10	10 15 6 3	3 10 15 6	6 3 10 15	1 12 13 8	8 1 12 13	13 8 1 12	12 13 8 1
88#	117#	371#	194#	345#	220#	62#	143#
4 9 16 5	5 4 9 16	16 5 4 9	9 16 5 4	15 6 3 10	10 15 6 3	3 10 15 6	6 3 10 15
14 7 2 11	11 14 7 2	2 11 14 7	7 2 11 14	4 9 16 5	5 4 9 16	16 5 4 9	9 16 5 4
1 12 13 8	8 1 12 13	13 8 1 12	12 13 8 1	14 7 2 11	11 14 7 2	2 11 14 7	7 2 11 14
15 6 3 10	10 15 6 3	3 10 15 6	6 3 10 15	1 12 13 8	8 1 12 13	13 8 1 12	12 13 8 1

Group 15:

15#	360#	123#	280#	174#	224#	66#	301#
1 12 6 15	15 1 12 6	6 15 1 12	12 6 15 1	8 13 3 10	10 8 13 3	3 10 8 13	13 3 10 8
14 7 9 4	4 14 7 9	9 4 14 7	7 9 4 14	1 12 6 15	15 1 12 6	6 15 1 12	12 6 15 1
11 2 16 5	5 11 2 16	16 5 11 2	2 16 5 11	14 7 9 4	4 14 7 9	9 4 14 7	7 9 4 14
8 13 3 10	10 8 13 3	3 10 8 13	13 3 10 8	11 2 16 5	5 11 2 16	16 5 11 2	2 16 5 11
1 12 6 15	15 1 12 6	6 15 1 12	12 6 15 1	8 13 3 10	10 8 13 3	3 10 8 13	13 3 10 8
14 7 9 4	4 14 7 9	9 4 14 7	7 9 4 14	1 12 6 15	15 1 12 6	6 15 1 12	12 6 15 1
262#	105#	370#	25#	319#	84#	211#	161#
11 2 16 5	5 11 2 16	16 5 11 2	2 16 5 11	14 7 9 4	4 14 7 9	9 4 14 7	7 9 4 14
8 13 3 10	10 8 13 3	3 10 8 13	13 3 10 8	11 2 16 5	5 11 2 16	16 5 11 2	2 16 5 11
1 12 6 15	15 1 12 6	6 15 1 12	12 6 15 1	8 13 3 10	10 8 13 3	3 10 8 13	13 3 10 8
14 7 9 4	4 14 7 9	9 4 14 7	7 9 4 14	1 12 6 15	15 1 12 6	6 15 1 12	12 6 15 1

Group 16:

16#	189#	299#	266#	347#	218#	64#	141#
1 12 13 8	8 1 12 13	13 8 1 12	12 13 8 1	15 6 3 10	10 15 6 3	3 10 15 6	6 3 10 15
14 7 2 11	11 14 7 2	2 11 14 7	7 2 11 14	1 12 13 8	8 1 12 13	13 8 1 12	12 13 8 1
4 9 16 5	5 4 9 16	16 5 4 9	9 16 5 4	14 7 2 11	11 14 7 2	2 11 14 7	7 2 11 14
15 6 3 10	10 15 6 3	3 10 15 6	6 3 10 15	4 9 16 5	5 4 9 16	16 5 4 9	9 16 5 4

86#	119#	369#	196#	321#	244#	38#	167#
4 9 16 5	5 4 9 16	16 5 4 9	9 16 5 4	14 7 2 11	11 14 7 2	2 11 14 7	7 2 11 14
15 6 3 10	10 15 6 3	3 10 15 6	6 3 10 15	4 9 16 5	5 4 9 16	16 5 4 9	9 16 5 4
1 12 13 8	8 1 12 13	13 8 1 12	12 13 8 1	15 6 3 10	10 15 6 3	3 10 15 6	6 3 10 15
14 7 2 11	11 14 7 2	2 11 14 7	7 2 11 14	1 12 13 8	8 1 12 13	13 8 1 12	12 13 8 1

Group 17:

17#	355#	125#	278#	324#	79#	216#	159#
1 12 6 15	15 1 12 6	6 15 1 12	12 6 15 1	14 7 9 4	4 14 7 9	9 4 14 7	7 9 4 14
8 13 3 10	10 8 13 3	3 10 8 13	13 3 10 8	1 12 6 15	15 1 12 6	6 15 1 12	12 6 15 1
11 2 16 5	5 11 2 16	16 5 11 2	2 16 5 11	8 13 3 10	10 8 13 3	3 10 8 13	13 3 10 8
14 7 9 4	4 14 7 9	9 4 14 7	7 9 4 14	11 2 16 5	5 11 2 16	16 5 11 2	2 16 5 11

260#	107#	368#	30#	169#	226#	61#	306#
11 2 16 5	5 11 2 16	16 5 11 2	2 16 5 11	8 13 3 10	10 8 13 3	3 10 8 13	13 3 10 8
14 7 9 4	4 14 7 9	9 4 14 7	7 9 4 14	11 2 16 5	5 11 2 16	16 5 11 2	2 16 5 11
1 12 6 15	15 1 12 6	6 15 1 12	12 6 15 1	14 7 9 4	4 14 7 9	9 4 14 7	7 9 4 14
8 13 3 10	10 8 13 3	3 10 8 13	13 3 10 8	1 12 6 15	15 1 12 6	6 15 1 12	12 6 15 1

Group 18:

18#	331#	149#	272#	348#	73#	214#	135#
1 12 7 14	14 1 12 7	7 14 1 12	12 7 14 1	15 6 9 4	4 15 6 9	9 4 15 6	6 9 4 15
8 13 2 11	11 8 13 2	2 11 8 13	13 2 11 8	1 12 7 14	14 1 12 7	7 14 1 12	12 7 14 1
10 3 16 5	5 10 3 16	16 5 10 3	3 16 5 10	8 13 2 11	11 8 13 2	2 11 8 13	13 2 11 8
15 6 9 4	4 15 6 9	9 4 15 6	6 9 4 15	10 3 16 5	5 10 3 16	16 5 10 3	3 16 5 10

236#	113#	367#	54#	171#	250#	37#	312#
10 3 16 5	5 10 3 16	16 5 10 3	3 16 5 10	8 13 2 11	11 8 13 2	2 11 8 13	13 2 11 8
15 6 9 4	4 15 6 9	9 4 15 6	6 9 4 15	10 3 16 5	5 10 3 16	16 5 10 3	3 16 5 10
1 12 7 14	14 1 12 7	7 14 1 12	12 7 14 1	15 6 9 4	4 15 6 9	9 4 15 6	6 9 4 15
8 13 2 11	11 8 13 2	2 11 8 13	13 2 11 8	1 12 7 14	14 1 12 7	7 14 1 12	12 7 14 1

Group 19:

19#	335#	243#	178#	269#	152#	48#	309#
1 8 11 14	14 1 8 11	11 14 1 8	8 11 14 1	12 13 2 7	7 12 13 2	2 7 12 13	13 2 7 12
15 10 5 4	4 15 10 5	5 4 15 10	10 5 4 15	1 8 11 14	14 1 8 11	11 14 1 8	8 11 14 1
6 3 16 9	9 6 3 16	16 9 6 3	3 16 9 6	15 10 5 4	4 15 10 5	5 4 15 10	10 5 4 15
12 13 2 7	7 12 13 2	2 7 12 13	13 2 7 12	6 3 16 9	9 6 3 16	16 9 6 3	3 16 9 6

142#	207#	366#	50#	337#	76#	116#	233#
6 3 16 9	9 6 3 16	16 9 6 3	3 16 9 6	15 10 5 4	4 15 10 5	5 4 15 10	10 5 4 15
12 13 2 7	7 12 13 2	2 7 12 13	13 2 7 12	6 3 16 9	9 6 3 16	16 9 6 3	3 16 9 6
1 8 11 14	14 1 8 11	11 14 1 8	8 11 14 1	12 13 2 7	7 12 13 2	2 7 12 13	13 2 7 12
15 10 5 4	4 15 10 5	5 4 15 10	10 5 4 15	1 8 11 14	14 1 8 11	11 14 1 8	8 11 14 1

Group 20:

20#	287#	291#	172#	317#	146#	46#	261#
1 8 13 12	12 1 8 13	13 12 1 8	8 13 12 1	14 11 2 7	7 14 11 2	2 7 14 11	11 2 7 14
15 10 3 6	6 15 10 3	3 6 15 10	10 3 6 15	1 8 13 12	12 1 8 13	13 12 1 8	8 13 12 1
4 5 16 9	9 4 5 16	16 9 4 5	5 16 9 4	15 10 3 6	6 15 10 3	3 6 15 10	10 3 6 15
14 11 2 7	7 14 11 2	2 7 14 11	11 2 7 14	4 5 16 9	9 4 5 16	16 9 4 5	5 16 9 4

94#	213#	365#	98#	339#	124#	68#	239#
4 5 16 9	9 4 5 16	16 9 4 5	5 16 9 4	15 10 3 6	6 15 10 3	3 6 15 10	10 3 6 15
14 11 2 7	7 14 11 2	2 7 14 11	11 2 7 14	4 5 16 9	9 4 5 16	16 9 4 5	5 16 9 4
1 8 13 12	12 1 8 13	13 12 1 8	8 13 12 1	14 11 2 7	7 14 11 2	2 7 14 11	11 2 7 14
15 10 3 6	6 15 10 3	3 6 15 10	10 3 6 15	1 8 13 12	12 1 8 13	13 12 1 8	8 13 12 1

** Calculated and Listed by Kanji Setsuda on
Dec. 1, 2014 with MacOSX 10.10.1 & Xcode 6.1 **

原始解の元のリストを検索して比定した解番号をその都度計数している。
これで全原始解を完全に復元・再構成したことが確かめられた。
このことの意味は何か。

数値1と{8, 12, 14, 16} (「全ての代表」) の働きによって $24 \times 16 = 384$; という解の総数の計算式が「一元的」に決まることの意味が、これで直接的に実証されたのである。

#9. 正方連結完全四方陣、或いは汎四方陣の標準解は、48個あることが知られている。
原始解384個の中から単なる「反転形」や「回転形」を省くと、8分の1の48個になる。
(この整理の過程を「正規化」という。)

では、標準解の総数48個の意味は、いったい何か?

$48 = 2^4 \times 3$; と、因数に分解してみても、何のことだかよくわからない。

ここは、原始解で得た知識を活用して理解する以外には無い。

$384 = {}_4P_4 \times 16 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 16$ の「8分の1」なのである。

ゆえに上の式の因数 4×2 を省いて、 $3 \times 2^4 \times 1 = 48$; なのである (しかし、この結果に構造的な意味はもはや見出せない。正規化のために隠されてしまうのだ …)。

これによって「大基本解」が何故に3個なのかが、少しはわかった気がする。

こうした全ては、原始解を研究してみて初めてわかったことであった。

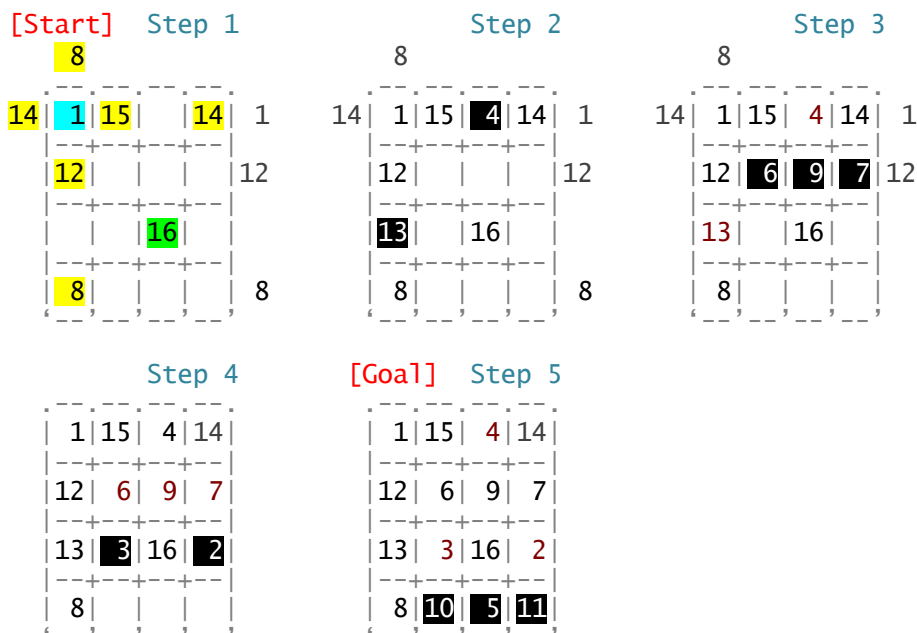
#10. 最後に「おまけ」として、正方連結完全四方陣の解を手作りする方法を紹介する。
コンピュータなど一切使わずに、記憶力と手計算だけで作るのである。

(1) 最初のスタートは、専ら自分の記憶力に頼る。

数値1を基本図の原点 n_1 に置いて、その上下左右に {8, 12, 14, 15} を置く。(その並べ方は、自由にして良い。) 右上の n_4 , 左下の n_{13} の内容も、自ずと決まる。

さらに原点 n_1 から右に2, 下に2進んだ n_{11} に「1の補数」である16を置く。

** How to make the Solution of 'C&C' MS44 by your own hand **



(2) 後は、全て計算で決めて行く。まずは第1行と第1列を決める。

使う計算式は、行列の定和式だ。4数の和が、34になるように残りの1数を決める。

$1+15+X+14=34$ から $X=4$; また $1+12+X+8=34$ から $X=13$;

後の残りは、正方連結四数の定和式を使う。

$1+15+12+X=34$ から $X=6$; $15+4+6+X=34$ から $X=9$; $4+14+9+X=34$ から $X=7$;

$12+6+13+X=34$ から $X=3$; $6+9+3+X=34$ から $X=16$; $9+7+16+X=34$ から $X=2$;
 ... 以下同様。

少し面倒な作業と感ずるかもしれないが、何しろ出来上がりは**正方連結完全四方陣**という「宝物」だ。それを励みにして頑張っていたきたい。

なお数値 1 の「取り巻きの 4 数」の座り方を入れ替えれば、別解を 23 個も作れる。

(初版: Written on May 21, 2007; 改訂版: on October 26, 2007;
 (最新版: on December 1, 2014 with MacOSX 10.10.1 and Xcode 6.1;
 by 摂田 寛二(Kanji Setsuda); jag12001@nifty.com: E-Mail Address)

【付記】この記事に興味深く思われた方は、正方連結汎**立体**四方陣の記事も併せてお読み頂きたい。補数ペアだの、「数値 1 の取り巻き」だの、解の総数の意味だの、良く似た論理の展開がある。

第 1 部第 4 章の第 2 節 **Part 1, Part 2, Part 3** に詳述している。

【付録資料】 最新プログラムの一例 (英語版で申し訳ない) :

```

/** 'Composite & Complete' Magic Squares of Order 4 **
/** Make the 24 when n1=1 trnsformed into the 384 **
/** File 'CCMS44PT.c': Dictated by Kanji Setsuda **
/** on Dec.18, 2004; May.16, 2007; Dec. 1, 2014; **
/** working with MacOSX 10.10.1 and Xcode 6.1 **
//
/** Basic Form and a Model Solution **
//          0#          1#
// 16 13 14 15 16 13   13  8 10  3 13  8
//  .-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.
//  4| 1| 2| 3| 4| 1   12| 1|15| 6|12| 1
//  |---+---+---+---|   |---+---+---+---|
//  8| 5| 6| 7| 8| 5   7|14| 4| 9| 7|14
//  |---+---+---+---|   |---+---+---+---|
// 12| 9|10|11|12| 9   2|11| 5|16| 2|11
//  |---+---+---+---|   |---+---+---+---|
// 16|13|14|15|16|13   13| 8|10| 3|13| 8
//  '---'---'---'---'   '---'---'---'---'
//  4  1  2  3  4  1   12  1 15  6 12  1
//
/** Basic Conditions: C=34; **
// n1+n2+n3+n4=C ...rw1; | n1+n5+n9+n13=C ...c1;
/** Composite Conditions: C=34; **
// n1+n2+n5+n6=C ...c1; | n2+n3+n6+n7=C ...c2;
// n3+n4+n7+n8=C ...c3; | n4+n1+n8+n5=C ...c4;
// n5+n6+n9+n10=C ...c5; | n6+n7+n10+n11=C ...c6;
// n7+n8+n11+n12=C ...c7; | n8+n5+n12+n9=C ...c8;
// n9+n10+n13+n14=C ...c9; | n10+n11+n14+n15=C ...c10;
// n11+n12+n15+n16=C ...c11; | n12+n9+n16+n13=C ...c12;
// n13+n14+n1+n2=C ...c13; | n14+n15+n2+n3=C ...c14;
// n15+n16+n3+n4=C ...c15; | n16+n13+n4+n1=C ...c16;
/** Complete Conditions: CC=17; **
// n1+n11=n2+n12=n3+n9=n4+n10=n5+n15=n6+n16=n7+n13=n8+n14=CC...cc
//
#include <stdio.h>
//
short cnt, cnt3;
short LSM, PSM;
short nm[17], uf1g[17];
short anm[9][17];
short snm[385][17], tnm[17][17];

```

```

short cnt01[17];
short refnmb[385];
//
void stp01(void), stp02(void), stp03(void), stp04(void);
void stp05(void), stp06(void), stp07(void), stp08(void);
void svsol(void), ansprint(void), recprint(void);
void printsol(short x);
void fnd01(void);
void prcnt01(void);
void prans(short x), prsoln(short x);
void prtrns(void), prtrlst(void), trnsprc(void);
void trnsf01(short x, short y), trnsf02(short x, short y);
void prmon(void);
//
short fndon(short x);
//
/* Main Program *
int main(){
short n;
printf("\n");
printf("*** 'Composite & Complete' Magic Squares of Order 4 **\n");
printf("*** Basic Form **\n");
for(n=0;n<17;n++){anm[0][n]=n;}
printsol(1);
printf("*** Making the Primitive Solutions ... **\n");
for(n=0;n<17;n++){nm[n]=0; uflg[n]=0;}
LSM=34; PSM=17; cnt=0; cnt3=0;
stp01(); /* Begin the Calculations *
printf(" [Count = %d]\n",cnt);
printf("\n");
printf("*** Compact List the 384 Primitive Solutions in the Extended Space **\n");
ansprint();
if(cnt3>0){printsol(cnt3);}
printf(" [Solution Counts = %d]\n",cnt);
printf("\n");
printf("* Solution Counts according to the Positions of Value 1 [Position: Counts] *\n");
prcnt01();
printf("\n");
for(n=0;n<=cnt;n++){refnmb[n]=0;}
printf("*** Basic Form of CCMS44 and Concepts of 15 Transformations **\n");
cnt3=0; prtrns();
printf("*** Reconstruction of CCMS44 by Pan-magic Shifting Transformation: **\n");
printf("*** List of 24 Solutions when n1=1 and the 15 Transformations of each **\n");
cnt3=0; recprint();
printf(" ** Monitor List: Old Numbers of Solutions Reconstructed **\n");
prmon();
printf("\n");
printf(" OK!\n");
printf("*** Calculated and Listed by Kanji Setsuda on\n");
printf(" Dec. 1, 2014 with MacOSX 10.10.1 & Xcode 6.1 **\n");
printf("\n");
return 0;
}
/* Begin the Calculations *
/* Search Level: 1 *
/* Set n1 & n11 *
void stp01(){
short a,b;
for(a=1;a<17;a++){b=PSM-a;
if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
uflg[a]=1; uflg[b]=1;
nm[1]=a; nm[11]=b;
stp02();
uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
}
}

```

```

}
/** Set n2 & n12 *
void stp02(){
  short a,b;
  for(a=16;a>0;a--){b=PSM-a;
    if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
      uflg[a]=1; uflg[b]=1;
      nm[2]=a; nm[12]=b;
      stp03();
      uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
  }
}
/** Set N5 & n15 *
void stp03(){
  short a,b;
  for(a=16;a>0;a--){b=PSM-a;
    if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
      uflg[a]=1; uflg[b]=1;
      nm[5]=a; nm[15]=b;
      stp04();
      uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
  }
}
/** Set N4 & n10 *
void stp04(){
  short a,b;
  for(a=16;a>0;a--){b=PSM-a;
    if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
      uflg[a]=1; uflg[b]=1;
      nm[4]=a; nm[10]=b;
      stp05();
      uflg[b]=0; uflg[a]=0;}
  }
}
/** Set n3=LSM-n1-n2-n4 & n9 *
void stp05(){
  short a,b;
  a=LSM-nm[1]-nm[2]-nm[4];
  if((0<a)&&(a<17)){
    b=LSM-nm[10]-nm[11]-nm[12];
    if(a+b==PSM){
      if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
        uflg[a]=1; uflg[b]=1;
        nm[3]=a; nm[9]=b;
        stp06();
        uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}
  }
}
/** Search Level: 2 *
/** Set n6=LSM-n1-n2-n5 & n16 *
void stp06(){
  short a,b,c,d;
  a=LSM-nm[1]-nm[2]-nm[5];
  if((0<a)&&(a<17)){
    b=LSM-nm[11]-nm[12]-nm[15];
    if(a+b==PSM){
      c=LSM-nm[5]-nm[9]-nm[10];
      d=LSM-nm[15]-nm[3]-nm[4];
      if((a==c)&&(b==d)){
        if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
          uflg[a]=1; uflg[b]=1;
          nm[6]=a; nm[16]=b;
          stp07();
          uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}}}
}
/** Set n7=LSM-n2-n3-n6 & n13 *

```



```

void stp07(){
short a,b,c,d,e;
a=LSM-nm[2]-nm[3]-nm[6];
if((0<a)&&(a<17)){
b=LSM-nm[12]-nm[9]-nm[16];
if(a+b==PSM){
c=LSM-nm[6]-nm[10]-nm[11];
d=LSM-nm[16]-nm[4]-nm[1];
e=LSM-nm[1]-nm[5]-nm[9];
if((a==c)&&(b==d)&&(b==e)){
if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
uflg[a]=1; uflg[b]=1;
nm[7]=a; nm[13]=b;
stp08();
uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}}}
}
/* Set n8=LSM-n3-n4-n7 & n14 */
void stp08(){
short a,b,c,d,e,f,g,h;
a=LSM-nm[3]-nm[4]-nm[7];
if((0<a)&&(a<17)){
b=LSM-nm[9]-nm[10]-nm[13];
if(a+b==PSM){
c=LSM-nm[4]-nm[1]-nm[5];
d=LSM-nm[7]-nm[11]-nm[12];
e=LSM-nm[5]-nm[12]-nm[9];
if((a==c)&&(a==d)&&(a==e)){
f=LSM-nm[10]-nm[11]-nm[15];
g=LSM-nm[13]-nm[1]-nm[2];
h=LSM-nm[15]-nm[2]-nm[3];
if((b==f)&&(b==g)&&(b==h)){
if((uflg[a]==0)&&(uflg[b]==0)){
uflg[a]=1; uflg[b]=1;
nm[8]=a; nm[14]=b;
svsol();
uflg[b]=0; uflg[a]=0;}}}}}}
}
//
/* Save the Solutions */
void svsol(){
short n;
cnt++; snm[cnt][0]=cnt;
for(n=1;n<17;n++){snm[cnt][n]=nm[n];}
n=0; /* Find 1 and Count solutions with that position */
for(n=1;n<17;n++){
if(nm[n]==1){cnt01[n]++;}
}
}
//
/* Print the Answers */
void ansprint(){
short m,n;
for(m=1;m<=24;m++){
anm[cnt3][0]=snm[m][0];
for(n=1;n<17;n++){anm[cnt3][n]=snm[m][n];}
cnt3++; if(cnt3==4){printsol(cnt3); cnt3=0;}
}
for(m=25;m<=cnt;m=m+24){
anm[cnt3][0]=snm[m][0];
for(n=1;n<17;n++){anm[cnt3][n]=snm[m][n];}
cnt3++; if(cnt3==4){printsol(cnt3); cnt3=0;}
}
}
//
/* Print the Answers */

```

```

void printsol(short x){
short m;
for(m=0;m<x;m++){printf("%16d#   ",anm[m][0]);}; printf("\n");
for(m=0;m<x;m++){
printf("   %2d %2d %2d %2d %2d %2d   ",
anm[m][16],anm[m][13],anm[m][14],anm[m][15],anm[m][16],anm[m][13]);}
printf("\n");
for(m=0;m<x;m++){printf("   .---.---.---.   ");}; printf("\n");
for(m=0;m<x;m++){
printf("   %2d|%2d|%2d|%2d|%2d|%2d   ",
anm[m][4],anm[m][1],anm[m][2],anm[m][3],anm[m][4],anm[m][1]);}
printf("\n");
for(m=0;m<x;m++){printf("   |-----|   ");}; printf("\n");
for(m=0;m<x;m++){
printf("   %2d|%2d|%2d|%2d|%2d|%2d   ",
anm[m][8],anm[m][5],anm[m][6],anm[m][7],anm[m][8],anm[m][5]);}
printf("\n");
for(m=0;m<x;m++){printf("   |-----|   ");}; printf("\n");
for(m=0;m<x;m++){
printf("   %2d|%2d|%2d|%2d|%2d|%2d   ",
anm[m][12],anm[m][9],anm[m][10],anm[m][11],anm[m][12],anm[m][9]);}
printf("\n");
for(m=0;m<x;m++){printf("   |-----|   ");}; printf("\n");
for(m=0;m<x;m++){
printf("   %2d|%2d|%2d|%2d|%2d|%2d   ",
anm[m][16],anm[m][13],anm[m][14],anm[m][15],anm[m][16],anm[m][13]);}
printf("\n");
for(m=0;m<x;m++){printf("   '---'---'---'   ");}; printf("\n");
for(m=0;m<x;m++){
printf("   %2d %2d %2d %2d %2d %2d   ",
anm[m][4],anm[m][1],anm[m][2],anm[m][3],anm[m][4],anm[m][1]);}
printf("\n\n");
}
//
/* Print the Solutions N by N *
void prsoln(short x){
short l,l4,n,p;
for(n=0;n<x;n++){
printf("%11d#",anm[n][0]);
if(n+1<x){printf(" ");}};
printf("\n");
for(l=0;l<4;l++){l4=l*4;
for(p=0;p<x;p++){
for(n=1;n<5;n++){printf("%3d",anm[p][l4+n]);}
if(p+1<x){printf(" ");}
}
printf("\n");}
printf("\n");
}
//
/* Solution Counts according to the Positions of Value 1 *
void prcnt01(){
short m,n;
for(m=1;m<17;m++){n=cnt01[m];
printf("%4d:%3d",m,n);
if((m%8)==0){printf("\n");}
}
printf("\n");
}
//
/* Print the Reconstruction *
void reprint(){
short m,n;
for(m=1;m<=24;m++){
printf(" Group %d:\n",snm[m][0]);
}
}

```

```

    for(n=1;n<17;n++){nm[n]=snm[m][n]; tnm[0][n]=snm[m][n];};
    trnsprc();
    prtrlst();
}
}
//
/* Conceptual Diagrams of Transformations by Pan-magic Plane Shifting *
void prtrns(){
short m,n;
for(n=0;n<17;n++){nm[n]=n; tnm[0][n]=n;};
trnsprc();
cnt3=0; for(n=0;n<17;n++){tnm[n][0]=n;}
for(m=0;m<16;m++){
for(n=0;n<17;n++){anm[cnt3][n]=tnm[m][n];}
cnt3++; if(cnt3==4){printsol(cnt3); cnt3=0;}
}
}
//
/* Transform them by the Pan-magic Line Shifting *
void trnsprc(){
trnsf01( 0, 1); trnsf01( 1, 2); trnsf01( 2, 3);
trnsf02( 0, 4); trnsf01( 4, 5); trnsf01( 5, 6); trnsf01( 6, 7);
trnsf02( 4, 8); trnsf01( 8, 9); trnsf01( 9,10); trnsf01(10,11);
trnsf02( 8,12); trnsf01(12,13); trnsf01(13,14); trnsf01(14,15);
}
//
/* Fundamental types of Transformation *
void trnsf01(short x, short y){
short n;
short mm[17], nn[17];
for(n=1;n<17;n++){nn[n]=tnm[x][n];}
mm[ 1]=nn[ 4]; mm[ 2]=nn[ 1]; mm[ 3]=nn[ 2]; mm[ 4]=nn[ 3];
mm[ 5]=nn[ 8]; mm[ 6]=nn[ 5]; mm[ 7]=nn[ 6]; mm[ 8]=nn[ 7];
mm[ 9]=nn[12]; mm[10]=nn[ 9]; mm[11]=nn[10]; mm[12]=nn[11];
mm[13]=nn[16]; mm[14]=nn[13]; mm[15]=nn[14]; mm[16]=nn[15];
for(n=1;n<17;n++){tnm[y][n]=mm[n];}
};
void trnsf02(short x, short y){
short n;
short mm[17], nn[17];
for(n=1;n<17;n++){nn[n]=tnm[x][n];}
mm[ 1]=nn[13]; mm[ 2]=nn[14]; mm[ 3]=nn[15]; mm[ 4]=nn[16];
mm[ 5]=nn[ 1]; mm[ 6]=nn[ 2]; mm[ 7]=nn[ 3]; mm[ 8]=nn[ 4];
mm[ 9]=nn[ 5]; mm[10]=nn[ 6]; mm[11]=nn[ 7]; mm[12]=nn[ 8];
mm[13]=nn[ 9]; mm[14]=nn[10]; mm[15]=nn[11]; mm[16]=nn[12];
for(n=1;n<17;n++){tnm[y][n]=mm[n];}
};
//
/* Print the Result List of Transformations *
void prtrlst(){
short m,n,oldn;
for(m=0;m<16;m++){
for(n=0;n<17;n++){anm[cnt3][n]=tnm[m][n];}
oldn=fndon(cnt3); anm[cnt3][0]=oldn; refnmb[oldn]++;
cnt3++; if(cnt3==6){prsoln(cnt3); cnt3=0;}
}
if(cnt3>0){prsoln(cnt3); cnt3=0;}
}
//
/* Find the Relative Solution Number in the Old List *
short fndon(short x){
short d,m;
short n,f;
d=0;
for(m=1;m<=cnt;m++){f=0;

```

```

    for(n=1;n<17;n++){
        if(anm[x][n]==snm[m][n]){f++;}
        else{break;}
    }
    if(f==16){d=snm[m][0]; break;}
}
return d;
}
//
/** Monitor of the Old Numbers Reffered to the Solution **
void prmon(){
    short n;
    printf(" ??: %d",refnmb[0]);
    for(n=1;n<385;n++){
        if(n%32==1){printf("\n%4d:",n);}
        printf("%2d",refnmb[n]);
    }
    printf("\n");
}
//

```